



HAL
open science

Sur le réarrangement décroissant

Claire David

► **To cite this version:**

| Claire David. Sur le réarrangement décroissant. *Quadrature*, 2015, 97, pp.41-46. hal-01298990

HAL Id: hal-01298990

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01298990>

Submitted on 6 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur le réarrangement décroissant

Claire David

10 juillet 2015

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

1 Introduction

Le réordonnement décroissant, pour une fonction définie sur \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$, à valeurs réelles, positives, mesurable (au sens de Lebesgue), est un outil magique d'analyse fonctionnelle. On trouve beaucoup de choses à ce sujet dans la littérature existante [1], [2], [3], [4], toutefois, les démonstrations ne sont pas toujours données dans leur intégralité. La compréhension des techniques de réarrangement devient aussi plus facile dès que l'on fait des dessins ou figures, que l'on trouve rarement. Dans la lignée de [5], [6], il nous a semblé intéressant de développer les points ci-dessous.

2 Préambule : sur la mesure de Lebesgue

Dans ce qui suit, d désigne un entier naturel non nul. La mesure de Lebesgue (voir [7] pour tout ce qui a trait à la construction de cette mesure) d'un ensemble Lebesgue-mesurable A sera notée $\text{mes}(A)$. On rappelle que la mesure de Lebesgue est la mesure de référence classique dans un cadre euclidien, puisqu'elle permet de retrouver, dans le cas de la dimension 1, la longueur, dans le cas de la dimension 2, la surface, et dans dans le cas de la dimension 3, le volume. Notons que la compréhension de ce qui se passe en dimension d quelconque est facilitée en revenant à ces cas particuliers, qui permettent de lever l'abstraction souvent liée à tout ce qui a trait à la théorie de la mesure. Nous renvoyons le lecteur à [3], [7], [8], pour les notions d'ensembles et de fonctions mesurables.

Les résultats présentés dans cet article utilisent, notamment, le résultat suivant :

Propriété 2.1. *Considérons une fonction f définie sur un sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^d à valeurs réelles, positives. Alors, pour tout réel $p > 0$:*

$$\int_{\Omega} f^p(x) dx = \int_0^{+\infty} \text{mes} \left\{ x \mid f(x) > t \right\} p t^{p-1} dt$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini, pour les fonctions à valeurs positives :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f^p(x) dx &= \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{f^p(x) > t} dt \right\} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f(x))^p > t} dx \right\} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \text{mes} \left\{ x \mid f^p(x) > t \right\} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \text{mes} \left\{ x \mid f(x) > t \right\} p t^{p-1} dt
\end{aligned}$$

(On passe de l'avant-dernière ligne à la dernière par un changement de variable.)

□

Définition 2.1. La décomposition « en tranches de cake (layer-cake) »

Considérons une fonction f définie sur \mathbb{R}^d à valeurs réelles, positives, mesurable. Pour tout x de \mathbb{R}^d , sa décomposition « layer-cake » est donnée par :

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{f(x) > t} dt \quad (\star)$$

Ce nom amusant, à connotation « pâtissière », vient, tout simplement, de la représentation de la valeur $f(x)$ comme la somme des contributions des « tranches » (lignes de niveau) se situant en-dessous de $f(x)$, qui contribuent donc à l'intégrale, au contraire de celles situées au-dessus.

Remarque 2.1. Cette définition vient d'une généralisation de la propriété précédente à une mesure quelconque μ sur \mathbb{R}^d :

$$\int_{\Omega} f^p(x) \mu(dx) = \int_0^{+\infty} \mu \left\{ x \mid f(x) > t \right\} p t^{p-1} dt$$

Dans le cas où $p = 1$ et où μ est la mesure de Dirac en x , on obtient ainsi, naturellement, la relation (\star) .

Le théorème suivant, bien connu en théorie de la mesure [3], [7], [9], permet d'approcher des fonctions mesurables par des fonctions plus simples, pour lesquelles on démontre le résultat cherché. Il suffit ensuite d'un passage à la limite pour en déduire la validité du résultat pour des fonctions mesurables quelconques.

