



**HAL**  
open science

# Formes de Dirichlet et fonctions harmoniques sur le graphe de la fonction de Weierstrass

Claire David, Nizare Riane

► **To cite this version:**

Claire David, Nizare Riane. Formes de Dirichlet et fonctions harmoniques sur le graphe de la fonction de Weierstrass. 2016. hal-01421453

**HAL Id: hal-01421453**

**<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01421453>**

Preprint submitted on 22 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Construction d'un laplacien sur le graphe de la fonction de Weierstrass

Claire David et Nizare Riane

22 décembre 2016

Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06  
CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu 75005, Paris, France

## 1 Introduction

Le laplacien occupe, au sein de l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles, une place centrale. Récemment, les travaux de J. Kigami [1], [2], repris par R. Strichartz [6], [7], ont permis la construction d'un opérateur de même nature, défini localement, sur des graphes présentant un caractère fractal : le triangle de Sierpiński, le tapis de Sierpiński, le diamant fractal, les ensembles de Julia, la fougère de Barnsley.

J. Kigami part de la définition du Laplacien sur le segment unité de la droite réelle ; pour une fonction  $u$  deux fois dérivable sur  $[0, 1]$ , le laplacien  $\Delta u$  est obtenu comme dérivée seconde de  $u$  sur  $[0, 1]$ . Pour tout couple  $(u, v)$  appartenant à l'espace des fonctions dérivables sur  $[0, 1]$ , et telles que :  $v(0) = v(1) = 0$ , il fait remarquer que la relation :

$$\int_0^1 (\Delta u)(x) v(x) dx = - \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n \left( u\left(\frac{k}{n}\right) - u\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \left( v\left(\frac{k}{n}\right) - v\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)$$

permet de définir, sous une forme faible, le laplacien de  $u$ , en évitant le recours aux dérivées premières, et ouvre donc la voie aux calculs de laplaciens sur des domaines à caractère fractal.

Curieusement, le cas du graphe de la fonction de Weierstrass, introduite en 1872 par K. Weierstrass [3], qui présente des propriétés d'auto-similarité, ne semble pas avoir été envisagé. On rappelle que étant donnés  $\lambda \in ]0, 1[$ , et  $b$  tel que  $\lambda b > 1 + \frac{3\pi}{2}$ , la fonction de Weierstrass

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(\pi b^n x)$$

est continue partout, mais nulle part dérivable. La preuve originale de K. Weierstrass [3], peut aussi être retrouvée dans [5]. Elle a été complétée, par celle, désormais classique, dans le cas où  $\lambda b > 1$ , par G. Hardy [4].

C'est Benoît Mandelbrot [8] qui, en 1977, a mis en évidence le caractère fractal du graphe de la fonction de Weierstrass. K. Falconer [9] a montré, en 1985, que la dimension de Hausdorff du graphe est majorée par  $2 + \frac{\ln \lambda}{\ln b}$ . La preuve formelle a été établie par B. Hunt [10] en 1998.

Nous présentons, dans ce qui suit, les résultats que nous avons obtenus en suivant l'approche de J. Kigami, pour définir, sur le graphe de la fonction de Weierstrass, un laplacien. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux formes de Dirichlet sur ce graphe, qui permettent, ensuite, de définir le laplacien.

## 2 Formes de Dirichlet sur le graphe de la fonction de Weierstrass

**Notation.** Dans ce qui suit,  $\lambda$  et  $b$  sont deux réels tels que :  $0 < \lambda < 1$  ,  $b = N_b \in \mathbb{N}$  et  $\lambda N_b > 1$ .

On considérera la fonction de Weierstrass  $\mathcal{W}$ , définie, pour tout réel  $x$ , par :  $\mathcal{W}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(2\pi N_b^n x)$ .

### 2.1 Aspect théorique

On se place, dans ce qui suit, dans le plan euclidien de dimension 2, rapporté à un repère ortho-normé direct. Les coordonnées cartésiennes usuelles sont  $(x, y)$ .

#### Définition 2.1. Système de fonctions itérées

Etant donné un espace métrique complet  $(E, d)$ , on appelle système de fonctions itérées sur  $E$  un ensemble de  $N \in \mathbb{N}^*$  fonctions contractantes définies sur  $E$ , à valeurs dans  $E$ .

