Topologie et Calcul différentiel

Jean-Pierre Françoise

Topologie et Calcul différentiel

L 360A, Université Pierre-et-Marie Curie, Paris 6

Jean-Pierre FRANCOISE

Année 2007-2008

Plan du Cours

I- Espaces topologiques, espaces topologiques connexes, espaces métriques, espaces vectoriels normés

-Espaces topologiques et applications continues

-Espaces topologiques connexes, le théorème des valeurs intermédiaires

-Espaces topologiques connexes par arcs, parties convexes d'un espace affine

-Espaces métriques, topologie associée, continuité uniforme et convergence uniforme des suites de fonctions

-Espaces vectoriels normés, inégalités de Hölder et de Minkowski

Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens

II- Espaces métriques complets, Espaces de Banach, Espaces de Hilbert, le théorème du point fixe, continuité des applications linéaires

-Suites de Cauchy, espaces métriques complets, espaces de Banach et espaces de Hilbert, le complété d'un espace métrique

-Le théorème du point fixe

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles

-Le théorème de projection dans les espaces de Hilbert

-La propriété de Baire

-Applications linéaires continues

-Algèbres de Banach

-Théorème de l'application ouverte, théorème de Banach et théorème du graphe fermé

III- Espaces compacts

-Espaces topologiques compacts, la propriété de Borel-Lebesgue

-Le théorème de Tychonoff

-Caractérisation des compacts de R^n, équivalence des normes sur R^n

-Espaces topologiques localement compacts

-Espaces métriques compacts

-Espaces métriques précompacts

-Le théorème de Bernstein-Weierstrass

-Le théorème d'Ascoli

IV-Applications différentiables

-Définition de la différentielle, la dérivée directionnelle, les dérivées partielles

-L'inégalité des accroissements finis

-Convergence d'une suite de fonctions différentiables

-Les différentielles d'ordre supérieur

-La formule de Taylor-Young

-Points critique, extremum simple

V- Les théorèmes de l'inverse locale et des fonctions implicites

-Théorème de l'inverse local

Chapitre I

Espaces topologiques, espaces topologiques connexes

Espaces vectoriels normés, espaces métriques

Espaces topologiques et applications continues

Définition

Un ensemble E est un espace topologique si l'on a défini sur E une famille de sous-ensembles appelés ouverts de E qui satisfont les propriétés suivantes

(i) une union quelconque d'ouverts est un ouvert,

(ii) une intersection finie d'ouverts est un ouvert,

(iii) l'ensemble vide et E sont des ouverts.

En fait, n'importe quel ensemble non vide peut-être muni de deux topologies triviales. La topologie grossière, qui comporte le moins d'ouverts possible, l'ensemble vide et l'ensemble lui-même et la topologie discrète pour laquelle toute partie de E est un ouvert. Un ensemble donné peut avoir beaucoup de topologies distinctes (c'est à dire de familles d'ouverts associés). En particulier, il est utile de comparer entre elles différentes topologies d'un même ensemble E. On dit que la topologie T est moins fine que la topologie T' si tout ouvert U pour la topologie T est automatiquement un ouvert de la topologie T'.

N'importe quelle partie A d'un espace topologique est muni d'une structure d'espace topologique. On peut considérer la famille des ouverts obtenus en prenant toutes les intersections de A et des ouverts de E. Cette topologie s'appelle la topologie induite sur A.

On considère l'ensemble $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ des nombres réels auquel on ajoute deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. On définit sur cet ensemble une topologie de la manière suivante. L'ensemble $A \subset \overline{R}$ est un ouvert si

(i) Pour tout point $x \in A \cap R$, il existe un ouvert de R contenant x et contenu dans A,

(ii) Si A contient $-\infty$ (resp. $+\infty$), il existe un intervalle de la forme $]-\infty, a[$, resp. $]a, +\infty[$ contenu dans A.

On peut aussi définir une structure topologique sur un ensemble E par une famille de fermés (les complémentaires des ouverts) qui satisfait les conditions suivantes :

(i) une intersection quelconque de fermés est un fermé,

(ii) une union finie de fermés est un fermé,

(iii) l'ensemble vide et l'ensemble E sont des fermés.

Définition

Dans un espace topologique, un sous-ensemble est un voisinage d'un point a s'il contient un ouvert qui contient a.

On note A^c le complémentaire d'une partie A d'un ensemble E. Un point $a \in A$ est dit intérieur à A s'il existe un ouvert U contenant a et contenu dans A. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A (nôté $\mathring{A}$). Un point a est dit adhérent à A si tout voisinage de a rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A (nôtée

$\overline{A}$). L'ensemble des points adhérents à la fois à A et à son complémentaire s'appelle la frontière de A (nôtée $Fr(A)$).

Définition

Soit E un espace topologique et (x_n) une suite d'éléments de E. Un élément x est limite de la suite (x_n) si tout voisinage de x contient tous les éléments de la suite (x_n) à partir d'un certain rang (dépendant du voisinage).

Définition

Une valeur d'adhérence l d'une suite (x_n) d'éléments d'un espace topologique E est un point l de E tel que pour tout voisinage de l et pour tout entier N, il existe un élément x_n avec $n > N$ qui appartient à ce voisinage.

Définition

Un système de voisinage $\{U_\sigma\}$ est appelé une base de voisinages de l'espace topologique E si pour tout point x de E et pour tout voisinage U de x, il existe un élément U_σ tel que :

$$x \in U_\sigma \subset U$$

.

Définition

Un sous-ensemble $A \subset E$ est partout dense si l'adhérence de A est égale à E. Si E possède un sous-ensemble dénombrable partout dense, on dit que E est séparable.

Théorème

Un espace topologique E qui possède une base de voisinages dénombrable est séparable.

Soit U_n une base dénombrable de voisinages. On choisit un point x_n dans chaque voisinage U_n. Soit A l'ensemble des éléments x_n. Soit x un point quelconque de E et U un voisinage de x. Comme U_n est une base de voisinage, il existe un U_n qui contient x et qui est contenu dans U. Il s'en suit qu'il existe un point x_n dans le voisinage U. Un point quelconque de E est ainsi adhérent à A. Autrement dit, A est une partie dénombrable de E qui est partout dense et E est séparable.

Définition

Etant donnés deux espaces topologique X et Y, l'espace topologique produit $Z = X \times Y$ est le produit Cartésien de X par Y muni de la plus petite famille d'ouverts qui contienne les sous-ensembles $A \times B$ produits d'un ouvert A de X et d'un ouvert B de Y.

Définition

On considère plus généralement un produit quelconque d'ensembles, paramétré par un ensemble A:

$$X = \Pi_{i \in A} E_i.$$

Si chaque ensemble E_i est un espace topologique, on peut définir sur X une topologie produit comme suit.

Un ouvert élémentaire est un sous-ensemble de X de la forme

$$U = \Pi_{i \in A} U_i,$$

où $U_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in A$ pour lesquels U_i est un ouvert de E_i.

La topologie produit se définit alors comme la topologie la moins fine telle que les ouverts élémentaires soient des ouverts.

Définition

Soit X un ensemble partitionné en classe d'équivalence $A_\alpha, \alpha \in I$ par une relation d'équivalence r. La topologie quotient sur $Y = X/r$ est définie avec le minimum d'ouverts possible (la moins fine possible) en sorte que, si π désigne la projection canonique qui envoie un élément x sur sa classe d'équivalence, l'ensemble $U \subset Y$ est un ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Définition

Soit $f : E \to F$ une application définie sur l'espace topologique E à valeurs dans l'espace topologique F. Soit $x \in E$ et $y = f(x) \in F$. On dit que l'application f est continue au point x si pour tout voisinage V de $y = f(x)$ dans F, il existe un voisinage U de x dans E tel que $f(U) \subset V$.

Définition

Etant donnés deux espaces topologiques E et F, une application continue $f : E \to F$ est une application telle que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. Une application $f : E \mapsto F$ est ouverte si l'image directe de tout ouvert de E est un ouvert de F. Un homéomorphisme $f : E \mapsto F$ entre les deux espaces topologiques E et F est une application bijective, continue et d'inverse continue.

Définition

Un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorff) si pour tout couple de points distincts (x, y) de E, il existe un ouvert U de E qui contient x et un ouvert V de E qui contient y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Sur l'ensemble N des entiers naturels, on considère la topologie définie par la famille d'ouvert $\emptyset, N$ et les sous-ensembles $(1, 2, ..., n)$, $n \in N$. On peut vérifier que N muni de cette topologie n'est pas de Hausdorff.

Espaces topologiques connexes, le théorème des valeurs intermédiaires

Définition

Un espace topologique E est dit connexe si l'existence de deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $U_1 \cup U_2 = E$ implique que soit U_1, soit U_2 est l'ensemble vide.

On peut aussi dire que les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés de E sont E lui-même et l'ensemble vide $\emptyset$. On convient que l'ensemble vide est connexe.

Proposition

Les sous-ensembles de R qui (munis de la topologie induite) sont des espaces topologiques connexes sont les intervalles.

Démonstration

Soit $A \subset R$ un sous-espace topologique connexe de R. Supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existerait dans ce cas au moins trois points a, c, b tels que $a, b \in A$ et $c \notin A$, avec $a < c < b$. On pose $U_1 = A \cap]-\infty, c[$ et $U_2 = A \cap]c, +\infty[$. Ce sont des ouverts de A, ils sont disjoints et leur union est égale à A. L'ensemble A est donc non connexe. Réciproquement, soit A un intervalle de R et supposons qu'il existe deux ouverts U_1 et U_2 de R tels que

$$A \subset U_1 \cup U_2,\ (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = \emptyset.$$

Soit $a \in U_1 \cap A$, et $b \in U_2 \cap A$, on peut supposer de plus que $a < b$. Soit X l'ensemble des éléments x de A tels que $[a, x] \subset U_1$. Cet ensemble est non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure c. Si c appartenait à X, il y aurait une contradiction, puisque U_1 étant ouvert, il existerait un intervalle ouvert $]c - \epsilon, c + \epsilon[$ contenu dans U_1 et $c + \epsilon/2$ serait un élément de X plus grand que sa borne supérieure. L'élément c appartient donc à U_2. Mais dans ce cas, U_2 étant ouvert, il existe un intervalle $]c-\eta, c+\eta[$ contenu dans U_2. Le fait que c soit la borne supérieure de X implique qu'il existe $x \in U_1$ tel que $c - \eta < x < x + \eta$. L'existence d'un tel élément contredirait le fait que $A \cap U_1$ et $A \cap U_2$ sont disjoints.

Dans la suite, pour simplifier, on désignera par partie connexe d'un espace topologique une partie qui, munie de la topologie induite par celle de A, est connexe. Les parties connexes de R sont donc les intervalles.

Proposition

Si A est une partie connexe de l'espace topologique E, l'adhérence de A est connexe.

Preuve

généralement, on vérifie que n'importe quelle partie B de E telle que

$$A \subset \overline{A}$$

est connexe. Soient en effet V_1 et V_2 deux ouverts disjoints de B de réunion B. Ils sont de la forme $V_1 = U_1 \cap B$, $V_2 = U_2 \cap B$ avec U_1, U_2 ouverts de E. Mais $W_1 = U_1 \cap A$ et $W_2 = U_2 \cap A$ sont deux ouverts disjoints de A de réunion égale à A. Un des deux est donc vide et on peut supposer que c'est W_1. On a donc que A est contenu dans le complémentaire de U_1. ce complémentaire est fermé donc l'adhérence de A est aussi contenue dans ce complémentaire. Il s'ensuit que $V_1 = \emptyset$.

Proposition

Soit A et B deux parties d'un espace topologique E. On suppose que A est connexe et rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de B. Alors A rencontre nécessairement la frontière de B.

Démonstration

Si A ne rencontrait pas la frontière de B, les deux ouverts $A \cap \mathring{B}$ et $A \cap (\mathring{B}^c)$ seraient d'intersection vide et d'union égale à A.

Proposition

Dans un espace topologique E, si deux parties connexes A et B sont d'intersection non vide leur réunion est connexe.

Démonstration

Supposons que la réunion $A \cup B$ soit non connexe. Il existerait deux ouverts U et V de E tels que $(U \cap V) \cap (A \cup B) = \emptyset$ et que la réunion $U \cup V$ recouvre

$A \cup B$. On a donc en particulier $A \cap (U \cap V) = \emptyset$ et $B \cap (U \cap V) = \emptyset$ et $A \subset (U \cup V)$ et $B \subset (U \cup V)$. Comme A et B sont connexes, on a soit $A \subset U$, soit $A \subset V$ et de même soit $B \subset U$, soit $B \subset V$. Pour fixer les idées, supposons que $A \subset U$. Dans ce cas, si $B \subset U$, alors $(A \cup B) \subset U$ et $(A \cup B) \cap V = \emptyset$. Si $B \subset V$, alors $A \cap V = \emptyset$. Dans les deux cas, on obtient une contradiction.

Proposition

Soit $f : E \mapsto F$ une application continue entre deux espaces topologiques E et F. L'image par f d'une partie connexe de E est une partie connexe de F.

Démonstration

Supposons que $A \subset E$ soit connexe et que $f(A)$ ne le soit pas. Il existerait dans ce cas deux ouverts disjoints de A, U_1 et U_2 tels que $f(A) = U_1 \cup U_2$. On aurait alors que les images inverses par f, $f^{-1}(U_1)$ et $f^{-1}(U_2)$ seraient deux ouverts disjoints de A d'union égale à A. Il y aurait donc une contradiction.

Théorème

Soit E un espace topologique connexe et $f : E \mapsto R$ une application continue. L'image de E est un intervalle.

Cela signifie que f prend toutes les valeurs entre ses bornes. Ce théorème est souvent appelé, pour cette raison, théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration

En effet, l'image de E est connexe et les seules parties de R qui sont connexes sont les intervalles.

Définition

Un espace topologique E est dit localement connexe s'il existe une base de voisinages connexes.

Définition

On dit que deux éléments a et b d'un espace topologique E sont connectés s'il existe une partie connexe de E qui les contienne tous les deux. La relation "les points sont connectés" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les composantes connexes de l'espace topologique E.

Remarques

Dans un espace topologique E la composante connexe d'un point est la plus grande (au sens de l'inclusion) partie connexe qui le contienne. Les composantes connexes sont fermées.

Définition

Un espace topologique est dit totalement discontinu si chacune de ses composantes connexes a un seul élément.

Proposition

Dans un espace topologique localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.

Preuve

On a déjà remarqué que les composantes connexes sont toujours fermées. Le fait que tout point possède un voisinage connexe implique qu'elles sont ouvertes.

Espaces topologiques connexes par arcs, parties convexes d'un espace affine

Définition

Un espace topologique E est dit connexe par arcs si, pour tout couple (a, b) de points de E, il existe une application continue f de l'intervalle $[0, 1]$ dans E telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Proposition

Un espace topologique connexe par arcs est connexe.

Démonstration

Si l'espace topologique est connexe par arcs, deux points quelconques de E sont connectés, puisqu'ils appartiennent à une même partie connexe de E, image par f de $[0, 1]$. L'espace E est donc connexe.

Définition

Soit E un espace affine. Une partie $A \subset E$ est dite convexe si pour tout couple (a, b) de points de A, le segment qui joint a à b:

$$\{x = \lambda a + (1 - \lambda)b,\ \lambda \in [0, 1]\},$$

est contenu dans A.

Une partie convexe d'un espace affine est connexe par arc. L'intersection d'ensembles convexes est convexe.

Définition

Un simplexe (de dimension n) est un sous-ensemble de R^n constitué des points $x \in R^n$ de la forme:

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i,$$

$0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, où les points $a_i, \quad i = 1, ..., n+1$ sont affinement indépendants.

Définition

Etant donné un espace topologique connexe B, une application $\pi : X \mapsto B$ est un revêtement si:

(i) $\pi(X) = B$ et

(ii) pour tout $x \in B$,

il existe un voisinage ouvert V de x tel que les composantes connexes de $\pi^{-1}(V)$ sont des ouverts de X homéomorphes à V.

On peut considérer, par exemple, l'application $\pi : X \mapsto B$ avec $X = R$ et $B = X/r$ où r est la relation d équivalence $x \; r \; y$ si et seulement si $x - y \in 2\pi Z$ et où π est la projection qui envoie un élément sur sa classe d équivalence. Le quotient B est muni de la topologie quotient. L'application π est ainsi continue et surjective. Etant donné un point quelconque $x \in B$ l'image inverse de l'ensemble des classes d équivalence d'un intervalle ouvert I centré en x de longueur strictement inférieure à 2π est égale à $Z \times I$. Chacune de ces composantes connexes sont des ouverts homéomorphes à I. L'application π est donc un revêtement. Nôter que l'application exponentielle:

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

définit un homéomorphisme de B et du cercle unité S^1.