Théorème 2.2. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble mesurable A de \mathbb{R}^d à valeurs réelles, positives, mesurable. Alors, f est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives.*

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} f_{i,n} \mathbb{1}_{A_{i,n}}$$

où, pour tout entier naturel n , I_n est un ensemble dénombrable, et où, pour tout i de I_n , $f_{i,n}$ est un réel positif, $A_{i,n}$ un ensemble mesurable, et $\mathbb{1}_{A_{i,n}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $A_{i,n}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \mathbb{1}_{A_{i,n}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_{i,n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 Le réordonnement décroissant

Définition 3.1. Considérons un ensemble \mathcal{V} de volume fini $\text{Vol}_{\mathcal{V}}$ dans \mathbb{R}^d . Son réarrangement symétrique, noté \mathcal{V}^* , est la boule ouverte, centrée à l'origine, de même mesure que \mathcal{V} :

$$\mathcal{V}^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \text{Vol}_{\mathcal{B}_d} \cdot |x|^d < \text{Vol}_{\mathcal{V}} \right\}$$

où $\text{Vol}_{\mathcal{B}_d}$ est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d :

$$\text{Vol}_{\mathcal{B}_d} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

Définition 3.2. Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, à valeurs positives, mesurable, de limite nulle en l'infini, dans le sens où

$$\text{mes} \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > t \right\} \right) < +\infty \quad \forall t > 0$$

On définit alors la fonction $\mu_f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$\mu_f(t) = \text{mes} \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > t \right\} \right)$$

Le réarrangement symétrique décroissant de f est la fonction f^* , définie sur \mathbb{R}^d , à valeurs positives, mesurable, et telle que, pour tout x de \mathbb{R}^d :

$$f^*(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{y: f(y) > t\}^*}(x) dt$$

qu'il faut comparer à :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f(x) > t\}} dt$$

Par construction, f^* est à symétrie radiale :

$$f^*(x) = f^*(y) \quad \text{si} \quad |x| = |y|$$

décroissante le long des rayons issus de l'origine :

$$f^*(x) \geq f^*(y) \quad \text{si} \quad |x| \leq |y|$$

et équimesurable comparativement à f , ce qui signifie, tout simplement, que les ensembles, correspondant aux mêmes lignes de niveaux des fonctions, sont de mesures égales :

$$\mu_f(t) = \mu_{f^*}(t)$$

Nous laissons, à cet effet, le lecteur démontrer, à titre d'exercice, que

$$\{x : f^*(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}^*$$

qui servira dans les démonstrations qui suivent.

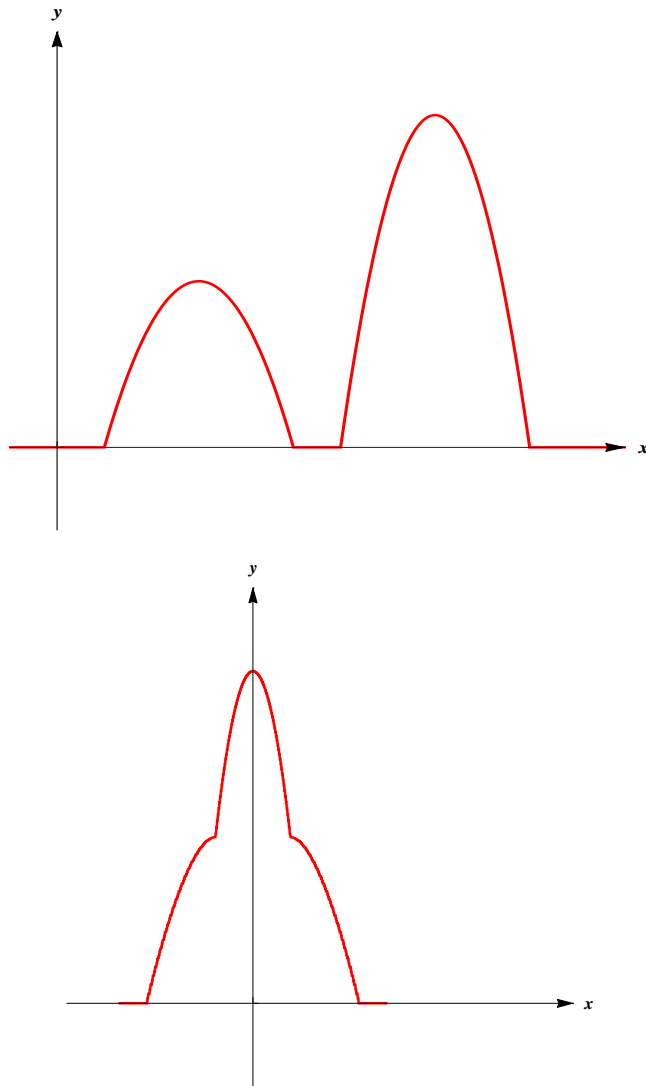


FIGURE 1 – Le graphe d’une fonction f à valeurs positives, mesurable, et celui de son réarrangement symétrique décroissant f^*

(Ce tracé graphique a été obtenu numériquement, en triant les valeurs prises par la fonction, à l’aide de Mathematica.)

Exemple 3.1. Considérons la fonction φ définie, pour tout réel x , par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \in]3, 4[\\ 2 & \text{si } x \in [4, 5] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]6, 7[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa réarrangée symétrique décroissante φ^* est la fonction définie, pour tout réel x , par :

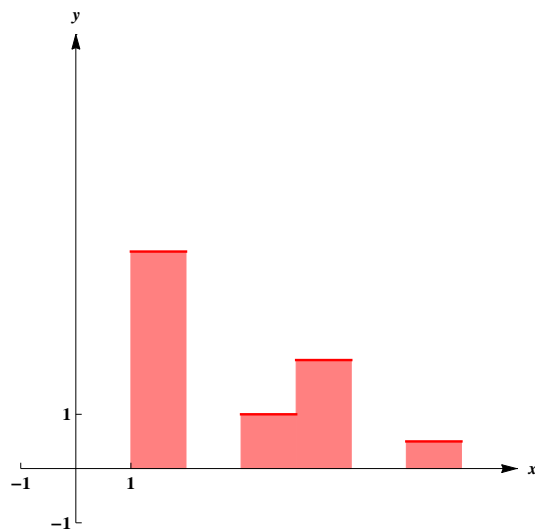


FIGURE 2 – Le graphe de la fonction en escaliers φ

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 2 & \text{si } x \in \left] -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left] -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

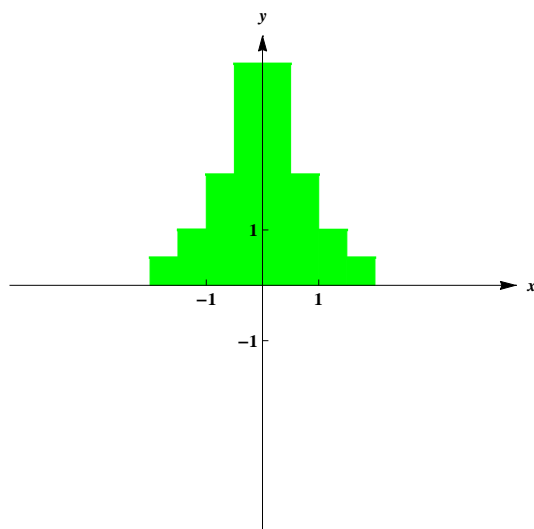


FIGURE 3 – Le graphe de la fonction réarrangée φ^*

Définition 3.3. Espaces L^p (voir [7] pour plus de détails)

Soit p un réel strictement positif, et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . L'espace de Lebesgue d'ordre p , $L^p(\Omega)$, est l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_p$, définie, pour tout f de $L^p(\Omega)$, par :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Propriété 3.1. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Lorsque la fonction f appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$, le réarrangement décroissant f^* appartient aussi à $L^p(\mathbb{R}^d)$, et, pour tout $t > 0$, on dispose de l'égalité :

$$\|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Démonstration. Cette égalité se démontre à l'aide de la décomposition « layer-cake » de $|f|^p$, et du théorème de Fubini ; pour alléger les notations, on suppose que f est à valeurs positives. On obtient :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x))^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(f(x))^p > t} dt \right\} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f(x))^p > t} dx \right\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \text{mes} \left\{ x \mid (f(x))^p > t \right\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \text{mes} \left\{ x \mid f(x) > t \right\} p t^{p-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mu_f(t) p t^{p-1} dt \\ &= \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2. Inégalité de Hardy-Littlewood

Considérons deux fonctions f et $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, à valeurs positives, mesurables, chacune de limite nulle en l'infini. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x) g^*(x) dx$$

Démonstration. Grâce au théorème (2.2), il suffit de démontrer le résultat lorsque f et g sont les fonctions caractéristiques de deux ensembles mesurables A_f et A_g , tous deux de volumes finis :

$$f = \mathbb{1}_{A_f} \quad , \quad g = \mathbb{1}_{A_g}$$

avec $\text{mes}(A_f) \geq \text{mes}(A_g)$.