Soit $\phi : S^1 \to S^1$ une application continue du cercle dans lui-même. On peut lui associer une application continue $\psi : R \to R$ telle que

$$\phi(\exp(\mathrm{i}s)) = \exp(\mathrm{i}\psi(s)).$$

Dans ce contexte, on dit que ψ "relève" ϕ. Lorsque la variable s croît de s_0 à $s_0 + 2\pi$, le point $z = \exp(\mathrm{i}s)$ effectue sur S^1 un tour dans le sens positif. Si on suit par continuité, $\psi(s)$ varie de $\psi(s_0)$ à $\psi(s_0 + 2\pi)$ et il existe un entier n tel que

$$\psi(s_0 + 2\pi) = \psi(s_0) + 2\pi n.$$

Cet entier n ne dépend pas du point s_0 et de l'application ψ choisie pour relever ϕ. Cet entier qui ne dépend que de ϕ s'appelle le degré de l'application.

Proposition

Soient $\phi_1 : S^1 \to S^1$ et $\phi_2 : S^1 \to S^1$ deux applications continues telles que pour tout $z \in S^1$, $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ ne sont pas opposés sur le cercle. Alors les degrés de ϕ_1 et de ϕ_2 sont les mêmes.

preuve

En effet, on peut prendre une détermination du logarithme complexe en dehors de l'axe réel négatif et construire une application continue θ telle que

$$\phi_1(z) = \phi_2(z)\exp(\mathrm{i}\theta(z)).$$

On obtient alors de suite l'égalité des degrés.

Une propriété fondamentale du degré est son invariance par homotopie que l'on rappelle brièvement ici.

Définition

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $f_0 : X \to Y$ et $f_1 : X \to Y$ deux applications continues. On dit que f_0 et f_1 sont homotopes s'il existe une application continue $g : X \times [0,1] \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait

$$g(x,0) = f_0(x)$$

$$g(x,1) = f_1(x).$$

Toute application g satisfaisant ces conditions est appelée une homotopie de f_0 à f_1.

Théorème

Si deux applications continues $\phi_0 : S^1 \to S^1$ et $\phi_1 : S^1 \to S^1$ sont homotopes, elles ont même degré.

preuve

On note $\phi_t(z) = g(z,t)$. L'application g est uniformément continue et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(y,z) < \eta$ et $\mid t - s \mid < \eta$ implique $d(g(y,s), g(z,t)) < \epsilon$. En particulier, si $z \in S^1$, et $\mid t - s \mid < \eta$, les points $\phi_t(z)$ et $\phi_s(z)$ ne peuvent pas être opposés. D'après la proposition 1, le degré $t \mapsto \deg(\phi_t)$ est localement constant donc constant puisque $[0,1]$ est connexe.

Espaces métriques, topologie associée, continuité uniforme et convergence uniforme des suites de fonctions

Définition

Un espace métrique E est un ensemble sur lequel est définie une fonction $d : E \times E \to R_+$, appelée fonction distance, qui vérifie

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$d(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y \qquad .$$

Dans un espace métrique E on définit une boule ouverte de rayon ρ centrée en a comme

$$B(a, \rho) = \{x \in E / d(a, x) < \rho\}.$$

Une boule fermée de centre ρ centrée en a est l'ensemble

$$\overline{B}(a, \rho) = \{x \in E \ d(a, x) \leq \rho\}.$$

Une partie d'un espace métrique est dite bornée si elle est contenue dans une boule.

On définit la topologie associée à un espace métrique de la façon suivante. Une partie d'un espace métrique est dite ouverte si c'est une réunion de boules ouvertes et elle est fermée si son complémentaire est ouvert.

Il est facile de vérifier que la famille des sous-ensembles ainsi définis satisfait les axiomes d'une topologie.

Définition

Deux distances d_1 et d_2 définies sur le même espace métrique E sont topologiquement équivalentes si elles définissent les mêmes familles d'ouverts. Deux distances d_1 et d_2, définies sur le même espace métrique E, sont dites équivalentes s'il existe deux constantes α et β telles que pour tous $(x, y) \in E$

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Si deux distances sont équivalentes, elles sont topologiquement équivalentes. Soit $E_i, d_i,\ i = 1, ..., n$ un nombre fini d'espace métrique. Le produit ensembliste des espaces

$$E = \Pi_{i=1}^n E_i$$

est un espace métrique. On peut, par exemple, vérifier que

$$d(x, y) = \mathbf{Max}_{i=1}^n d_i(x_i, y_i),$$

définit une distance sur E. Dans le cas d'une famille dénombrable d'espaces métriques, on peut considérer la distance suivante

$$d(x, y) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{Arctan d_i(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Proposition

Une application f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ) est continue au point a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, a) \leq \eta$ implique $\delta(f(x), f(a)) \leq \epsilon$. L'application $f : E \to F$ est continue si elle est continue en tout point de E.

Dans le cadre des espaces métriques, on peut définir la continuité uniforme d'une application.

Définition

Une application f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ) est dite uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple $(x, y) \in E$, vérifiant $d(x, y) \leq \eta$, on a $\delta(f(x), f(a)) \leq \epsilon$.

Définition

Soit $\{f_n\} : E \to F$ une suite d'applications définies sur un espace métrique (E, d) à valeurs dans (F, δ). On dit que la suite converge ponctuellement vers $f : E \to F$ si, pour tout $x \in E$, pour tout ϵ, il existe N tel que $\delta(f_n(x), f(x)) < \epsilon$. On dit que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers $f : E \to F$ si pour tout ϵ, il existe N tel que pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq N$, $\delta(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Proposition

Si une suite d'applications continues converge uniformément, l'application limite est nécessairement continue.

Soit E un espace métrique et A un sous-ensemble fermé de E. Soit $x \in E$, on définit :

$$d(x, A) = \mathrm{Inf}_{y \in A} d(x, y),$$

et on vérifie que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.

Proposition

Si deux sous-ensembles fermés A et B de E satisfont $A \cap B = \emptyset$, et si on se donne deux nombres réels a et b, il existe une fonction

continue sur E qui vaut a sur A, b sur B et prend des valeurs comprises entre a et b.

En effet, la fonction

$$f(x) = \frac{bd(x, A) + ad(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

satisfait cette propriété.

Théorème

(Théorème d'extension de Brouwer-Urysohn)

Soit E un espace métrique et F un sous-ensemble fermé de E. Soit $f : F \to R$ une fonction continue bornée. Il existe une fonction continue $\phi : E \to R$ qui coincide avec f sur F.

Démonstration

Soit $\mu_0 = \sup_{p \in F} |\phi(p)|$, on définit $\phi_0(p) = \phi(p)$ pour $p \in F$. Les sous-ensembles $A_0 = \{p; \phi_0(p) \leq -\mu_0/3\}$ et $B_0 = \{p; \phi_0(p) \geq \mu_0/3\}$ de F sont fermés et on peut leur appliquer la proposition précédente. On construit ainsi une fonction $f_0(p)$ continue sur E qui prend la valeur $-\mu_0/3$ sur A_0 et $\mu_0/3$ sur B_0 et qui satisfait $|f_0(p)| \leq \mu_0/3$. On définit ensuite sur F la fonction $\phi_1 = \phi_0 - f_0$ qui est continue et satisfait:

$$\sup_{p \in F} |\phi_1(p)| = \mu_1 = 2\mu_0/3.$$

Les sous-ensembles $A_1 = \{p; \phi_1(p) \leq -\mu_1/3\}$ et $B_1 = \{p; \phi_1(p) \geq \mu_1/3\}$ de F sont fermés et on peut leur appliquer la proposition. On construit ainsi une fonction $f_1(p)$ continue sur E qui prend la valeur $-\mu_1/3$ sur A_1 et $\mu_1/3$

sur B_1 et qui satisfait $|f_1(p)| \leq \mu_1/3$. On définit ensuite sur F la fonction $\phi_2 = \phi_1 - f_1$ qui est continue et satisfait:

$$\sup_{p \in F} |\phi_2(p)| = \mu_2 = 2\mu_1/3.$$

En poursuivant la construction, on obtient ainsi une suite de fonctions $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n, ...$ et une suite $f_0, f_1, ..., f_n, ...$ telles que

$$\phi_{n+1}(p) = \phi_n(p) - f_n(p), \quad \mu_n = \sup_{p \in F} |\phi_n(p)| = (\frac{2}{3})^n \mu_0,$$

$$\sup |f_n(p)| = (\frac{2}{3})^n \mu_0.$$

On définit alors la fonction continue

$$f(p) = \sum f_n(p),$$

qui satisfait

$$|f(p)| \leq \sum_0^{+\infty} (\frac{2}{3})^n \mu_0 = \mu_0.$$

De plus on a pour $p \in F$,

$$f(p) = \sum [\phi_n(p) - \phi_{n+1}(p)] = \phi_0(p).$$

On peut remarquer que si la fonction donnée ϕ est comprise entre deux bornes α et β, en appliquant la construction précédente à $\phi - (\alpha + \beta)/2$, on obtient l'inégalité

$$\alpha \leq f(p) \leq \beta.$$

Espaces vectoriels normés, inégalités de Hölder et de Minkowski

Définition

Soit E un espace vectoriel sur R. Une norme sur E est une application $x \mapsto \|x\|$ de E sur R^+ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $\lambda \in R$ et $x \in E$,

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

(ii) Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = 0$$

si et seulement si

$$x = 0.$$

(iii) (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in E$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dans l'espace vectoriel réel R^n formé des vecteurs $x = (x_1, ..., x_n)$ qui sont des n-uplets de nombres réels, on peut définir les exemples suivants de normes

$$\|x\|_1 = \Sigma_{i=1}^n \mid x_i \mid,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ...x_n^2},$$

$$\|x\|_\infty = \mathbf{Max}_{i=1}^n \mid x_i \mid .$$

Dans l'espace vectoriel de dimension infinie $E = C^0([a, b])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ de R, on peut, par exemple, définir les normes suivantes

$$\|f\|_1 = \int_a^b \mid f(x) \mid dx,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b \mid f(x) \mid^2 dx},$$

$$\|f\|_\infty = \mathbf{Sup}_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid .$$

L'inégalité triangulaire implique

$$\|x - y\| \geq \mid \|x\| - \|y\| \mid,$$

qui est souvent appelé la deuxième inégalité triangulaire. On peut aussi définir des normes pour des espaces vectoriels complexes. Dans ce cas, il faut, dans la première condition, remplacer la valeur absolue du scalaire par son module.

Il peut être utile en analyse fonctionnelle de considérer des semi-normes qui ne satisfont que les conditions (i) et (iii).

Un espace vectoriel normé est évidemment un espace métrique avec

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition

Deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ définies sur le même espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes k et k' telles que pour tout $x \in E$,

$$k'\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Par exemple, sur l'espace $E = C^0([a, b])$ les deux normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes. En effet, quelque soit la constante $k > 0$, on ne peut avoir pour tout $f \in E$

$$\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1.$$

Il est facile de construire un exemple de fonction continue positive sur l'intervalle $[a, b]$ dont le maximum est arbitrairement grand et telle que l'aire comprise entre son graphe et l'axe $y = 0$ est égale à 1.

Les premiers exemples de normes présentés ci-dessus sont des cas particuliers d'une famille plus générale. Pour l'introduire, il est nécessaire de démontrer des inégalités qui ont, par ailleurs, leur intérêt propre.

Proposition (Inégalité de Hölder)

Soit $u = (u_1, ..., u_n) \in R^n$ et $v = (v_1, ..., v_n) \in R^n$ et deux nombres réels positifs p et q tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On a l'inégalité suivante

$$\Sigma_{k=1}^{n} |u_k||v_k| \leq (\Sigma_{j=1}^{n} |u_j|^p)^{1/p}.(\Sigma_{j=1}^{n} |v_j|^q)^{1/q}.$$

Démonstration

Cette inégalité résulte de la propriété de concavité du logarithme. En effet pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tous nombres positifs x, y, on a

$$\lambda \mathrm{Log} x + (1 - \lambda) \mathrm{Log} y \leq \mathrm{Log}(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

Ce qui donne

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

Si on pose

$$x = \frac{|u_k|^p}{\Sigma_{j=1}^{n} |u_j|^p},$$

$$y = \frac{|v_k|^q}{\Sigma_{j=1}^n |v_j|^q},$$

puis $\lambda = \frac{1}{p}$, on obtient à partir de l'inégalité précédente

$$\frac{|u_k|}{(\Sigma_{j=1}^n |u_j|^p)^{1/p}} . \frac{|v_k|}{(\Sigma_{j=1}^n |v_j|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|u_k|}{\Sigma_{j=1}^n |u_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|v_k|}{\Sigma_{j=1}^n |v_j|^q}$$

. On obtient alors en prenant la somme de tous ces termes

$$\Sigma_{k=1}^n \frac{|u_k||v_k|}{(\Sigma_{j=1}^n |u_j|^p)^{1/p} (\Sigma_{j=1}^n |v_j|^q)^{1/q}} \leq 1,$$

ce qui donne l'inégalité cherchée.

Proposition (Inégalité de Minkowski)

On a de plus l'inégalité suivante

$$(\Sigma_{k=1}^n |u_k + v_k|^p)^{1/p} \leq (\Sigma_{k=1}^n |u_k|^p)^{1/p} + (\Sigma_{k=1}^n |v_k|^p)^{1/p}.$$

Démonstration

On part de l'inégalité

$$\Sigma_{k=1}^n |u_k + v_k|^p = \Sigma_{k=1}^n |u_k + v_k||u_k + v_k|^{p-1} \leq \Sigma_{k=1}^n (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1} =$$

$$\Sigma_{k=1}^n |u_k||u_k + v_k|^{p-1} + \Sigma_{k=1}^n |v_k||u_k + v_k|^{p-1}.$$

L'inégalité de Hölder donne ensuite

$$\Sigma_{k=1}^n |u_k + v_k|^p \leq$$

$$(\Sigma |u_k|^p)^{1/p} (\Sigma_{k=1}^n |u_k + v_k|^{q(p-1)})^{1/q} +$$

$$(\Sigma|v_k|^p)^{1/p}(\Sigma_{k=1}^n|u_k+v_k|^{q(p-1)})^{1/q},$$

et ceci démontre l'inégalité cherchée.

Corollaire

Les applications

$$u=(u_1,...,u_n)\mapsto\|u\|_p=(\Sigma_{k=1}^n|u_k|^p)^{1/p}$$

définissent des normes sur l'espace vectoriel R^n qui sont désignées par "normes ℓ_p".

Preuve

L'inégalité de Minkowski n'est autre que l'inégalité triangulaire pour cette norme. Les autres conditions sont faciles à vérifier.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que des normes similaires

$$\|f\|_p=(\int_a^b|f(x)|^p dx)^{1/p}$$

peuvent être définies sur l'espace $E=C^0([a,b])$. Ces normes sont appelées "normes L_p".

Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens

Définition

Soit E un espace vectoriel sur R, un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive. On note le produit scalaire de cette façon

$$(x,y)\mapsto<x,y>.$$

Un produit scalaire définit une norme associée

$$x \mapsto \|x\|.$$

Réciproquement une norme n'est pas nécessairement associée à un produit scalaire.

Par exemple, sur $E = R^n$, il existe un produit scalaire canonique

$$(x, y) \mapsto < x, y >= \Sigma_{i=1}^n x_i y_i.$$

Définition

Soit E un espace vectoriel sur C, une forme sesquilinéaire sur E est une application $f : E \times E \mapsto C$ qui satisfait

$$f(\lambda x + \mu x', y) = \lambda f(x, y) + \mu f(x', y),$$

$$f(x, \lambda y + \mu y') = \overline{\lambda} f(x, y) + \overline{\mu} f(x, y').$$

Elle est dite hermitienne si

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)},$$

et si elle est définie positive, c'est-à-dire que $f(x, y) \geq 0$ et $f(x, x) = 0$ implique $x = 0$. Pour simplifier, une forme hermitienne sera aussi appelée un produit scalaire.

Une forme hermitienne f permet de définir une norme sur l'espace vectoriel complexe E par

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{f(x, x)}.$$

Définition

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé un espace vectoriel euclidien. Un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne est appelé espace préhilbertien.

Proposition

Une norme est associée à un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme

$$\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Dans la suite, on utilise la condition nécessaire et on ne donne que la démonstration de cette condition.

Démonstration

On suppose qu'une norme est associée à un produit scalaire. On a donc

$$\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=\|x\|^2-2\mathbf{Re}<x,y>+\|y\|^2+\|x\|^2+2\mathbf{Re}<x,y>+\|y\|^2=$$

$$2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Chapitre II

Espaces métriques complets, Espaces de Banach, Théorème du point fixe, Continuité des applications linéaires

Suites de Cauchy, espaces métriques complets, espaces de Banach et espaces de Hilbert, le complété d'un espace métrique

Définition

Soit (E, d) un espace métrique muni de la distance d. Une suite (x_n) d'éléments de E est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n, p \geq N$, $d(x_n, x_p) < \epsilon$.