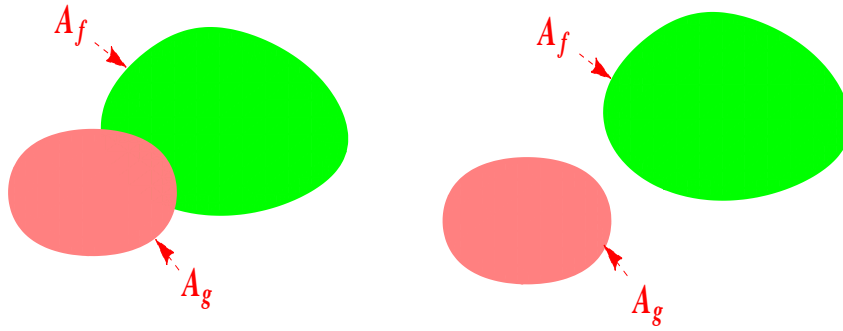


FIGURE 4 – Les ensembles A_f et A_g , avec ou sans intersection.

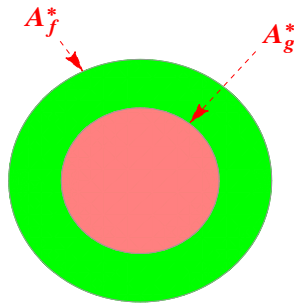


FIGURE 5 – Les boules centrées à l'origine A_f^* et A_g^* .

Les réarrangements A_f^* et A_g^* sont des boules centrées à l'origine ; leur intersection $A_f^* \cap A_g^*$ est la plus petite des deux boules, soit, ici :

$$A_f^* \cap A_g^* = A_g^*$$

Il en résulte :

$$\text{mes} (A_f^* \cap A_g^*) = \text{mes} (A_g^*) \geq \text{mes} (A_f \cap A_g)$$

La décomposition « en tranches de cake », et le théorème de Fubini, permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x) g^*(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{f^*(x) > s} ds \right\} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{g^*(x) > t} dt \right\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{f^*(x) > s} \mathbb{1}_{g^*(x) > t} ds dt dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{f^*(x) > s \text{ et } g^*(x) > t} ds dt dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{f^*(x) > s \text{ et } g^*(x) > t} dx \right\} ds dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{mes} (\{f^*(x) > s \text{ et } g^*(x) > t\}) ds dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{mes} (A_g^*) ds dt \\
&\geq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{mes} (A_f \cap A_g) ds dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{f(x) > s \text{ et } g(x) > t} dx \right\} ds dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{f(x) > s} \mathbb{1}_{g(x) > t} dx \right\} ds dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{f(x) > s} \mathbb{1}_{g(x) > t} dx ds dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.3. Réarrangement et valeur absolue

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable, de limite nulle en l'infini, appartenant à $L^p(\mathbb{R}^d)$, où p est un entier supérieur ou égal à 1. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|^*(x) dx$$

Démonstration. On demontre le résultat en revenant à la définition du réarrangement décroissant, et en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^*(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|f(y)| > t\}}^*(x) dt \right\} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|f(y)| > t\}}^*(x) dx \right\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \text{mes} \{y : |f(y)| > t\}^* dt \\ &\geq \int_0^{+\infty} \text{mes} \{y : |f(y)| > t\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|f(y)| > t\}}(x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|f(y)| > t\}}(x) dt \right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4. Le réarrangement symétrique diminue la distance L^p

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Considérons deux fonctions f et $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, à valeurs positives, mesurables, chacune de limite nulle en l'infini. Alors,

$$\|f^* - g^*\|_p \leq \|f - g\|_p$$

Démonstration. Dans un premier temps, on remarque que :

$$\begin{aligned} \int f^*(x) \mathbb{1}_{g^* \leq s}(x) dx &= \int f^*(x) (1 - \mathbb{1}_{g^* > s}(x)) dx \\ &= \int f^*(x) dx - \int f^*(x) \mathbb{1}_{g^* > s}(x) dx \\ &\leq \int f^*(x) dx - \int f(x) \mathbb{1}_{g > s}(x) dx \\ &= \int f(x) dx - \int f(x) \mathbb{1}_{g > s}(x) dx \\ &= \int f(x) (1 - \mathbb{1}_{g > s}(x)) dx \\ &= \int f(x) \mathbb{1}_{g \leq s}(x) dx \end{aligned} \tag{1}$$

(l'inégalité de la troisième ligne vient du lemme 3.2.)