Définition

Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente. Un espace vectoriel normé est dit complet s'il est complet en tant qu'espace métrique pour la distance associée à sa norme. Il est alors appelé espace de Banach

Une partie fermée d'un espace métrique complet est un espace métrique complet. Un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

Tout produit fini ou dénombrable d'espaces complets muni d'une des distances définies au chapitre précédent, ou d'une autre distance équivalente, est complet.

Une intersection finie de sous-espaces complets est un sous-espace complet.

Une réunion finie de sous-espaces complets est un sous-espace complet.

Définition

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel préhilbertien complet.

Proposition

Un espace métrique (E, d) est complet si et seulement si pour toute suite (F_n) de fermés non vides, décroissante pour l'inclusion, dont les diamètres (borne supérieure des distances consécutives entre deux points) tendent vers zéro, l'intersection $\cap_n^\infty F_n$ contient un point et un seul.

Démonstration

Si (E,d) possède cette propriété, toute suite de Cauchy x_n est convergente car il suffit de prendre la suite décroissante de fermés $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, ...\}}$. Réciproquement, si (E,d) est complet et si F_n est une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro, on peut prendre un point x_n dans chaques fermés F_n. La suite x_n est de Cauchy. Sa limite est l'unique point de l'intersection $\cap_n F_n$.

On supposera déjà connu du lecteur les exemples de R et des espaces R^n comme espaces métriques complets (par rapport à leurs distances canoniques). On va considérer avec plus de soin l'exemple de l'espace des fonctions continues $C^0(\Delta, E)$ définies sur un intervalle fermé borné $\Delta = [a,b]$ de R à valeurs dans un espace métrique complet (E,d). On munit cet espace de la distance $d(f,g) = \mathbf{Sup}_{x\in\Delta} d(f(x), g(x))$ appelée distance de la convergence uniforme.

Proposition

L'espace métrique $C^0(\Delta, E)$ est complet.

Démonstration

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $C^0(\Delta, E)$. Pour tout $x \in \Delta$, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de E. Elle converge donc vers un élément $f(x)$ de E. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n, p > N$ on ait

$$\mathbf{Sup}_{x\in\Delta} d(f_n(x), f_p(x)) < \epsilon.$$

Donc, en passant à la limite $p \to +\infty$, on obtient

$$\mathbf{Sup}_{x\in\Delta} d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon.$$

Il s'ensuit que la suite de fonctions continues f_n converge uniformément vers la fonction f et que la fonction f appartient à l'espace $C^0(\Delta, E)$.

Noter que l'espace métrique $X =]-1, +1[$ est homéomorphe en tant qu'espace topologique à la droite réelle mais qu'il n'est pas complet. La propriété d'être complet n'est donc pas un invariant topologique.

Proposition

Soit E un espace métrique et soit $A \subset E$. Soit $f : A \to Y$ une application uniformément continue sur A à valeurs dans un espace métrique complet Y. Il existe une unique extension $f : \overline{A} \to Y$ à l'adhérence de A qui est uniformément continue.

Démonstration

Soit a un élément de $\overline{A}$. Il existe une suite a_n d'éléments de A qui converge vers a. Soit $\epsilon > 0$, comme f est uniformément continue, il existe δ tel que quelque soit (x, y) dans A, on ait $d(x, y) \leq \delta$ implique $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$. Soit (a_n) une suite de Cauchy de A, alors il existe N tel que pour tout n, p plus grands que N, $d(a_n, a_p) \leq \delta$. On a donc

$$d(f(a_n, a_p) \leq \epsilon.$$

Il s'ensuit que $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy, et comme Y est complet, elle est convergente. Si on considère donc une suite a_n convergente vers a, on peut définir une extension de f par $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Cette extension est bien définie, car si b_n est une autre suite qui tend vers a, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. En fait on a plus précisément que si on a deux suites $a_n \to a$ et $b_n \to b$, la continuité uniforme de f sur A implique que pour tout ϵ, il existe δ tel que $d(a_n, b_n) \leq \delta$ implique $d(f(a_n, f(b_n) \leq \epsilon$ et ceci entraine en passant à la limite que $d(a, b) \leq \delta$ implique $d(f(a), f(b)) \leq \epsilon$. Ceci démontre la continuité uniforme de l'extension.

Théorème

Soit X un espace métrique. Il existe un espace métrique complet Y et une isométrie $f : X \to Y$ telle que l'image $f(X)$ est dense dans Y. Cet espace est unique à une isométrie près et il s'appelle le complété de X. Dans le cas où X est un espace vectoriel normé, l'espace Y est aussi un espace vectoriel normé et l'injection i est de plus linéaire.

Démonstration

On démontre d'abord l'unicité. Si on suppose l'existence de deux espaces Y et Y' et de deux isométries $f : X \to Y$ et $g : X \to Y'$ d'images denses respectivement dans Y et dans Y'. L'application composée $gof^{-1} : f(X) \to Y'$ est une isométrie. Elle est donc uniformément continue et se prolonge à l'adhérence de $f(X)$, qui est Y, en une application uniformément continue. On vérifie facilement que c'est une isométrie. L'image de cette application est complète, donc fermée. Comme, par ailleurs l'image est partout dense, cette isométrie est surjective. On obtient ainsi que les deux espaces Y et Y' sont isométriques.

Soit E l'espace des suites de Cauchy d'éléments de X. On dit que deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$. On désigne par Y l'espace E quotient par cette relation d'équivalence. On munit Y de la distance suivante : si l'élément a de Y est représenté par une suite de Cauchy (a_n), l'élément b représenté par la suite de Cauchy (b_n), on pose $d'(a, b) = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. On peut facilement vérifier que cette quantité dépend seulement de la classe d'équivalence des suites de Cauchy et que c'est une distance. On construit une isométrie $f : X \to Y$ en associant à l'élément $x \in X$ la classe d'équivalence de la suite de Cauchy constante égale à x. On vérifie aisément que $f(X)$ est dense dans Y. Soit maintenant (y_n) une suite de Cauchy de Y. On peut toujours, en prenant un représentant quelconque de y_n par une suite de Cauchy (y_{nk}), et en prenant une suite extraite, supposer que ce représentant satisfait

$$d(y_{nm}, y_{np}) \leq 2^{-n},$$

pour $m, p \geq n$. La suite diagonale (y_{nn}) est alors de Cauchy parce que

$$d(y_{nn}, y_{mm}) \leq d(y_{nn}, y_{np}) + d(y_{np}, y_{mp}) + d(y_{mp}, y_{mm}).$$

Il est facile de vérifier que la classe de la suite de Cauchy (y_{nn}) est la limite de la suite de Cauchy (y_n) pour la distance d'.

Par exemple, on désigne dans la suite l'espace $L^p([a, b], R^n)$ comme le complété de $C^0([a, b], R^n)$ pour la norme L^p étudiée précédemment.

Le théorème du point fixe

Définition

Soit E un espace métrique, une application $f : E \to E$ est une contraction s'il existe une constante $K,\ 0 < K < 1$, telle que pour tout x, y de E

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y).$$

Théorème

Si l'espace métrique E est complet et si $f : E \to E$ est une contraction, alors f a un unique point fixe.

Démonstration

Soit x un élément quelconque de l'espace E qui n'est pas un point fixe, on forme la suite des itérés successifs de x par f

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), ..., f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), ...$$

Le fait que f soit une contraction implique les majorations suivantes

$$d(f^n(x), f^p(x)) \leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + ... + d(f^{p+1}(x), f^p(x)) \leq$$

$$[K^{n-1} + ... + K^p]d(f(x), x).$$

La suite $1 + ... + K^n$ est convergente donc est une suite de Cauchy. Il existe donc pour tout ϵ, un entier N tel que si $n, p \geq N$

$$K^{n-1} + ... + K^p < \frac{\epsilon}{d(f(x), x)}.$$

La suite des itérés est donc une suite de Cauchy et elle converge vers un point p. Comme on a

$$d(f(p), p) = \mathrm{Lim}_{n \to \infty} d(f^{n+1}(x), f^n(x)) = 0,$$

le point p est un point fixe de f. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts p et p'. L'inégalité

$$d(f(p), f(p')) \leq K d(p, p'),$$

est alors en contradiction avec l'hypothèse $0 < K < 1$.

Le théorème du point fixe a de nombreuses applications à l'analyse fonctionnelle. On en donne un premier exemple avec la proposition suivante.

Proposition

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to M_n(R)$, $K : (x,t) \to K(x,t)$, une fonction continue à valeurs dans les matrices carrées d'ordre n et soit $\phi : [a,b] \to R^n$ une application continue. Pour λ suffisamment petit, il existe une unique solution $f \in C^0([a,b], R^n)$ à l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \phi(x).$$

Démonstration

On considère l'espace vectoriel normé complet $E = C^0([a,b], R^n)$ muni de la norme (et donc de la distance associée) $\| \|_\infty$. L'application $T : E \to E$ définie par

$$T(f)(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \phi(x),$$

satisfait

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \lambda M |a - b| \|f - g\|_\infty,$$

avec $M = \mathbf{Sup}_{x \in [a,b] \times [a,b]} \|K\|_\infty$. Si λ est suffisamment petit, on a donc que T est une contraction. L'unique point fixe de T donné par le théorème du point fixe est une solution de l'équation fonctionnelle.

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles

Lemme

Soit E un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle que l'itérée d'ordre n de f, f^n, est une contraction. L'application f admet un point fixe.

Démonstration

L'application f^n est une contraction et donc elle admet un point fixe p. Le point p est en fait aussi un point fixe pour l'application f, en effet

$$f(f^n(p)) = f(p) = f^n(f(p))$$

implique par l'unicité du point fixe,

$$f(p) = p.$$

Définition

Une application $f : \overline{\Omega} \to R^n$, où Ω est un ouvert de $R^n \times R$ est dite lipchitzienne de rapport K, par rapport à la première variable, s'il existe une constante K telle que pour tout (x,t) et (y,t) de $\overline{\Omega}$,

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \leq K\|x - y\|$$

.

Théorème

Soit $f : \overline{\Omega} \to R^n$ une application continue définie sur l'adhérence de $\Omega = B_b \times I_a$, $B_b = \{x \in R^n, \|x - x_0\| < b\}$, $I_a = \{t \in R, |t| < a\}$, qui est lipschitienne de rapport K par rapport à la première variable. Il existe une unique solution à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),$$

telle que $x(0) = x_0$, qui existe au moins sur l'intervalle I_α, $\alpha = \mathrm{Min}(a, \frac{b}{M})$ avec $M = \mathrm{Sup}_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f\|$.

Démonstration

On introduit l'espace métrique complet $E = C^0(\overline{I}_\alpha, \overline{B}_b)$ muni de la distance de la convergence uniforme

$$d(\phi_1, \phi_2) = \mathrm{Sup}_{t\in\overline{I}_\alpha}\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|.$$

Etant donné $\phi \in E$, on définit $F(\phi) : \overline{I}_\alpha \to R^n$ par

$$F(\phi)(t) = x_0 + \int_0^t f(\phi(s), s)ds.$$

On obtient la majoration suivante

$$\|F(\phi)(t) - x_0\| \leq \int_0^t \|f(\phi(s), s)ds\| \leq M.\frac{b}{M} = b.$$

L'application F peut donc être définie de l'ensemble E dans lui-même. On écrit ensuite l'inégalité

$$\|F(\phi(t)) - F(\psi(t))\| \leq \int_0^t \|f(\phi(s), s) - f(\psi(s), s)\| ds$$

$$\leq K \int_0^t \|\phi(s) - \psi(s)\| ds$$

$$\leq Kt \|\phi - \psi\|.$$

Par récurrence sur n, on obtient

$$\|F^n(\phi)(t) - F^n(\psi)(t)\| \leq K \int_0^t \|F^{n-1}(\phi)(s) - F^{n-1}(\psi)(s)\| ds$$

$$\leq \frac{(Kt)^n}{n!} \|\phi - \psi\|.$$

On obtient ainsi pour les itérés successifs de F la majoration

$$\|F^n(\phi) - F^n(\psi)\| \leq \frac{(K.\alpha)^n}{n!} \|\phi - \psi\|.$$

Comme la fonction factorielle croit plus vite que l'exponentielle, un certain itéré de F est une contraction. D'après le lemme ci-dessus, il existe un unique point fixe pour l'application F et ce point fixe est la solution de l'équation différentielle cherchée

$$\phi(t) = x_0 + \int_0^t f(\phi(s), s) ds.$$

Le théorème de projection dans les espaces de Hilbert

Soit E un espace préhilbertien et $A \subset E$ une partie convexe et complète de E.

Théorème

Pour tout point $x \in E$, il existe un unique point $p_A(x) \in A$ tel que $\|x - p_A(x)\| = \text{Inf}_{y\in A}\|x - y\|$. Cet unique point s'appelle la projection de x sur A.

Démonstration

Soit m la borne inférieure des distances de x à un point y de A,

$$m = \text{Inf}_{y\in A}\|x - y\|.$$

On peut construire une suite d'élément $x_n \in A$ telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$,

$$\|x_n - x\|^2 \leq m^2 + \frac{\epsilon^2}{4}.$$

L'égalité du parallélogramme implique

$$\|x_n - x_p\|^2 = 2(\|x_n - x\|^2 + \|x_p - x\|^2) - \|x_n + x_p - 2x\|^2.$$

Comme A est convexe, le milieu $\frac{x_n+x_p}{2}$ appartient à A. On a donc

$$\|x_n + x_p - 2x\|^2 \geq 4m^2,$$

et on obtient que si $n, p \geq N$,

$$\|x_n - x_p\|^2 \leq 2(2m^2 + \frac{\epsilon^2}{2}) - 4m^2 = \epsilon^2.$$

La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy de A et, comme A est complet, elle converge vers un point noté $p_A(x)$.

Si on suppose qu'il existe deux points distincts y et y' de A qui vérifient

$$\|x - y\| = \|x - y'\| = m,$$

l'égalité du parallélogramme implique

$$\|y - y'\|^2 = 2(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2) - \|y + y' - 2x\|^2,$$

soit

$$\|y - y'\|^2 = 4m^2 - \|y + y' - 2x\|^2.$$

Comme A est convexe, $\frac{y+y'}{2} \in A$ et

$$\|y + y' - 2x\|^2 \geq 4m^2,$$

implique $\|y - y'\|^2 = 0$, et donc $y = y'$.

La propriété de Baire

Définition

On dit qu'un espace topologique E est de Baire, si pour toute suite (U_n) d'ouverts partout denses, l'intersection $\cap_n U_n$ est encore partout dense. Il revient au même de supposer que si F_n est une suite de fermés d'intérieur vide, la réunion $\cup_n F_n$ est aussi d'intérieur vide.

Théorème

Tout espace métrique complet est de Baire.

Démonstration

Soit (E, d) un espace métrique complet et $(U_n$ une famille dénombrable d'ouverts partout denses. Soit U un ouvert non vide de E, puisque U_1 est partout dense, l'ouvert $U \cap U_1$ est non vide. Il contient donc une boule fermée $\overline{B}(x_0, r_0)$ et on peut supposer que $0 < r_0 < 1$. Puisque U_2 est partout dense, l'ouvert $B(x_0, r_0) \cap U_2$ est non vide et donc il contient une boule fermée $\overline{B}(x_1, r_1)$ et on peut supposer $0 < r_1 < 1/2$. De proche en proche, on construit une suite de boules fermées

$$... \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset ... \subset \overline{B}(x_0, r_0),$$

telle que $0 < r_n < 2^{-n}$ et $\overline{B}(x_n, r_n) \subset U \cap (\cap_{i=1,...,n} U_i$. L'espace étant complet, l'intersection des boules fermées de rayon tendant vers 0 est non vide. Il s'ensuit que n'importe quel ouvert U non vide rencontre $\cap_{n=0}^{\infty} U_n$ et donc que l'espace est de Baire.

Applications linéaires continues

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes

(i) L'application f est continue en $0 \in E$,

(ii) il existe une constante M telle que $\|f(x)\| \leq M.\|x\|$, pour tout $x \in E$,

(iii) l'application f est uniformément continue.

Démonstration

Soit $f : E \to F$, une application linéaire continue en 0. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\| \leq \delta$, alors $\|f(x)\| \leq \epsilon$. Soit donc un élément $x \neq 0$ quelconque, on a $\|f(\delta x/\|x\|)\| \leq \epsilon$. Ceci implique l'existence d'une constante $M = \frac{\epsilon}{\delta}$ telle que pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\| \leq M.\|x\|.$$

Il s'ensuit que f est uniformément continue. Réciproquement, si f est uniformément continue, elle est bien sûr continue en 0.

Proposition

Soit $E = R^n$ muni de la norme $\|x\| = \text{Max}_{i=1}^n |x_i|$, toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

Démonstration

Soit e_i, $i = 1, ..., n$ la base canonique de R^n. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|f(x)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i\| \leq (\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|)\|x\|.$$

Il s'ensuit que f est continue.

Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes à une variable muni de la norme

$$\|P\| = \text{Sup}_{x\in[0,1]}|P(x)|.$$

Soit a un nombre réel n'appartenant pas au segment $[0, 1]$, il est facile de vérifier que l'application linéaire $T_a : E \to R$

$$T_a(P) = P(a),$$

n'est pas continue.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue entre les espaces vectoriels normés E et F. On définit

$$\|f\| = \text{Sup}_{x\in E,\ \|x\|\leq 1}\|f(x)\|$$

, et on vérifie facilement que ceci définit une norme. On désigne dans la suite par $L(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F muni de cette norme.

Définition

Dans un espace vectoriel normé, une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite normalement convergente si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ est convergente.

Proposition

Dans un espace de Banach, une série normalement convergente est convergente.

Démonstration

Ceci résulte de suite de l'inégalité sur les sommes partielles :

$$\|\sum_{k=n}^{p} u_k\| \leq \sum_{k=n}^{p} \|u_k\|$$

.

Algèbres de Banach

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que l'espace F est complet, alors l'espace $L(E, F)$ est complet.

Démonstration

Soit f_n une suite de Cauchy de $L(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \|x\|.$$

Il s'ensuit que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy de F. Elle est convergente et on désigne par $f(x)$ sa limite. En passant à la limite, il est facile de vérifier que l'application $x \mapsto f(x)$ est linéaire. On peut ensuite vérifier que la suite de nombres réels $\|f_n\|$ est une suite de Cauchy et donc qu'elle converge vers une certaine limite notée M. On obtient alors en passant à la limite sur m que

$$\|f_n(x)\| \leq (M+\epsilon)\|x\|,$$

pour tout $x \in E$ et donc que l'application linéaire $f : E \to F$ est continue. Il est alors facile de vérifier que la suite f_n converge vers f au sens de la norme sur $L(E,F)$.

Proposition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés. Soit $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$, alors l'application composée gof appartient à $L(E,G)$ et de plus

$$\|gof\| \leq \|g\|\|f\|.$$

Démonstration

Ceci résulte facilement de l'inégalité

$$\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|.$$

Définition

Une algèbre de Banach est une algèbre qui est aussi un espace vectoriel normé complet et qui vérifie

$$\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Par exemple, si E est un espace de Banach, l'espace $L(E,E)$ des applications linéaires de E dans lui-même est une algèbre de Banach pour le produit de composition.

Théorème

Dans une algèbre de Banach E muni d'un élément unité, il existe un voisinage de l'unité qui est formé d'éléments inversibles.

Démonstration

On note I l'élément unité de l'algèbre. Soit A un élèment de E qui satisfait $\|I - A\| < 1$.

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(I - A)^n$$

est normalement convergente donc convergente et sa somme est l'inverse de l'élément A.

Corollaire

On considére deux espaces de Banach E et F l'ensemble $Isom(E, F)$ formé des applications linéaires continues et inversible de E dans F est un ouvert de l'espace de Banach $L(E, F)$.

Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème

Soit $T_k : E \longrightarrow F$ une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach E à valeur dans un espace vectoriel normé F. On suppose que la suite T_k converge ponctuellement, c'est à dire que pour tout élément $x \in E$ la suite $T_k(x)$ converge vers un élément de F nôté $T(x)$. Alors l'application $x \mapsto T(x)$ est une application linéaire continue de E dans F.

Démonstration

On considère les ensembles $E(n) = \{x \in E \mid\mid T_k(x) \mid\mid \leq n\}$, pourtout $k = 1, ...$ Ce sont des fermés de E puisque les T_k sont continues et qu'une intersection de fermés est un fermé. La réunion de ces fermés constitue l'ensemble E lui-même parce que pour tout x la suite $T_k(x)$ est bornée. Cette réunion est donc d'intérieur non vide. D'après le fait qu'un espace vectoriel normé complet possède la propriété de Baire, il suit que l'un des $E(n)$ est d'intérieur non vide. Il existe donc un N pour lequel $E(N)$ contient une boule $B(x_0, r)$. Il en résulte que pour tout $x \in E$ tel que $\mid\mid x \mid\mid \leq r$, et pour tout k,

$$\mid\mid T_k(x) \mid\mid \leq \mid\mid T_k(x + x_0) \mid\mid + \mid\mid T_k(x_0) \mid\mid \leq$$

$$N + \text{limsup}_k \mid\mid T_k(x_0) \mid\mid = M.$$

Il s'en suit que pour tout entier k et tout $x \in E$

$$\mid\mid T_k(x) \mid\mid \leq M/r.$$

Il s'en suit que l'application linéaire T définie par $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$ satisfait pour tout x de norme 1,

$$\mid\mid T(x) \mid\mid \leq M/r.$$

Elle est donc continue.

Remarque

Dans les conditions du théorème, la suite T_k ne converge pas nécessairement au sens de la norme de $L(E, F)$. Soit, par exemple, $E = L^1$, l'espace des suites réelles $x = (x_n, n \in N)$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid < +\infty$ muni de la norme

$\| x \| = \sum_{n=1}^{\infty} | x_n |$. La suite d'applications linéaires continues $T_k : L^1 \to R$ définie par $T_k(x) = x_k$ vérifie $\| T_k \| = 1$ et pour tout x la suite $T_k(x)$ converge vers 0.

Théorème de l'application ouverte, théorème de Banach et théorème du graphe fermé

Lemme

Une application linéaire f d'un espace vectoriel normé E dans un autre espace vectoriel normé F est ouverte si et seulement s'il existe une boule ouverte B de E telle que l'image $f(B)$ soit d'intérieur non vide dans F.

Démonstration

Si f est ouverte, pour toute boule ouverte B de E, l'image $f(B)$ est ouverte et donc d'intérieur non vide. Réciproquement, on suppose qu'il existe une boule B de E qui soit telle que $f(B)$ est d'intérieur non vide. Il existe donc une boule $B(x_0, r)$ et une boule $B(y_0, \rho)$ telles que $B(y_0, \rho) \subset f(B(x_0, r))$. On a donc que pour tout y tel que $\| y - y_0 \| < \rho$, il existe $x \in B(x_0, r)$ tel que $y = f(x)$. En particulier, il existe x_1 tel que $\| x_0 - x_1 \| < r$ tel que $y_0 = f(x_1)$. Soit y tel que $\| y \| < \rho$, alors $y + y_0 \in B(y_0, \rho)$, et donc il existe $x \in B(x_0, r)$ tel que $y + y_0 = f(x)$. Mais alors, $y = f(x) - y_0 = f(x - x_1)$ et il existe $z = x - x_1$ tel que

$$\| z \| \leq \| x - x_0 \| + \| x_0 - x_1 \| < 2r.$$

Il s'en suit que

$$B(0, \rho) \subset f(B(0, 2r)).$$

Par homogénéité, on peut choisir arbitrairement a et vérifier que pour n'importe quelle boule $B(0, a)$, il existe $\alpha = \frac{a\rho}{2r}$ tel que

$$B(0, \alpha) \subset f(B(0, a)).$$

Soit maintenant x un point quelconque de E et $y = f(x)$. On considère une boule quelconque centrée en x de rayon a. Soit $y_0 \in B(y, \alpha)$. Alors $-y + y_0 \in B(0, \alpha)$ et donc il existe $X \in B(0, a)$ tel que $-y + y_0 = f(X)$ et $y_0 = y - y + y_0 = f(x + X)$. Comme $x + X \in B(x, a)$, $y_0 \in f(B(x, a))$. Il s'ensuit que

$$B(y, \alpha) \subset f(B(x, a)).$$

Soit U un ouvert quelconque non vide de E. Soit $y \in f(U)$ et $x \in U, y = f(x)$. Comme U est ouvert, il existe une boule ouverte $B(x, a) \subset U$ f. On sait qu'il existe alor ρ tel que $B(y, \rho) \subset f(B(x, a)) \subset f(U)$. L'image $f(U)$ est donc ouverte et l'application f est ouverte.

Théorème de l'application ouverte

Soient E et F deux espaces de Banach. Toute application linéaire continue et surjective f de E sur F est ouverte.

Démonstration

Soit $B = B(0, 1)$ la boule ouverte de E centrée en 0 de rayon 1. Comme f est surjective, $F = \cup_{n \in N} \overline{f(B(0, n))}$. D'après le théorème de Baire, il existe donc un n tel que $\overline{f(B(0, n))}$ est d'intérieur non vide. Mais toutes les boules $B(0, n)$ sont homéomorphes et donc on peut supposer que $\overline{f(B)}$ est d'intérieur non vide. Soit donc $y_0 \in F$, $r > 0$, tels que $B(y_0, r) \subset \overline{f(B)}$.

Soit $y \in B(0,r) \subset F$, il existe deux suites $x_n \in B$ et $x'_n \in B$ telles que $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n = y_0$ et $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x'_n = y_0 + y$. On a donc $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}(x_n - x'_n) = y$ et

$$B(0,r) \subset \overline{f(B(0,2))},$$

soit, par homothétie,

$$B(0,r/2) \subset \overline{f(B)}.$$

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et $y_1 \in B(0,\epsilon r/2)$, il existe $x_1 \in B(0,\epsilon)$ tel que

$$\|y_1 - f(x_1)\| < \epsilon r/2.$$

De même, pour $y_2 = y_1 - f(x_1)$, il existe $x_2 \in B(0,\epsilon^2)$ tel que

$$\|y_2 - f(x_2)\| < \epsilon^2 r/2.$$

On forme ainsi de proche en proche, pour $y_n = y_{n-1} - f(x_{n-1})$, une suite x_n telle que $\|x_n\| \leq \epsilon^n$ et $\|f(x_n) - y_n\| \leq \epsilon^n r/2$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est normalement convergente et donc convergente puisque E est complet. Soit x sa somme, on a obtenu

$$\|x\| < \epsilon/1-\epsilon, \qquad f(x) = y_1.$$

Ceci démontre que

$$B(0,\epsilon r/2) \subset f(B(0,\epsilon/1-\epsilon)),$$

et donc que l'application f est ouverte.

Théorème de Banach

Une application linéaire continue et bijective d'un espace de Banach E sur un autre espace de Banach F est un homéomorphisme.

Démonstration

En effet d'après le théorème de l'application ouverte, son inverse est continue.

Théorème du graphe fermé

Une application linéaire d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est continue si et seulement si son graphe $F = (x, f(x))$ est une partie fermée de $E \times F$.

Démonstration

Si f est continue, son graphe est fermé parce que c'est l'image réciproque de l'origine par l'application continue $g : E \times F \to F$, donnée par $(x, y) \mapsto y - f(x)$. Réciproquement, on suppose que le graphe de f est fermé. Le graphe G est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$, qui est complet. C'est donc un espace de Banach. La restriction à G de la projection canonique de $E \times F$ sur E est une application linéaire continue et bijective de G sur E. D'après le théorème de Banach, l'inverse de cette application $x \mapsto (x, f(x))$ est continue. Sa composée avec la projection de G sur F, c'est-à-dire f, est donc continue.

Chapitre III

Espaces compacts

Espace topologique compact, propriété de Borel-Lebesgue

Définition

Un espace topologique est dit compact s'il est de Hausdorff et s'il vérifie la propriété, dite propriété de Borel-Lebesgue, que de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Une partie d'un espace topologique E est dite compacte si, munie de la topologie induite par celle de E, c'est un espace topologique compact.

La propriété est équivalente au fait que si une famille de fermés F_i est d'intersection vide, alors il existe une sous-famille finie qui est aussi d'intersection vide.

Proposition

Un intervalle fermé borné $[a, b]$ de la droite réelle est une partie compacte.

Démonstration

Soit $U_{i \in I}$ une famille d'ouverts qui recouvre l'intervalle $[a, b]$. Il existe un indice $i_a \in I$ tel que $a \in U_{i_a}$. U_{i_a} est un ouvert, et donc il existe un intervalle $[a, a+\epsilon]$ contenu dans U_{i_a}. Soit C l'ensemble des éléments x de $[a, b]$ tels que l'intervalle $[a, x]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement. On sait que dans R, tout ensemble non vide majoré admet une borne supérieure. Soit c la borne supérieure de C. Il existe un ouvert U_{i_c} qui contient c. Cet ouvert contient en fait un intervalle $]c-\epsilon_0, c+\epsilon_0[$. Par définition de la borne supérieure, il existe un élément de C dans cet intervalle. Donc, il s'ensuit qu'il existe un nombre fini d'ouverts du recouvrement qui recouvrent $[a, c]$ et c appartient à C. Supposons que $c \neq b$. Pour ϵ suffisamment petit, le point $c+\epsilon$ appartient à l'intervalle $[a, b]$ et si $\epsilon < \epsilon_0$, l'intervalle $[a, c+\epsilon]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement et on a une contradiction puisque c ne serait pas la borne supérieure de C.

Proposition

Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.

Démonstration

Soit $K \subset E$ une partie compacte d'un espace topologique séparé E. Soit $a \in E - K$ et $x \in K$, il existe un voisinage ouvert V_x de a et un voisinage U_x de x d'intersection vide. L'ensemble des $U_x, x \in K$ forme un recouvrement par des ouverts de K. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $U_{x_i}, i = 1, ..., N$. L'intersection finie des ouverts $V_{x_i}, i = 1, ..., N$ est un ouvert de E qui ne rencontre aucun des ouverts U_{x_i}. Il ne rencontre a fortiori pas K. Le complémentaire $E - K$ est donc ouvert et K lui-même est une partie fermée de E.

Proposition

Un sous-ensemble fermé A d'un espace topologique E compact est compact.

Démonstration

On exprime la propriété de Borel-Lebesgue avec les fermés. Soit $\Phi_i = F_i \cap A, i \in I$ une famille de fermés de A traces des fermés F_i de E. On suppose que l'intersection $\cap_{i \in I} \Phi_i$ est vide. Comme A est fermée, les Φ_i sont aussi des fermés de E. Comme E est compact, on peut extraire une sous-famille finie $J \subset I$ qui satisfait $\cap_{j \in J} \Phi_j = \emptyset$. La partie A est de plus séparée parce que E est séparé. Il suit que A est compacte.

Proposition

Dans un espace topologique séparé une intersection quelconque de parties compactes est compacte.

Démonstration

En effet cette intersection est fermée dans un compact.

Proposition

Dans un espace topologique séparé, une union finie de parties compactes est une partie compacte.

Démonstration

Soit $(U_i, i \in I)$ un recouvrement par des ouverts de cette réunion. Il forme en particulier, pour chacune des parties, un recouvrement de la partie compacte. On peut ainsi pour chaque partie en extraire un sous-recouvrement fini. La réunion finie de l'ensemble des parties détermine une union finie d'ouverts du recouvrement initial qui recouvre la réunion des parties.

Proposition

Les sous-ensembles compacts de R sont les ensembles fermés et bornés.

Démonstration

D'après la définition, une partie compacte peut-être recouverte avec un nombre fini de boules. Elle est donc bornée. D'après l'une des propriété énoncées ci-dessus, elle est aussi fermée. Réciproquement, si une partie est fermée est bornée, elle est contenue dans une intervalle fermé et borné, donc dans un compact. Comme elle est fermée, elle est aussi compacte.

Proposition

Soit E un espace topologique compact et (x_n) une suite d'éléments de E. La suite possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration

Soit (x_n) une suite de E. On considère la famille d'ensembles fermés

$$F_n = \overline{\{x_m, m \geq n\}}.$$

Toute sous-famille finie de cette famille est d'intersection non vide (parce que ces ensembles sont emboités les uns dans les autres). On en déduit que l'intersection de tous les F_n est non vide. Un élément de cette intersection est une valeur d'adhérence de la suite.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application continue d'un espace topologique E à valeur dans un espace topologique séparé F. Soit K une partie compacte de E. Alors l'image $f(K)$ est un compact de F.

Démonstration

Soit $U_{i \in I}$ un recouvrement par des ouverts de l'ensemble $f(K)$. Les images inverses par f des ouverts de ce recouvrement forment un recouvrement de K. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini (correspondant à un sous-ensemble fini $J \subset I$). La famille finie d'ouverts $U_{i \in J}$ forme un sous-recouvrement fini de $f(K)$ extrait du recouvrement initial. Comme de plus $f(K)$ est séparé puisqu'un sous-espace topologique d'un espace séparé est séparé, il s'en suit que $f(K)$ est compact.

Corollaire

Une fonction continue $f : K \to R$ définie sur un ensemble compact et à valeur réelle est bornée et atteint ses bornes.

Le théorème de Tychonoff

Théorème

Un produit $\Pi_{i \in A} E_i$ d'espaces topologiques compacts E_i muni de la topologie produit est compact.

On fait la démonstration dans le cas d'un produit fini.