Il est plus facile de montrer, plus généralement, comme dans [3], que pour toute fonction à valeurs positives, convexe, $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $J(0) = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} J(f^*(x) - g^*(x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} J(f(x) - g(x)) dx$$

On utilise la décomposition :

$$J = J_+ + J_-$$

où $J_+(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $J_-(t) = 0$ pour $t \geq 0$.

Les fonctions J_+ et J_- étant toutes deux convexes, il suffit de prouver le résultat pour J_+ .

La fonction J_+ étant convexe, sa dérivée à droite J'_+ est une fonction croissante de t , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} J_+(h_1(x) - h_2(x)) &= \int_{h_2(x)}^{h_1(x)} J'_+(h_1(x) - s) ds \\ &= \int_0^{h_2(x)} J'_+(h_1(x) - s) \mathbb{1}_{(h_1 \leq s)}(x) ds \end{aligned}$$

Pour toute fonction croissante H sur \mathbb{R}^+ , prenant la valeur 0 en zéro, l'intégration, par rapport à la mesure de Stieltjes associée (voir [9]), qui est positive et croissante, conduit, pour tout x de \mathbb{R}^d , à :

$$H(f^*(x) - s) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]s+t, +\infty[}(f^*(x)) dH(t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(f^* > s+t)}(x) dH(t)$$

Le théorème de Fubini permet d'en déduire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(f^*(x) - s) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f^* > s+t)}(x) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx \right) dH(t) \quad (2)$$

On en déduit alors, grâce à l'inégalité (1), par positivité de la mesure $dH(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} H(f^*(x) - s) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(f^* > s+t)}(x) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx dH(t) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f > s+t)}(x) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx \right) dH(t) \end{aligned}$$

Si, maintenant, on applique la formule (2) au couple de fonctions (f, g) , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(f^*(x) - s) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} H(f(x) - s) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx$$

ce qui conduit, pour $H = J'_+$, à :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} J_+(f(x) - g(x)) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{f(x)}^{+\infty} J'_+(f(x) - s) \mathbb{1}_{g \leq s} ds \right\} dx \\ &= \int_{f(x)}^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} J'_+(f(x) - s) \mathbb{1}_{g \leq s} dx \right\} ds \\ &\geq \int_{f(x)}^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} J'_+(f^*(x) - s) \mathbb{1}_{g^* \leq s} dx \right\} ds \end{aligned}$$

et donc :

$$\int_{\mathbb{R}^d} J_+(f(x) - g(x)) dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} J_+(f^*(x) - g^*(x)) dx$$

□

Remerciements

L'auteur tient à remercier le referee anonyme pour ses très judicieuses suggestions.

Références

- [1] A. Alvino, P.-L. Lions, et G. Trombetti, On optimization problems with prescribed rearrangements, *Nonlinear Analysis*, **13**, 1989, pages 185-220.
- [2] C. Bandle, Isoperimetric inequalities and applications, Monographs and Studies in Mathematics, **7**, Pitman, London, 1980.
- [3] E. Lieb and M. Loss, Analysis, Graduate Studies in Mathematics, **14**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [4] G. Pólya et G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies, **27**, Princeton University Press, 1951.
- [5] Jean-Yves Chemin, Cl. David, Sur la construction de grandes solutions pour des équations de Schrödinger de type « masse critique », Décembre 2013. Exposé lors du séminaire Laurent Schwartz - EDP et applications du 17 Décembre 2013, texte à paraître.
- [6] Jean-Yves Chemin, Cl. David, From an initial data to a global solution of the nonlinear Schrödinger equation : a building process, à paraître.
- [7] W. Rudin, Real and complex analysis, third edition, McGraw Hill, New York, 1987.
- [8] N. Lerner, A Course on Integration Theory : Including More Than 150 Exercises With Detailed Answers, Birkhäuser, 2014.
- [9] E. M. Stein, R. Shakarshi, Real Analysis, Measure Theory, Integration and Lebesgue Spaces, Princeton Lectures in Analysis, **3**, Princeton University Press, 2005.