Démonstration

On se ramène au cas de deux espaces E_1 et E_2. Il est tout d'abord facile de vérifier que $E_1 \times E_2$ est séparé si et seulement si E_1 et E_2 le sont. Soit $O_{i \in I}$ un recouvrement du produit $E_1 \times E_2$. Chaque ouvert O_i est une réunion d'ouverts élémentaires de la forme $U \times V$, avec U ouvert de E_1 et V ouvert de E_2. Soit b un élément de E_2, l'ensemble $E_1 \times \{b\}$ est homéomorphe à E_1 et il est donc compact. On peut donc extraire un sous-recouvrement fini par des ouverts élémentaires $U_{1,b} \times V_{1,b}, ..., U_{k(b),b} \times V_{k(b),b}$ de $E_1 \times \{b\}$ de la famille de tous les ouverts élémentaires dont les O_i sont réunion, dont les intersections avec $E_1 \times \{b\}$ sont non vides. Chacun des $U_{l,b} \times V_{l,b}$ est contenu dans un des ouverts O_i que l'on notera $O_{i(l,b)}$. Les ouverts $V_{l,b}$ contiennent tous b. Il en est donc de même de leur intersection $V'_b = \cap_{i=1}^{k(b)} V_{l,b}$. Lorsque b parcours E_2, V'_b forme un recouvrement de l'espace compact E_2 dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $V'_{b_1}, ...V'_{b_p}$. On voit alors que les $O_{i(l_m,b_m)}$ pour $1 \leq m \leq p$, $1 \leq l_m \leq k(b_m)$ forment un sous-recouvrement fini de $E_1 \times E_2$ du recouvrement initial.

Caractérisation des compacts de R^n, équivalence des normes sur R^n

Théorème

Les parties compactes de R^n sont les parties fermées et bornées.

En effet, d'après la définition d'une partie compacte, elle peut être recouverte par un nombre fini de boules, et comme elle est fermée, une partie compacte est nécessairement fermée et bornée. Réciproquement, une partie fermée et bornée peut être considérée comme une partie fermée d'un produit d'intervalles fermés bornés. D'après le théorème précédent, un produit d'intervalles fermés bornés est compact et un fermé dans un compact est compact.

Corollaire

Soit $f : K \to R^n$ une fonction continue définie sur un ensemble compact K. La fonction f est bornée sur K et elle atteint ses bornes sur K.

L'image de K doit être un sous-ensemble compact de R^n et donc une partie fermée et bornée.

Théorème (Riesz)

Sur R^n, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration

Considérons une norme quelconque $\|\|$ sur R^n et la norme particulière définie par

$$\| x \|_\infty = \mathrm{Max}_{i=1}^n \mid x_i \mid, \;\; x = (x_1, ..., x_n).$$

On désigne par $e_i, i = 1, ..., n$ la base canonique de R^n. Soit x un élément quelconque de R^n, on écrit :

$$\| x \| = \| \sum_{i=1}^n x_i e_i \| \leq k' \mid x \|_\infty,$$

avec $k' = \sum \| e_i \|$. Ceci démontre que l'application $\|\|$: $R^n \to R$ où R^n est muni de la topologie définie par la norme $\|\|_\infty$ est Lipschitzienne donc continue. On désigne par $S = \{x \in R^n, \| x \|_\infty = 1\}$ la sphère unité pour la norme $\|\|_\infty$. Il s'agit d'un ensemble fermé et borné, donc compact. La fonction continue $\|\|$ est donc bornée sur S et elle y atteint ses bornes. Il existe donc $k > 0$ tel que

$$\| \frac{x}{\| x \|_\infty} \| \geq k > 0.$$

On obtient alors que pour tout $x \in R^n$,

$$\| x \| \geq k \| x \|_\infty$$

et cei démontre l'équivalence des normes.

Espaces topologiques localement compacts

Définition

Un espace topologique E est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de E admet un voisinage compact.

Propriétés

Les parties ouvertes et les parties fermées d'un espace localement compact sont localement compactes.

Le produit d'une famille finie d'espaces localement compacts est localement compacte.

Tout espace compact est localement compact.

Les espaces R^n sont localement compacts.

Tout espace muni de la topologie discrète est localement compact.

Dans un espace séparé, l'intersection de deux parties localement compactes est localement compacte. Par contre la réunion de deux parties localement compactes n'est pas en général localement compacte.

Exemple

Dans R^2, on considère les deux sous-ensembles localement compacts $E = (0,0)$ et $F = \{(x, \frac{1}{n}), n \in N^*\}$. La réunion $E \cup F$ n'est pas localement compacte en $(0,0)$. En effet, considérons un voisinage quelconque de la forme $]-\epsilon, +\epsilon[\times]-\epsilon, +\epsilon[$ de $(0,0)$. La suite $(\frac{\epsilon}{2}, 0)$ converge vers $(\epsilon/2, 0)$ et donc elle n'admet aucune valeur d'adhérence dans $E \times F$.

Théorème

Soit E un espace topologique localement compact non compact. Il existe un espace topologique compact $\hat{E}$, et un homéomorphisme f de E sur une partie $f(E)$ partout dense de $\hat{E}$, dont le complémentaire contient un seul élément, nôté ω. On dit que $\hat{E}$ est le compactifié d'Alexandrov de E et le point ω est appelé le point à l'infini.

Démonstration

Considérons un ensemble $\hat{E}$ obtenu en prenant l'union de E avec un point ω. L'ensemble des parties de $\hat{E}$ qui sont, soit des ouverts de E, soit les complémentaires (relativement à $\hat{E}$) de parties compactes de E satisfait les axiomes des ouverts et donc définit une topologie sur $\hat{E}$. On note f l'injection canonique de E dans $\hat{E}$. On vérifie facilement que f définit un homéomorphisme de E sur son image munie de la topologie induite par celle de $\hat{E}$. De plus $f(E)$ est dense dans $\hat{E}$ car tout voisinage de ω contient une partie de $\hat{E}$ dont le complémentaire est une partie compacte de $f(E)$ donc n'est pas $f(E)$ tout entier. Soient x et y deux points de $\hat{E}$. L'un d'eux au moins (par exemple x) n'est pas égal à ω. Si $y \neq \omega$, comme E est séparé, il existe deux ouverts de E qui séparent x et y. Si $y = \omega$, x a dans E un voisinage compact K. le complémentaire de K est un voisinage de ω qui permet de séparer x et y. Soit maintenant $U_i, i \in I$ un recouvrement par des ouverts de $\hat{E}$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $\omega \in U_{i0}$. Le complémentaire K de U_{i0} est compact et contenu dans la réunion des $U_i,\ i \neq i_0$. Il existe donc une partie finie $i_1, ..., i_p$ de I telle que $K \subset U_{i1}, ..., U_{ip}$. Il s'ensuit que $\hat{E} = U_{i0} \cup U_{i1} \cup ..._{ip}$ et que $\hat{E}$ est compact.

Proposition

Soit E un espace localement compact, $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ deux espaces compacts, f_1 et f_2 des homéomorphismes de E, respectivement, sur les parties denses $f_1(E)$ de $\hat{E}_1$ et $f_2(E)$ de $\hat{E}_2$, dont les complémentaires contiennent chacun un seul élément $\omega_1 \in \hat{E}_1$ et $\omega_2 \in \hat{E}_2$. On définit l'application h suivante:

$h(x) = f_2 f_1^{-1}(x)$ si $x \in f_1(E)$, $h(\omega_1) = \omega_2$. L'application h ainsi définie est un homéomorphisme de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$.

Démonstration

L'application h est bijective par construction. Sa restriction est un homéomorphisme de l'ouvert dense $f_1(E)$ sur l'ouvert dense $f_2(E)$. Il reste à montrer que h est continue en ω_1 et que son inverse est continue en ω_2. Soit V un voisinage de ω_2. Son complémentaire K est un ensemble compact de $f_2(E)$. Le complémentaire de $h^{-1}(V)$ dans $\hat{E}_1$ est $f_1 f_2^{-1}(K)$ est l'image par l'application continue f_1 de $f_2^{-1}(K)$ qui est un compact puisque f_2 définit un homéomorphisme de E sur $f_2(E)$. Donc $h^{-1}(V)$ est un ouvert de $\hat{E}_1$ qui contient ω_1. Ce qui démontre que h est continue en ω_1. En échangeant les rôles de $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$, on démontrerait de même que h^{-1} est continue en ω_2.

Il y a, par contre d'autre façon de compactifier un espace topologique localement compact. Par exemple la compactification de R qui consiste à ajouter deux points $-\infty$ et $+\infty$ n'est pas la compactification d'Alexandrov.

Théorème

Un espace localement compact est un espace de Baire.

Démonstration

Soit E un espace localement compact. Soit V_n une famille dénombrable d'ouverts partout denses de E. Soit U un ouvert non vide de E. Puisque V_1 est partout dense, l'ouvert $U \cap V_1$ est non vide. Soit $x_1 \in U \cap V_1$, il existe un voisinage compact K_1 de x_1 contenu dans $U \cap V_1$. L'intérieur $\mathring{K}_1$ de K_1 est non vide puisque x est un point intérieur de K_1. Puisque V_2 est partout dense, $V_2 \cap \mathring{K}_1$ est un ouvert non vide; soit x_2 un point de cet ouvert et K_2 un voisinage de x_2 contenu dans $V_2 \cap \mathring{K}_1$. En répétant le raisonnement, on prouve l'existence d'une suite décroissante de compacts non vides dont l'intersection est non vide et contenue dans U. Ceci démontre que l'intersection $\cap_n V_n$ rencontre n'importe quel ouvert U. Cette intersection $\cap_n V_n$ est donc partout dense et l'espace E est un espace de Baire.

Espaces métriques compacts

Théorème

Soit E un espace métrique tel que toute suite de points de E admet une valeur d'adhérence. Soit $U_i,\ i \in I$ un recouvrement de l'espace E. Il existe un nombre ϵ tel que pour tout $x \in E$, il existe au moins un U_i tel que $B(x, \epsilon) \subset U_i$.

Définition

La borne supérieure des nombres ϵ est appelée le nombre de Lebesgue du recouvrement $(U_i,\ i \in I)$.

Démonstration

Soit $(U_i, i \in I)$ un recouvrement qui ne satisferait pas cette condition. Il existerait une suite (x_n) de points de E tels que la boule $B(x_n, 2^{-n})$ ne serait contenue dans aucun des U_i. Soit l une valeur d'adhérence de la suite. Il existe $j \in I$ tel que $l \in U_j$. Soit r tel que $B(l, r) \subset U_j$. Comme l est une valeur d'adhérence de la suite, la boule $B(l, r/2)$ contient une infinité de termes de la suite d'ordre arbitrairement élevé. Soit m un entier suffisamment grand pour qu'à la fois on ait $d(x_m, l) < r/2$ et $2^{-m} < r/2$. Soit x un point quelconque de $B(x_m, 2^{-m})$, alors $d(x,l) \leq d(x_m,l) + d(x_m,x) < r$. Donc la boule $B(x_m, 2^{-m})$ est contenue dans U_j, ce qui est une contradiction.

Théorème

Soit E un espace métrique tel que toute suite de E admet une valeur d'adhérence. Alors pour tout nombre réel $r > 0$, l'espace E peut être recouvert avec un nombre fini de boules de rayon r.

Démonstration

Soit E un espace métrique tel que toute suite (x_n) admet une valeur d'adhérence. Soit $r > 0$, $x_0 \in E$ et $B(x_0, r)$ la boule ouverte centrée en x_0 de rayon r. Soit $x_1 \in E/B(x_0, r)$, on considère un point $x_2 \in E/(B(x_1, r) \cup B(x_0, r))$, et ainsi de suite,... Si on formait une suite (x_n) infinie on obtiendrait une suite sans valeur d'adhérence. Ceci démontre que quelque soit $r > 0$, l'espace peut être recouvert avec un nombre fini de boules de rayon r.

Définition

Un espace métrique est dit totalement borné si pour tout réel r, il peut être recouvert avec un nombre fini de boules de rayon r.

Théorème

Un espace métrique E est compact si et seulement si toute suite de E possède une valeur d'adhérence.

Démonstration

Soit E un espace métrique tel que toute suite de E possède une valeur d'adhérence. Soit U_i, $i \in I$ un recouvrement par des ouverts de E. Il existe un nombre ϵ tel que pour tout $x \in E$, il existe un i_0 tel que U_{i_0} contient la boule centrée en x de rayon ϵ. On sait que l'espace peut être recouvert avec un nombre fini de boule de rayon ϵ. Ceci détermine donc un sous-recouvrement fini de E.

Corollaire

Tout espace métrique dont les boules fermées sont compactes (en particulier, tout espace métrique compact) est complet.

Démonstration

En effet une suite de Cauchy peut, à partir d'un certain rang, être contenue dans une boule fermée. Il existe donc une sous-suite convergente. Mais une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est elle-même convergente.

Espace métrique précompact

Définition

Un espace métrique E est dit précompact si son complété est compact.

Proposition

Un espace métrique est précompact si et seulement si, pour tout nombre ϵ, il peut être recouvert avec un nombre fini de boules de rayon ϵ, c'est à dire s'il est totalement borné.

Démonstration

Un espace métrique précompact peut évidemment être recouvert avec un nombre fini de boules de rayon ϵ, quelque soit ϵ parce que c'est le cas de son adhérence. Réciproquement soit (E, d) un espace métrique totalement borné. On convient d'identifier E avec une partie dense de son complété $\hat{E}$. On note $\hat{d}$ la distance définie sur le complété $\hat{E}$. Considérons une suite d'éléments (x_n) de E. Pour tout n, il existe une famille finie de boules ouvertes $B(a_{n,k}, 2^{-n}), k = 1, ..., p(n)$ qui recouvrent E. Une au moins de ces boules $B(a_{n,k(n)}, 2^{-n})$ contient une infinité de termes de la suite. Cette boule est elle-même recouverte par des boules $B(a_{n+1,k}, 2^{-n-1}), k = 1, ..., p(n+1)$ et est telle que $B(a_{n+1,k(n+1)}, 2^{-n-1}) \cap B(a_{n,k(n)}, 2^{-n})$ contienne une infinité d'éléments de la suite. De proche en proche, on construit une suite de boules telle que

$$\cap_{n=1}^{m} B(a_{n,k(n)}, 2^{-n})$$

contienne une infinité d'éléments de la suite considérée. On peut donc extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que pour tout m, $x_{\phi(m)} \in \cap_{n=1}^{m} B(a_{n,k(n)}, 2^{-n})$. La suite $(x_{\phi(n)})$ est de Cauchy et est convergente dans le complété. Si on considère maintenant une suite (y_n) d'éléments dans le complété $\hat{E}$, on peut lui associer une suite (x_n) dans E telle que $\hat{d}(y_n, x_n) \leq 2^{-n}$. D'après ce qui précéde, la suite (x_n) a une valeur d'adhérence dans $\hat{E}$. Cette valeur d'adhérence est aussi une valeur d'adhérence pour la suite (y_n).

Entropie de Kolmogoroff et dimension fractale

Soit X un espace métrique et $A \subset X$ une partie précompacte de X. Pour tout $\epsilon > 0$, on désigne par $M(\epsilon, A)$ le nombre minimum de boules ouvertes de rayon ϵ qui recouvrent A.

Définition

Le nombre réel

$$H_\epsilon(A) = \log_2(M(\epsilon, A)),$$

est appelé ϵ-entropie (ou entropie de Kolmogoroff) de A.

Définition

La dimension fractale d'une partie compacte $A \subset E$ est la limite

$$d_f(A) = \mathrm{LimSup}_{\epsilon \to 0} - H_\epsilon(A)/\log_2(\epsilon).$$

Théorème

Soit (E, d) un espace métrique compact et (F, δ) un espace métrique. Toute application continue $f : E \to F$ est uniformément continue.

Démonstration

Pour tout point x_0 de E, et pour tout ϵ, il existe $\eta = \eta(x_0)$ tel que $d(x_0, x) < \eta$ implique $\delta(f(x_0), f(x)) < \epsilon/3$. On considère le recouvrement de l'espace E formé par les boules $B(x_0, \eta(x_0)/3$. Comme l'espace est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $B(x_i, \eta_i), i = 1, ...N$. On pose $\eta = \mathrm{Inf}_{i=1,...,N}\eta_i$. Soient (x, y) deux points de E tels que $d(x, y) < \eta/3$. Il existe x_1 et x_2 tels que $d(x_1, x) < \eta_1/3$ et $d(x_2, y) < \eta_2/3$. On a

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, x_2) < \mathrm{Inf}(\eta_1, \eta_2),$$

et donc

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon/3.$$

Mais alors, on a:

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_1)) + \delta(f(x_1), f(x_2)) + \delta(f(x_2), f(y) \leq \epsilon,$$

et ceci démontre la continuité uniforme.

Par exemple, une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ est uniformément continue.

Définition

Soit $f : [0, 1] \to R$ une fonction continue à valeur réelle. Le module de continuité $\omega(\delta)$ de f est défini comme

$$\omega(\delta) = \text{Sup}\{\mid f(x) - f(y) \mid, \mid x - y \mid < \delta\}.$$

La continuité uniforme de f s'exprime aussi par le fait que

$$\text{Lim}_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0.$$

Le théorème de Bernstein-Weierstrass

Théorème (Bernstein-Weierstrass)

Soit $f : [0, 1] \to R$ une fonction continue définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles. On définit les polynômes de Bernstein de f comme

$$B_n(f) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f(\frac{i}{n}) x^i (1 - x)^{n-i}.$$

On a l'inégalité suivante

$$\text{Sup}_{x \in [0,1]} \mid B_n(f)(x) - f(x) \mid \leq \frac{3}{2} \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Ceci implique que l'espace des fonctions polynômes est dense dans $C^0([0,1],R)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration

On considère la relation

$$[\mathrm{e}^y+(1-x)]^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\mathrm{e}^{iy}(1-x)^{n-i},$$

et on la dérive deux fois par rapport à y, puis on pose $\mathrm{e}^y=x$, ceci donne

$$\sum_{i=0}^{n}C_n^i(i-nx)^2x^i(1-x)^{n-i}=nx(1-x).$$

On pose alors

$$a_i=\mid\frac{i}{n}-x\mid\sqrt{C_n^ix^i(1-x)^{n-i}},$$

$$b_i=\sqrt{C_n^ix^i(1-x)^{n-i}}.$$

De l'inégalité

$$\sum_i a_ib_i\leq(\sum_i a_i^2)^{1/2}(\sum_i b_i^2)^{1/2},$$

il vient

$$\sum_{i=0}^{n}\mid\frac{i}{n}-x\mid C_n^ix^i(1-x)^{n-i}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

On remarque alors que

$$\mid B_n(f)(x)-f(x)\mid\leq\sum_{i=0}^{n}\mid f(\frac{i}{n})-f(x)\mid C_n^ix^i(1-x)^{n-i}.$$

Il y a au plus $\mid\frac{i}{n}-x\mid\sqrt{n}+1$ intervalles de longueur $\leq 1/\sqrt{n}$ entre $\frac{i}{n}$ et x et donc

$$\mid f(\frac{i}{n})-f(x)\mid\leq(\mid\frac{i}{n}-x\mid\sqrt{n}+1)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

On obtient alors l'inégalité proposée.

On va considérer plus généralement l'espace des fonctions continues $C^0(E, F)$ définies sur un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique complet F. On munit cet espace de la distance $d(f, g) = \mathbf{Sup}_{x \in \Delta} d(f(x), g(x))$ appelée distance de la convergence uniforme.

Proposition

L'espace métrique $C^0(E, F)$ est complet.

Démonstration

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $C^0(E, F)$. Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de F. Elle converge donc vers un élément $f(x)$ de F. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n, p > N$ on ait

$$\mathbf{Sup}_{x \in E} d(f_n(x), f_p(x)) < \epsilon.$$

Donc, en passant à la limite $p \to +\infty$, on obtient

$$\mathbf{Sup}_{x \in E} d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon.$$

Il s'ensuit que la suite de fonctions continues f_n converge uniformément vers la fonction f et que la fonction f appartient à l'espace $C^0(E, F)$.

Le théorème d'Ascoli

Définition

Soit (X, d) un espace métrique. Une famille F de fonctions définies sur X à valeurs dans un espace métrique (E, δ) est dite équicontinue si pour tout ϵ et pour tout $x \in X$, il existe η_x tel que pour tout (y) de X vérifiant $d(x, y) \leq \eta_x$, on a pour toute fonction $\phi \in F$

$$\delta(\phi(x), \phi(y)) \leq \epsilon.$$

La famille est dite bornée si pour tout $x \in E$, il existe une constante M telle que pour tout $\phi \in F$,

$$\delta(\phi(x), 0) \leq M.$$

Théorème (Ascoli)

Soit (E, d) un espace métrique compact et $(F, \delta$ un espace métrique complet. Soit $A \subset C^0(E, F)$ une partie de l'espace des fonctions continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme. L'adhérence de A est une partie compacte de $C^0(E, F)$ si et seulement si A vérifie:

(i) Pour tout $x \in E$, l'adhérence dans F de $A_x = \{f(x), f \in A$ est un compact de F.

(ii) La famille A est équicontinue.

Démonstration

Supposons que l'adhérence de A soit compacte. Pour tout $x \in E$, l'application $f \mapsto f(x)$ de A dans F est continue. L'image de $\overline{A}$ est donc compacte puisque image par une application continue d'un compact. A_x est donc contenue dans un compact et son adhérence est compacte. Etant donné ϵ quelconque, l'ensemble compact $\overline{A}$ peut être recouvert avec un nombre fini de boules $B(f_i, \epsilon/3), i = 1, ..., N$. Pour tout élément $f \in A$, il existe donc un $f_i \in C(E, F)$ tel que $\sup_{x \in E} d(f(x), f_i(x)) < \epsilon/3$. Chaque f_i étant continue en $x \in E$, il existe un voisinage V_i de x tel que si $y \in V_i$, alors $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon/3$. Soit $V = \cap_{i=1}^{N} V_i$. On a alors pour tout $y \in V$,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) < 3\epsilon/3.$$

Ceci prouve que A est équicontinue en tout point $x \in E$.

Supposons maintenant que A satisfait les conditions (i) et (ii). Comme l'espace E est métrique compact, pour tout entier n, il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon $\leq 2^{-n}$. On peut ranger les centres des boules en une suite (x_n) qui forme un ensemble E' partout dense dans E. Soit $\phi_p\}$ une suite d'éléments de A. Comme A_{x_1} est compacte, on peut extraire de ϕ_p une sous-suite $\phi_{s_0(p)}$ (où s_0 est une application strictement croissante de N sur lui-même) telle que $\phi_{s_0(p)}(x_1)$ soit convergente.

On considère alors la suite des valeurs $\phi_{s_0(p)(x_2)}$ et on extrait une sous-suite $\phi_{s_1(p)}$ telle que $\phi_{s_1(p)}(x_2)$ soit convergente et ainsi de suite on fait des extractions successives de sous-suites et on forme une suite s_k d'applications strictement croissantes de N dans lui-même qui satisfont $s_{k+1}(p) \geq s_k(p)$ et telle que pour tout k la suite $\phi_{s_k(p)}$ converge en tous les points $x_1, ..., x_k$. On prend alors la suite diagonale $\phi_{s_n(n)}$ (procédé de la suite diagonale de Cantor). Cette suite de fonctions converge en tous les points de l'ensemble E'. En effet pour $x_k \in E'$, pour $n > k$ la suite $\phi_{s_n(n)(x_k)}$ est une suite extraite de $\phi_{s_k(n)(x_k)}$ qui est convergente et elle est donc convergente.

On a donc à ce point pu extraire une sous-suite que l'on notera f_n qui converge sur un sous-ensemble dense E' de E. On utilise alors le fait que la famille

A est équicontinue. Pour tout ϵ, et pour tout $x \in E$, il existe δ tel que pour tout y vérifiant $d(x,y) < \eta$, on a $\delta(f_p(x), f_q(y)) < \epsilon/3$ quelque soit p, q. Comme E' est partout dense, il existe $z \in E'$ tel que $d(x,z) < \eta$. On a donc

$$\delta(f_p(x), f_q(x)) \leq \delta(f_p(x), f_p(z)) + \delta(f_p(z), f_q(z)) + \delta(f_q(z), f_q(x).$$

La suite $f_n(z)$ est convergente donc de Cauchy et il existe N tel que si $p, q > N$, $\delta(f_p(z), f_q(z)) < \epsilon/3$. On en déduit que si $p, q > N$, $\delta(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$. La suite $f_n(x)$ est donc de Cauchy. Comme F est complet, elle est convergente et on note $f(x)$ sa limite. On utilise alors à nouveau l'équicontinuité. Pour tout ϵ, et pour tout $x \in E$, il existe η tel que si $d(x,y) < \eta$, $\delta(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon$. En passant à la limite sur n, on obtient $\delta(f(x), f(y)) \leq \epsilon$. La fonction limite est donc continue (et par conséquent uniformément continue).

Il reste à vérifier que la suite f_n converge vers f au sens de la convergence uniforme. On a déjà observé que pour tout ϵ et tout $x \in E$ il existe η_x tel que si $d(x,y) < \eta_x$ alors pour tout n $\delta(f_n(x), f_n(y)) \leq \epsilon/3$ et $\delta(f(x), f(y)) \leq \epsilon/3$. On obtient ainsi un recouvrement de E par des boules $B(x, \eta_x$. On extrait de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $B(x_i, \eta_i), i = 1, ...S$. Comme les suites $f_n(x_i)$ sont convergentes, pour tout ϵ, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$

$$\mathrm{Max}_{i=1}^{N} \delta(f_n(x_i), f(x_i)) < \epsilon/3.$$

Soit x un élément quelconque de E. Pour tout $n > N$, comme il existe au moins un x_i tel que $d(x, x_i) < \eta_i$, on a

$$\delta(f_n(x), f(x)) \leq \delta(f_n(x), f_n(x_i)) + \delta(f_n(x_i), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(x)) < \epsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $x \in E$, la convergence est uniforme.

Remarques

Dans le cas particulier $F = R^n$, les parties compactes de R^n sont les parties fermées bornées et on peut remplacer la condition A_x est d'adhérence compacte par l'hypothèse que A est bornée.

Comme l'espace F est supposé complet, l'espace $C^0(E, F)$ est aussi complet. Donc l'adhérence d'une partie A dans $C^0(E, F)$ est complet et coincide avec le complété de A. Demander que l'adhérence de A est compacte est donc équivalent à dire que A est précompacte.

Chapitre IV

Applications différentiables

Définition de la différentielle, la dérivée directionnelle, les dérivées partielles

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$.

Définition

On dit que l'application f est différentiable au point a de Ω s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que pour tout $h \in E$ suffisamment petit, on a :

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + || \ h \ || \ \epsilon(h),$$

avec $\lim_{h \to O} \epsilon(h) = 0$.

Proposition

Une telle application linéaire, si elle existe, est nécessairement unique. On la note $L = Df(a)$ et on l'appelle l'application linéaire tangente à f en a (ou la différentielle de f en a). Si f est différentiable en a, elle est continue en a.

Si une application est différentiable pour une certaine norme, elle est différentiable pour toutes les normes qui lui sont équivalentes, avec la même application linéaire tangente.

En dimension finie, $E = R^n$, $F = R^m$, l'application linéaire tangente $Df(a)$ peut être représentée par une matrice par rapport aux bases canoniques de R^n et de R^m. Cette matrice s'appelle la Jacobienne de f au point a et est notée $Jac(f)(a)$.

On dit que l'application $f : \Omega \to F$ est différentiable sur Ω si elle est différentiable en tout point $x \in \Omega$.

On dit que f est continûment différentiable ou de classe C^1 si l'application

$$Df : \Omega \to L(E, F),$$

est continue.

Si l'application Df est elle-même différentiable sur Ω, on dit que f est deux fois différentiable et on note $D^2 f = D(Df)$. Par récurrence, en définissant

$$D^k f = D(D^{k-1} f),$$

on dit que f est n fois différentiable si $D^{n-1} f$ est différentiable. L'application f est dite de classe C^n si $D^n f$ est continue. Elle est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout n.

Théorème

Soient $f : \Omega \to U$ où U est un ouvert d'un espace vectoriel normé F, $g : U \to G$. Si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $b = f(a)$, alors gof est différentiable au point a et

$$D(gof)(a) = Dg(f(a))oDf(a).$$

Si f et g sont de classe C^1, alors gof est de classe C^1.

Démonstration

On a vu au chapitre II que la composée de deux applications linéaires continues est une application linéaire continue. L'application $Dg(f(a))oDf(a)$

est donc bien linéaire et continue. Il est commode pour ce type de calcul de noter $o(h)$ une quantité qui tend plus vite vers zéro que $|| h ||$ lorsque h tend vers zéro. On pose $k = f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + o(h)$. On a

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = Dg(b)(k) + o(k).$$

On considère alors

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) - Dg(b)[Df(a)(h)] = Dg(b)[f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)] + o(k) = o(h),$$

qui donne le résultat. Si f et g sont de classe C^1, alors $x \mapsto (Df(x), Dg(f(x))$ est continue et il en est de même de la composition $Dg(f(x))oDf(x)$.

Définition

La dérivée directionnelle d'une application $f : \Omega \to F$ dans la direction h est la limite (quand elle existe) :

$$f'(x;h) = \lim_{t \to O, t \neq 0} \frac{1}{t}[f(x+th) - f(x)].$$

Proposition

Si $f : \Omega \to F$ est différentiable en $a \in \Omega$, alors pour tout $h \in E$, la dérivée directionnelle $f'(x;h)$ existe et vaut: $f'(x;h) = Df(x)(h)$.

Démonstration

Ceci résulte de l'application du théorème de différentiation des applications composées. En effet si on désigne par $c : t \mapsto c(t) = a + th$, on a

$$f'(a,h) = (foc)'(0) = Df(a)(c'(0)) = Df(a)h.$$

Réciproquement, si une application $f : \Omega \to F$ possède en un point a une dérivée directionnelle quelque soit la direction h, elle n'est pas nécessairement différentiable au point a.

Applications à valeur dans un espace produit

On se place dans le cas où $F = F_1 \mathrm{x} F_2 \mathrm{x} ... F_p$. On note $\pi_i : F \to F_i$, la projection sur la composante F_i et $c_i : F_i \to F$ l'injection canonique.

Théorème

On note $f_i = \pi_i o f$. L'application f est différentiable au point $x \in \Omega$ si et seulement si pour tout i, f_i est différentiable et on a

$$Df(x)(h) = (Df_1(x)(h), ..., Df_p(x)(h)).$$

De plus f est de classe C^k si et seulement si tous les f_i le sont.

Démonstration

Si f est différentiable, tous les $f_i = \pi_i o f$ le sont et $D(\pi_i o f) = \pi_i o Df$ par la différentiation composée et le fait que π_i est linéaire continue donc égale à son application linéaire tangente.

Si tous les f_i sont différentiables, alors

$$f = \sum_{i=1}^{p} c_i o f_i$$

est différentiable comme somme d'applications différentiables. On montre de la même façon le résultat sur la classe C^k.

Applications définies sur un espace produit

On suppose maintenant que $E = E_1 \mathrm{x} ... E_p$, Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$ et

$a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$. On définit $l_{i,a} : E_i \to E$ par $l_{i,a}(x) = (a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$. On note $\Omega_i = l_{i,a}(\Omega)$.

Définition

Si $f_{i,a}$ est différentiable au point a_i, on note $\delta_i f(a) = Df_{i,a}(a_i)$ la $i^{ème}$ différentielle partielle de f en a, elle peut aussi être notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Proposition

Si f est différentiable au point a, alors pour tout i, la dérivée partielle $\delta_i f(a)$ existe et on a

$$Df(a)(h_1, ..., h_p) = \sum_{i=1}^{p} \delta_i f(a)(h_i).$$

Si de plus, f est de classe C^1, les dérivées partielles $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sont continues sur Ω.

Démonstration

On a d'une part

$$\delta_i f(a)(h_i) = Df(a)(0, ..., h_i, 0, ..., 0),$$

et d'autre part, par linéarité

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} Df(a)(0, ..., h_i, 0, ...0).$$

Une application qui admet des dérivées partielles n'est pas nécessairement différentiable. Une application f est de classe C^1, si et seulement si elle admet des dérivées partielles continues.

Dans le cas de la dimension finie, f définie sur un ouvert Ω de R^n et à valeurs dans R^p. On sait que f est différentiable si et seulement si les f_j le sont et on a dans ce cas existence des dérivées partielles $\delta_i f_j$. La matrice Jacobienne associée est

$$Jac_{ji}(f)(a) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Différentielle de l'inversion et difféomorphismes

On considére deux espaces de Banach E et F et $Isom(E,F)$ l'ouvert de l'espace de Banach $L(E,F)$ formé des applications linéaires continues et inversible de E dans F.

Proposition

L'application $T : Isom(E,F) \to L(E,F)$ définie par $T(u) = u^{-1}$ est de classe C^∞ et son application linéaire tangente est donnée par

$$DT(u)(h) = -u^{-1}hu^{-1}.$$

Démonstration

On a

$$|| \ T(u+h) - T(u) + u^{-1}hu^{-1} \ ||=|| \ (u+h)^{-1}o(hu^{-1}h)ou^{-1} \ ||$$

$$\leq || \ (u+h)^{-1} \ |||| \ u^{-1} \ |||| \ h \ ||^2 \ .$$

On a donc que $DT(u)(h) = -u^{-1}hu^{-1}$ si on montre que cette application linéaire est continue. On peut pour cela considérer l'application

$$(u,v) \mapsto \Lambda(u,v) \in L(L(E,F), L(E,F))$$

définie par

$$\Lambda(u,v) : h \mapsto -uohov.$$

Cette application est bilinéaire et continue, donc indéfiniment différentiable. On peut alors écrire

$$DT = \Lambda o(T,T),$$

qui est continue par composition d'applications continues. On montre aussi par récurrence avec cette dernière égalité que T est de classe C^k si elle est supposée de classe C^{k-1}. Elle est donc de classe C^∞.

Définition

Un difféomorphisme est une bijection différentiable $f : U \to V$ telle que f^{-1} est différentiable.

Proposition

Si f est un difféomorphisme alors, en tout point, son application linéaire tangente satisfait

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

De plus si f est de classe C^k, alors f^{-1} est aussi de classe C^k.

En effet, la formule des différentiations composées donne

$$D(f^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1},$$

ce qui peut s'écrire

$$D(f^{-1}) = ToDfof^{-1}.$$

Cette dernière relation permet de montrer par récurrence que f^{-1} est de classe C^k si f l'est puisqu'on a montré que T est indéfiniment différentiable.

L'inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : [a, b] \to F$ une fonction de classe C^1 à une variable $t \in [a, b]$, on suppose que le vecteur vitesse $f'(t)$ est uniformément borné par M :

$$\mathrm{Max}_{t\in[a,b]} \mid\mid f'(t) \mid\mid\leq M,$$

alors

$$\mid\mid f(b) - f(a) \mid\mid\leq M \mid\mid b - a \mid\mid .$$

Démonstration

La fonction $f'(t)$ est continue donc intégrable au sens de Riemann. Son intégrale

$$\int_0^1 f'(t)dt,$$

est définie comme la limite des sommes de Riemann qui forment une suite de Cauchy qui converge dans le complété de F. On obtient alors l'inégalité

$$\mid\mid \int_0^1 f'(t)dt \mid\mid\leq \int_0^1 \mid\mid f'(t) \mid\mid dt,$$

en passant à la limite dans l'inégalité correspondante sur les sommes de Riemann.

Théorème

Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert convexe Ω. Si l'application linéaire tangente à f est uniformément bornée sur Ω par M $\mid\mid Df(x) \mid\mid\leq M$, on a

$$\mid\mid f(x) - f(y) \mid\mid\leq M \mid\mid x - y \mid\mid .$$

Démonstration

On considére le segment $c(t) = ty + (1-t)(x-y)$ et la fonction composée

$$t \mapsto foc(t),$$

à laquelle on applique le théorème des accroissements finis à une variable t. Il vient

$$|| foc(1) - foc(0) || \leq \text{Max}_{t\in[0,1]} || (foc)'(t) || \leq$$

$$\text{Max}_{t\in[0,1]} || Df(c(t) |||| x - y || \leq M || x - y || \, .$$

L'inégalité des accroissements finis est aussi vraie si on suppose l'application f seulement différentiable.

Théorème

On suppose $f : \Omega \to F$ de classe C^1, on a pour tout h tel que $[a, a+h] \subset \Omega$,

$$|| f(a+h) - f(a) - Df(a) || \leq \sup_{x\in[a,a+h]} || Df(x) - Df(a) |||| h || \, .$$

Si, de plus f est de classe C^2, on obtient

$$|| f(a+h) - f(a) - Df(a) || \leq \sup_{x\in[a,a+h]} || D^2 f(x) |||| h ||^2 \, .$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à l'application $\phi(x) = f(x) - Df(a)x$ pour obtenir la démonstration de la première assertion. Pour la démonstration de la seconde, on peut appliquer à nouveau l'inégalité des accroissements finis à $Df(x)$.

Convergence d'une suite de fonctions différentiables

Théorème

Soit $f_n : \Omega \to F$ une suite d'applications différentiables définies sur un ouvert Ω convexe à valeurs dans un espace de Banach F telles que :

(i) La suite Df_n converge uniformément vers une application g,

(ii) Il existe $a \in \Omega$ tel que $f_n(a)$ converge.

Alors la suite f_n converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction différentiable f telle que $Df = g$. Si tous les f_n sont de classe C^1, alors f est aussi de classe C^1.

Soit $x \in \Omega$, le théorème des accroissements finis implique

$$|| f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) || \leq || x - a || \sup_{t \in [a,x]} || Df_n(t) - Df_m(t) || .$$

La suite Df_n est une suite de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme et étant donné ϵ, il existe un rang N tel que

$$|| f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) || \leq \epsilon || x - a ||,$$

ce qui entraîne

$$|| f_n(x) - f_m(x) || \leq || (f_n(a) - f_m(a)) || + \epsilon || x - a || .$$

Comme la suite $f_n(a)$ est aussi de Cauchy, il s'en suit que pour tout $x \in \Omega$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy et donc qu'elle converge dans F vers un élément noté $f(x)$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|| f_n(x) - f(x) || \leq || (f_n(a) - f(a)) || + \epsilon || x - a ||,$$

ce qui assure la convergence uniforme de la suite sur tout compact de Ω. On peut alors remplacer dans la première inégalité, le point a par un point arbitraire et en particulier par un point $x+h$ proche de x. Il vient

$$|| f_n(x+h)-f_m(x+h)-(f_n(x)-f_m(x)) || \leq || h || \sup_{t\in[x,x+h]} || Df_n(t)-Df_m(t) ||,$$

puis, si on fait tendre m vers $+\infty$,

$$|| f_n(x+h)-f(x+h)-(f_n(x)-f(x)) || \leq || h || \sup_{t\in[x,x+h]} || Df_n(t)-g(t) || .$$

Comme on a supposé la convergence uniforme de la suite Df_n vers g, pour tout ϵ, il existe un rang N tel que

$$|| f_n(x+h)-f_n(x)-(f(x+h)-f(x)) || \leq \epsilon || h || .$$

On écrit alors

$$\begin{gathered} || f(x+h)-f(x)-g(x)h || \leq \\ || f(x+h)-f(x)-(f_n(x+h)-f_n(x)) || \\ + || f_n(x+h)-f_n(x)-Df_n(x)h || \\ + || Df_n(x)h-g(x)h || . \end{gathered}$$

On fixe donc $n>N$. La différentiabilité de f_n en x implique l'existence de r tel que si $|| h || < r$

$$|| f_n(x+h)-f_n(x)-Df_n(x)h || \leq \epsilon || h || .$$

On obtient donc

$$|| f(x+h)-f(x)-g(x)h || \leq 3\epsilon || h || .$$

Ceci montre à la fois que f est différentiable et que $Df(x) = g(x)$. Si les applications sont de plus C^1, la limite f est aussi C^1 puisque la fonction g est limite uniforme des fonctions continues Df_n.

Les différentielles d'ordre supérieur

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés. On désigne par $L(E, F; G)$ l'espace vectoriel normé formé des applications bilinéaires continues de $E\times F$ dans G. On peut identifier canoniquement $L(E, L(F, G))$ avec $L(E, F; G)$. En effet si $\phi : (x, y) \mapsto \phi(x, y)$ définit une application bilinéaire $\phi \in L(E, F; G)$, on peut lui associer l'élément $\psi \in L(E, L(F, G))$ défini par $\psi(x)(y) = \phi(x, y)$ et on peut montrer que ceci donne une isométrie d'espaces vectoriels normés. Ceci est généralisable et on peut identifier

$$L(E_1, L(E_2, ...L(E_n, F))...),$$

à l'espace des application n-linéaires continues $L(E_1 \text{x} E_2 \text{x} ... \text{x} E_n, F)$.

Soit $f : \Omega \to F$ une application n fois différentiable sur Ω. En utilisant l'identification évoquée ci-dessus, on peut donner la définition suivante :

Définition

La différentielle seconde en a est l'application bilinéaire continue $D^2f(a) \in L(E\times E, F)$ définie via l'identification par $D^2f : \Omega \to L(E, L(E, F))$. Plus généralement, les différentielles d'ordre $k \leq n$ sont des applications k-linéaires continues $D^kf(a) : E\times ...\times E \to F$.

Théorème

Si $f : \Omega \to F$ est deux fois différentiable, pour tout $a \in \Omega$, la forme bilinéaire

$D^2f(a)$ est symétrique.

On ne donne pas la démonstration de ce théorème. Ce théorème se généralise à tous les ordres.

Théorème

Si f est n fois différentiable sur l'ouvert Ω, alors pour tout $a \in \Omega$, $(h_1, ...h_n) \in E^n$, et tout élément σ du groupe des permutations S^n, on a

$$D^n f(a)(h_1, ...h_n) = D^n f(a)(h_{\sigma(1)}, ...h_{\sigma(n)}).$$

Cas particulier où $E = E_1 \times ... \times E_n$

Si f est définie et de classe C^2 sur un ouvert Ω de $E_1 \times ... \times E_n$ les fonctions $\delta_i f$ admettent elles-même des dérivées partielles $\delta^2_{ij} f$. L'expression de l'application linéaire tangente comme somme des différentielles partielles se généralise à tout ordre. En particulier on obtient à l'ordre deux le résultat suivant.

Proposition

Soit Ω un ouvert de $E_1 \times ... \times E_n$ et $f : \Omega \to F$ deux fois différentiable. Alors pour tous $(h_1, ..., h_n), (k_1, ...k_n)$, on a

$$D^2 f(a)[(h_1, ..., h_n), (k_1, ...k_n)] = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^2_{ij} f(a)(h_i, k_j).$$

Démonstration

On a en effet

$$D^2 f(a)[(h_1, ..., h_n), (k_1, ...k_n)] =$$

$$D(x \mapsto Df(x)(k_1, ...k_n))(a)(h_1, ..., h_n) =$$

$$\sum_i \delta_i(x \mapsto Df(x)(k_1, ...k_n))(a)(h_i) =$$

$$\sum_i \delta_i(x \mapsto \sum_j \delta_j f(x)(k_j))(a)(h_i) =$$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}^2 f(a)(h_i, h_j).$$

On obtient donc que si f est deux fois différentiable, on peut permuter les dérivées partielles

$$\delta_{ij}^2 f(x)(h, k) = \delta_{ji}^2 f(x)(k, h).$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, on peut permuter les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

On peut montrer que si les dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues, alors f est deux fois différentiable et, en particulier, on peut donc permuter les dérivées partielles d'ordre un entre elles.

Si f est une fonction deux fois différentiable sur un ouvert Ω, la différentielle seconde $D^2 f(a)$ au point $a \in \Omega$ est une forme bilinéaire symétrique. On peut donc la représenter par une matrice symétrique qui s'appelle la Hessienne de f au point a.

La formule de Taylor-Young

Soit $f : \Omega \to F$ n fois différentiable. Pour tout point $a \in \Omega$ et pour h suffisamment petit, on peut écrire

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)(h) + ... + \frac{1}{n!} D^n f(a)(h)^n + o(|| \ h \ ||^n).$$

Démonstration

Pour $n = 1$, cette formule coincide avec la définition de la différentiabilité.

On peut supposer la formule vérifiée jusqu'à l'ordre $n-1$. On pose

$$F(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) + ... - \frac{1}{n!}D^n f(a)(h)^n,$$

et on différentie cette fonction

$$DF(h) = Df(a+h) - Df(a) + ... - \frac{1}{(n-1)!}D^n f(a)(h)^{n-1}.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui donne

$$DF(h) = o(|| \, h \, ||^{n-1}).$$

Le théorème des accroissements finis donne alors

$$F(h) = o(|| \, h \, ||^n).$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a,b] \to F$ de classe C^{n+1}, alors on a la formule

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

On peut majorer le reste par

$$|| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \, || \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a,b]} || \, f^{n+1}(t) \, || \, .$$

La démonstration est facile car si on pose

$$\phi(t) = f(t) + (b-t)f'(t) + ... + \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n)}(t),$$

on trouve

$$\phi'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t),$$

et donc

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Point critique et extremum simple

On suppose que $f : \Omega \to F$ est différentiable et que F est de dimension finie.

Définition

Un point $a \in \Omega$ est un point critique de f si le rang de $Df(a)$ n'est pas maximum. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée une valeur critique.

Proposition

Si un point a est un extremum de la fonction $f : \Omega \to R$, alors c'est un point critique.

Démonstration

Soit h un vecteur de E et $c(t) = a + th$. On considère la fonction d'une variable $t \mapsto foc(t)$. Cette fonction présente un extremum en $t = 0$ donc sa dérivée s'annule. La différentiation composée donne

$$(foc(t))'(0) = Df(a)(c'(0)) = Df(a)(h) = 0.$$

Comme ceci est vrai quelque soit h, on en déduit que $Df(a) = 0$.

La réciproque est fausse : si un point est critique alors il ne correspond pas nécessairement à un extremum de f. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre deux, on peut trouver une condition suffisante pour que f admette en un point a un extremum local.

Proposition

On suppose que f admet un point critique en a. Si de plus la différentielle seconde $D^2f(a)$ est une forme bilinéaire définie positive (resp. négative). Alors le point a est un minimum local (resp. un maximum local).

Démonstration

Ceci est une conséquence directe de la formule de Taylor à l'ordre deux,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}D^2f(a)(h,h) + o(|| \ h \ ||^2).$$

Chapitre V

Les théorèmes de l'inverse locale et des fonctions implicites

Théorème de l'inverse locale

Soit $f : \Omega \to F$ une application au moins de classe C^1 définie sur un ouvert Ω d'un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F. On suppose qu'au point $a \in \Omega$ l'application linéaire tangente $Df(a)$ est un isomorphisme de l'espace E sur l'espace F. Alors, il existe un voisinage ouvert U de a dans E et un voisinage V de $f(a)$ dans F tel que $f : U \to V$ est un difféomorphisme. L'application inverse restreinte au voisinage V $f^{-1}\mid_V$ est de même classe de différentiabilité que f.

On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 1

Soit $f : U \to V$ une application différentiable qui est un homéomorphisme. Soit $a \in U$ tel que $Df(a)$ est un isomorphisme de E sur F. Alors l'inverse f^{-1} est différentiable en $f(a)$.

Démonstration

On pose $g = f^{-1}$ et $b = f(a)$. Pour h petit, par continuité de f on a $k = f(a+h) - f(a)$ petit. Si h est suffisamment petit, $a + h \in U$. On a

$$k = f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + \mid\mid h \mid\mid \epsilon(h).$$

Si on applique aux deux membres de l'équation l'inverse $Df(a)^{-1}$, il vient

$$Df(a)^{-1}k = g(b+k) - g(b) + \mid\mid h \mid\mid Df(a)^{-1}(\epsilon(h)).$$

On a

$$Df(a)^{-1}k = h + \| h \| Df(a)^{-1}\epsilon(h),$$

et donc

$$\| h \| \leq \frac{\| Df(a)^{-1} \| \| k \|}{1 - \| Df(a)^{-1}\epsilon(h) \|}.$$

Ceci montre que h est un $O(k)$ et donc que $\| h \| Df(a)^{-1}\epsilon(h)$ est un $o(k)$; ce qui démontre le lemme 1.

Lemme 2

Si dans l'énoncé du lemme 1, on suppose de plus que f est de classe C^1, alors f est un difféomorphisme local au voisinage du point a.

En effet, par continuité de Df, il existe un voisinage U' de a tel que, en tout point x de U', la différentielle $Df(x)$ est un isomorphisme. On peut alors appliquer le lemme précédent en n'importe quel point x de U'.

Démonstration du théorème

On peut supposer que $E = F$, $f(a) = a = 0$ et $Df(a) = I$ en remarquant que f est un difféomorphisme local en a si et seulement si $x \mapsto Df(a)^{-1}[f(a+x) - f(a)]$ est un difféomorphisme local en 0.

Par continuité de Df, il existe $r > 0$ tel que $\| x \| < r$ implique

$$\| Df(x) - I \| < 1/2.$$

Le théorème des accroissements finis implique alors que pour tout $x \in B(0, r)$,

$$\| x - f(x) \| \leq \frac{\| x \|}{2}$$

. Soit $y \in B(0, r/2)$ et $x \in B(0, r)$, il vient

$$|| y + x - f(x) || \leq || y || + || x - f(x) || \leq || y || + \frac{|| x ||}{2} \leq r.$$

On peut donc définir l'application $\phi : \overline{B}(0, r) \mapsto \overline{B}(0, r)$ par

$$\phi : x \mapsto \phi(x) = y + x - f(x),$$

et vérifier qu'elle est contractante. D'après le théorème du point fixe, il existe , étant donné $y \in B(0, r/2)$, un unique point x tel que

$$y + x - f(x) = x.$$

On note $x = g(y)$ et on a de plus

$$|| \phi(x) - \phi(x') | = || f(x) - f(x') - (x - x') || \leq \frac{1}{2} || x - x' ||,$$

ce qui implique

$$|| x - x' || \leq 2 || f(x) - f(x') ||,$$

et donc la continuité de l'application inverse g. On a ainsi obtenu que f est un homéomorphisme local et on peut appliquer le lemme 2. Ceci achève la démonstration du théorème.

Le théorème des fonctions implicites

Théorème 1

Soit E, F, G trois espaces de Banach, Ω un ouvert de ExF et $f : \Omega \to G$, $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application différentiable. Soit $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0$ et tel que la différentielle par rapport à la seconde variable $D_y(a, b)$

est un isomorphisme d'espaces de Banach. Alors, il existe un voisinage U de (a, b) dans Ω, un ouvert V de a dans E, une application $\phi : V \to F$, de même classe de différentiabilité que f, tels que $(x, y) \in U$ et $f(x, y) = 0$ implique

$$x \in V, y = \phi(x).$$

La différentielle de ϕ est égale à

$$D\phi(a) = -Df_y(a, b)^{-1}Df_x(a, b).$$

Théorème 2

Soit E, F, G trois espaces de Banach, Ω un ouvert de ExF et $f : \Omega \to G$, $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application différentiable. Soit $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = c$ et que la différentielle par rapport à la seconde variable $D_y f(a, b)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach. Alors, il existe un voisinage U de (a, b) dans Ω, un ouvert V de (a, c) dans ExG, une application $\phi : V \to F$, de même classe de différentiabilité que f, tels que $(x, y) \in U$, et $f(x, y) = z$ implique

$$x \in V, y = \phi(x, z).$$

On va donner la démonstration des deux théorèmes en même temps.

Démonstration

On définit l'application $F : \Omega \to E$xF par $F(x, y) = (x, f(x, y))$. La différentielle de cette application est

$$DF(a, b)(h, k) = (h, D_x f(a, b)h + D_y f(a, b)k).$$

Etant donné un élément $(h', k') \in E\text{x}F$, on peut trouver un seul $(h, k) \in E\text{x}F$ tel que $(h', k') = DF(a, b)(h, k)$. En effet, ce vecteur est donné par

$$h = h',\ k = D_y f(a, b)^{-1}[k' - D_x f(a, b)h'].$$

La différentielle $DF(a, b)$ est donc un isomorphisme d'espaces de Banach, et on peut appliquer à F le théorème de l'inverse local. Il existe localement une application Φ de même classe de différentiabilité que F, et donc que f, telle que $(x, z) = F(x, y) = (x, f(x, y)) \equiv (x, y) = \Phi(x, z)$. Pour obtenir l'application ϕ du deuxième théorème, il suffit de composer Φ avec la projection sur F. Pour le premier énoncé du premier théorème, il suffit de poser $z = 0$. Dans ce cas, la différentiation composée de $f(x, \phi(x)) = 0$ conduit à

$$D\phi(a) = -Df_y(a, b)^{-1} Df_x(a, b).$$

Les théorèmes du rang

Définition

Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension fini E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable. On appelle rang de f au point $a \in \Omega$, le rang de la différentielle $Df(a) \in L(E, F)$.

Théorème du rang constant

On suppose que $E = R^n, F = R^m$ et qu'il existe un voisinage de a sur lequel le rang de f est constant égal à r. Il existe un voisinage U de a, un voisinage V de $b = f(a)$ et deux difféomorphismes $u : U' \to U$ et $v : V' \to V$ définis respectivement sur des ouverts U' de R^n et V' de R^m , de même classe de différentiabilité que f, tels que

$$vofou(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0).$$

Démonstration

On peut supposer que a et b sont les origines de R^n et de R^m respectivement et que

$$Df(a)(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0).$$

On pose $x = (x_1, ..., x_n)$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$
et $w(x) = (f_1(x), ..., f_r(x), x_{r+1}, ..., x_n)$. La différentielle de w à l'origine est égale à l'identité. D'après le théorème de l'inverse local, on peut donc définir $u = w^{-1}$ sur un voisinage de l'origine et il est de même classe de différentiabilité que f. On pose

$$fou(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, \phi_{r+1}(x), ...\phi_m(x)).$$

Comme u est un difféomorphisme, le rang de fou doit rester constant (égal à r) sur un voisinage de l'origine. Ceci montre que les fonctions $\phi_j(x), j = r+1, ..., m$ ne dépendent en fait que des coordonnées $(x_1, ..., x_r)$. Il suffit alors de poser

$$v(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_r, x_{r+1} - \phi_{r+1}(x_1, ..., x_r), ..., x_m - \phi_m(x_1, ..., x_r).$$

Définition

On appelle submersion (respectivement immersion) f d'un ouvert U d'un espace vectoriel normé E sur (resp. dans) un ouvert V d'un espace vectoriel normé F une application différentiable telle que la différentielle $Df(x)$ est partout surjective (respectivement injective) en tout point $x \in U$.

Le théorème du rang pour les submersions

On suppose que $E = R^n,\ F = R^m$ et qu'il existe un voisinage de a sur lequel le rang de f est constant égal à m. Il existe un voisinage U de a, et un difféomorphisme $u : U' \to U$ défini sur un ouvert U' de R^n , de même classe de différentiabilité que f, tels que

$$fou(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m).$$

Démonstration

On a supposé que f est une submersion. On peut supposer de plus que ce sont les k premières colonnes de la matrice jacobienne de f qui sont indépendantes sur un voisinage de l'origine. Comme dans le cas général, on introduit

$$w(x) = (f_1(x), ..., f_m(x), x_{m+1}, ..., x_n).$$

Le théorème de l'inverse local assure l'existence d'une application différentiable inverse et donc l'existence d'un u tel que

$$fou(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m).$$

Le théorème du rang pour les immersions

On suppose que $E = R^n, F = R^m$ et qu'il existe un voisinage U de a sur lequel le rang de f est constant égal à n. Il existe un voisinage V de $f(a)$, et un difféomorphisme $v : V' \to V$ défini sur un ouvert V' de R^m , de même classe de différentiabilité que f, tels que

$$vof(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..0).$$

Démonstration

On peut supposer que a et $f(a)$ sont les origines de R^n et de R^m. Quitte à permuter les lignes de la Jacobienne qui représente $Df(0)$, on peut supposer que ce sont les n premières lignes qui sont linéairement indépendantes. On considère alors l'application

$$F : U\text{x}R^{m-n} \to R^m, \ F : (x, y) \mapsto f(x) + (0, y).$$

On applique alors le théorème de l'inverse local à F et ceci implique l'existence d'une application différentiable v telle que

$$vof(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..0).$$

Chapitre VI

Les sous-variétés de R^n

Définition des sous-variétés

Définition

Une partie M de R^n est une sous-variété de dimension d si pour tout point x de M, il existe deux ouverts U et V de R^n et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tels que

$$\phi(U \cap M) = V \cap (R^d \times 0).$$

Si le difféomorphisme est de classe C^k (resp. C^∞), on dit que la sous-variété est de classe C^k (resp C^∞).

Par exemple une courbe comportant un point double ou un point de rebroussement ne peut pas être une sous-variété.

Théorème

Soit $f : U \to R^k$ une submersion (au moins de classe C^1) définie sur un ouvert U de R^n. Le sous-ensemble $M = f^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension $n-k$ de R^n.

Démonstration

D'après le théorème du rang, pour tout point m de M, il existe un difféomorphisme $u : U \to V$ sur un voisinage de m tel que $fou(y_1, ..., y_n) = (y_1, ..., y_k)$. On a donc que $y = (y_1, ..., y_n) \in V$ est de la forme $y = (0, ..., 0, y_{k+1}, ..., y_n)$ si et seulement si $f(u(y)) = 0$.

Exemples

-La sphère S^n est une sous-variété de R^{n+1} de dimension n donnée par

$$f(x_1, ...x_{n+1}) = x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 - 1 = 0$$

.

-Le cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ privé de l'origine est une sous-variété de dimension 2 de R^3.

-Le tore est une sous-variété de dimension 2 de R^3 donnée par

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

avec $r < 1$.

Définition

Un plongement est une immersion $f : U \to R^n$ qui réalise un homéomorphisme de U sur son image $f(U)$ munie de la topologie induite par R^n.

Théorème

Une partie M de R^n est une sous-variété de dimension k si et seulement si, en tout point $x \in M$, il existe une immersion $h : \Omega \to U$ d'un ouvert Ω de R^k dans un voisinage ouvert U de x telle que h réalise un homéomorphisme de Ω sur $h(\Omega) = U \cap M$. Un tel plongement s'appelle une paramétrisation locale de M.

Démonstration

Supposons que M est une sous-variété. Soit m un point de M et ϕ un difféomorphisme d'un voisinage U de $m \in M$ qui applique $U \cap M$ sur $V(R^p\text{x}0)$

identifié à un ouvert Ω de R^p. Le difféomorphisme réciproque ϕ^{-1} induit une immersion et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$. Réciproquement, soit $h : \Omega \to U$ une paramétrisation locale dans un voisinage du point $m = h(0) \in M$, on a $h(\Omega) = U \cap M$. D'après le théorème du rang pour les immersions, il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage de m tel qu'on ait

$$\phi oh(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_p, 0, ..., 0).$$

Quitte à restreindre les ouverts, on peut supposer que cette égalité a lieu sur Ω.

Les courbes

Une courbe dans un espace vectoriel normé E est une application différentiable $c : I \to E$ définie sur un intervalle I de R. Une courbe n'est une sous-variété de R^n que si $E = R^n$ et si c est un plongement. En particulier ceci exige que c est une immersion et donc que le vecteur $c'(t)$ ne s'annule jamais.

Deux courbes $c : I \to E$ et $d : J \to E$ sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme $\phi : I \to J$ tel que $co\phi = d$. On dit que ϕ est un changement de paramétrage. Une courbe est dite paramétrée par sa longueur d'arc si en chaque point le vecteur $c'(t)$ est unitaire.

Soit $c : I \to R^2$ une immersion de classe au moins C^2. On définit le vecteur tangent unitaire (ou vitesse unitaire) par $e(t) = \frac{c'(t)}{||c'(t)||}$, puis le vecteur normal $n(t)$ en sorte que $(e(t), n(t))$ forme un repère orthonormé direct. On définit la courbure $K(t)$ par l'égalité

$$e'(t) = || c'(t) || K(t) n(t).$$

Soit $c : I \to R^3$ une immersion de classe au moins C^3. Le vecteur $e(t) = \frac{c'(t)}{||c'(t)||}$ est unitaire. Sa dérivée $e'(t)$ définit une direction orthogonale à la vitesse à la condition qu'il soit non nul. On le suppose et dans ce cas, on pose $n(t) = \frac{e'(t)}{||e'(t)||}$. On définit le plan osculateur comme le plan affine passant par $c(t)$ de direction vectorielle engendrée par les vecteurs $e(t), n(t)$. La courbure $K(t)$ est définie comme dans le plan par $e'(t) =|| c'(t) || K(t)n(t)$, mais elle est maintenant positive ou nulle. On pose $b(t) = e(t) \wedge n(t)$ et on appelle repère de Frenet le repère orthonormé direct formé par $e(t), n(t), b(t)$. On obtient que la dérivée $b'(t)$ est nécessairement de la forme $b'(t) = - || c'(t) || \tau(t)n(t)$. Ceci définit la torsion τ de la courbe qui mesure son écart par rapport au plan osculateur.

On ne peut pas faire ce type de construction si $e'(t) = 0$, ce qui est par exemple le cas si la courbe est un morceau de droite.

L'espace tangent d'une sous-variété

Théorème

On considére une sous-variété de dimension $n - k$ de R^n définie par une submersion $f : \Omega \to R^n$ définie sur un ouvert Ω de R^n par $M = f^{-1}(0)$. Pour tout point $m \in M$, le noyau $\ker Df(m)$ est formé des vitesses de courbes tracées sur M et passant par m. On l'appelle l'espace tangent à la sous-variété M au point m.

Démonstration

Soit $t \to c(t) \in M$ une courbe définie au voisinage de l'origine telle que $c(0) = m$. La condition $c(t) \in M = f^{-1}(0)$ implique $(foc)'(0) = Df(m)(c'(0)) = 0$

et donc $c'(0) \in \ker(Df(m))$.

On peut supposer que les k premières colonnes de la matrice jacobienne de f sont indépendantes. Si on désigne par $X = (x_1, ..., x_k)$ et $Y = (x_{k+1}, ..., x_n)$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence, au voisinage du point $m = (X_0, Y_0)$, d'une application ϕ telle que $f(X, Y) = 0$ soit équivalent à $Y = \phi(X)$. Soit $h = (u, v) \in D(f(m))$. Pour t suffisamment petit, le point $X_0 + tu$ est dans l'ouvert de définition de ϕ et on pose

$$\alpha(t) = X_0 + tu, \beta(t) = \phi(X_0 + tu).$$

On a donc que $c(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \in S$ et donc $c'(0) = (u, \beta'(0)) \in \ker(D(f)(m)$. On obtient alors facilement que $\beta'(0) = v$ et que $(u, v) = c'(0)$, ce qui montre le théorème.

Exemple

Pour une sous-variété de dimension deux de R^3 (surface) donné par une submersion f comme $f(x, y, z) = 0$, l'espace tangent en $m = (a, b, c)$ est un plan tangent donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(m)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(m)(z-c) = 0.$$

Les surfaces

Considérons une sous-variété S de dimension deux de R^3 définie par une submersion $f : \Omega \to R$ définie sur un ouvert Ω de R^3. Soit $m \in S$ et $c : I \to S$ une courbe tracée sur S paramétrée par sa longueur d'arc et d'origine $c(0) = m$. Soit N un vecteur unitaire orthogonal au plan tangent

Ker$(D(f)(m)$ à S. On pose $n = c'(0) \wedge N$. On considère l'accélération $c''(0)$ qui se décompose en

$$c''(0) = K_g n + K_N N.$$

On peut vérifier que la courbure de la courbe $c(t)$ en $c(0)$ est égale à

$$K(0) = \| c''(0) \| = \sqrt{K_g^2 + K_N^2}.$$

Par définition K_g s'appelle la courbure géodésique et K_N la courbure normale.

Définition

Une géodésique de la surface S est une courbe tracée sur S dont la courbure géodésique est identiquement nulle. L'accélération le long d'une géodésique est donc colinéaire au vecteur normal N.

La courbure normale en un point ne dépend que de la direction tangente à la surface en ce point. Si la courbure K_N n'est pas constante, elle atteint ses extrema K_{min}, K_{max} en deux directions tangentes orthogonales. Si la courbure normale est constante dans toutes les directions, on dit que le point m est un ombilic. Sinon, les directions extrémales sont appelées les directions principales de courbure. Le produit $K_{max}K_{min}$ est appelé la courbure totale de la surface en ce point.

Extremum lié et théorème de Lagrange

Théorème

On considère une sous-variété définie par $M = g^{-1}(0)$, où $g : \Omega \to R^k$ est une submersion. Soit $f : \Omega \to R$ de classe C^1. Si un point $m \in M$ est un extremum de $f \mid_M$, il existe des scalaires $(\lambda_1, ...\lambda_k)$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que

$$D(f)(m) = \lambda_1 Dg_1(m) + ... + \lambda_k Dg_k(m).$$

Démonstration

Si le point m est un extremum de $f\mid_M$, pour toute courbe c tracée sur M la fonction $foc(t)$ présente un extremum en $t = 0$ correspondant à $c(0) = m$. On a donc $(foc)'(0) = 0$ et $c'(0) \in \mathrm{Ker} D(f)(m)$. Comme on a vu précédement que tout élément de $D(g)(m)$ est de la forme $c'(0)$, on a $\ker(D(g)(m) \subset \ker(D(f)(m)$. Le résultat suit alors d'un lemme d'algèbre linéaire qui dit que si on a trois espaces vectoriels E, F, G et deux applications linéaires $u \in L(E, F)$ et $v \in L(E, G)$, on a équivalence $\ker v \subset \ker u$ si et seulement si il existe une application $w \in L(G, F)$ telle que $u = wov$.

Exemple

On considère à nouveau la courbure normale en un point m d'une surface S. On prend une courbe c tracée sur S d'origine $c(0) = m$. En dérivant deux fois $f(c(t)) = 0$, il vient

$$D(f(m))(c''(0)) = K_N D(f)(m)(N) = -D^2 f(m)(c'(0), c'(0),$$

et donc

$$K_N = -\frac{D^2 f(m)(c'(0), c'(0))}{Df(m)(N)}.$$

On considère alors que $c'(0)$ varie dans le plan tangent P à m en S. On cherche les extrema de la forme quadratique $D^2 f(m)(x, x)$ en restriction à $< x, x > -1 = 0$. On applique le théorème de Lagrange : si a est un extremum, il existe un scalaire λ tel que

$$2D^2 f(m)(a,x) = \lambda < a, x > .$$

On désigne par H l'endomorphisme symétrique (opérateur de Weingarten) défini par

$$2D^2 f(m)(x,y) =< H(x), y >=< x, H(y) > .$$

On obtient donc que soit H est une homothétie et le point m est un ombilic, soit que les extrema de K_N correspondent aux deux directions propres de H qui sont orthogonales.