#### Théorème 2.1. Théorème du collage [11]

Soit  $N$  un entier naturel non nul, et  $E$  un espace métrique, muni d'une distance  $d$ , complet. On considère, sur l'ensemble des parties de  $E$ , la distance de Hausdorff. Etant donnée une famille de contractions  $\{T_0, \dots, T_{N-1}\}$  définies sur  $E$ , à valeurs dans  $E$ , on définit, sur l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ , l'application  $T$  par :  $\forall A \in \mathcal{P}(E) : T(A) = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(A)$ . L'application  $T$  est alors contractante sur l'ensemble des parties de  $E$ , muni de la distance de Hausdorff. Le théorème du point fixe assure l'existence et l'unicité d'un sous-ensemble  $\mathcal{F} \subset E$  non vide, vérifiant :  $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(\mathcal{F})$ .

L'ensemble  $\mathcal{F}$  est dit **autosimilaire** par rapport à la famille  $\{T_0, \dots, T_{N-1}\}$ . Il est appelé **attracteur** du système de fonctions itérées  $\{T_0, \dots, T_{N-1}\}$ .

#### Propriété 2.2. Caractère périodique de la fonction de Weierstrass

Pour tout réel  $x : \mathcal{W}(x+1) = \mathcal{W}(x)$ . L'étude de la fonction de Weierstrass peut être restreinte à l'intervalle  $[0, 1[$ .

Suivant la méthode développée par Kigami, et à l'aide du théorème du collage, on approche la restriction  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  à  $[0, 1[ \times \mathbb{R}$ , du graphe de la fonction de Weierstrass, par une suite de graphes, construits suivant un processus itératif. À cet effet, on introduit la famille de contractions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2 : \{T_0, \dots, T_{N_b-1}\}$ , où, pour tout  $i$  de  $\{i = 0, \dots, N_b - 1\}$ , et tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2 : T_i(x, y) = \left( \frac{x+i}{N_b}, \lambda y + \cos\left(2\pi \left(\frac{x+i}{N_b}\right)\right) \right)$ .

**Propriété 2.3.** Le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  peut être considéré comme le système de fonctions itérées sur  $[0, 1[ \times \mathbb{R} :$

$$\{T_0, \dots, T_{N_b-1}\} \quad (\text{Voir ([10])})$$

Il en résulte, d'après le théorème du collage :  $\Gamma_{\mathcal{W}} = \bigcup_{i=0}^{N_b-1} T_i(\Gamma_{\mathcal{W}})$ .

**Définition 2.2.** On désigne par  $V_0$  l'ensemble, ordonné suivant les indices croissants, des points fixes de la famille :  $\{T_0, \dots, T_{N_b-1}\}$ . L'ensemble des points  $V_0$  constitue un graphe orienté, que l'on désigne par  $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ .  $V_0$  est appelé ensemble des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ .

Pour tout entier naturel non nul  $m$ , on pose :  $V_m = \bigcup_{i=0}^{N_b-1} T_i(V_{m-1})$ .

L'ensemble des points  $V_m$  constitue un graphe orienté, que l'on désigne par  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ .  $V_m$  est appelé ensemble des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ . On désignera, dans ce qui suit, par  $\mathcal{N}_m^S$  le nombre de sommets

du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , et on écrit :  $V_m = \{\mathcal{S}_0^m, \mathcal{S}_1^m, \dots, \mathcal{S}_{N_b^m-1}^m\}$ . Enfin, pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, N_b - 1\}$ , on désigne par :  $P_i = (x_i, y_i) = \left( \frac{i}{N_b - 1}, \frac{1}{1 - \lambda} \cos\left(\frac{2\pi i}{N_b - 1}\right) \right)$  le point fixe de la contraction  $T_i$ .

**Propriété 2.4.** Pour tout  $i$  de  $\{i = 0, \dots, N_b - 2\}$  :  $T_i(P_{N_b-1}) = T_{i+1}(P_0)$ .

**Propriété 2.5.** Pour tout entier naturel  $m$ , on désigne par  $\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}$  le nombre de sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ . Alors, la suite  $(\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}})_{m \in \mathbb{N}}$  est arithmético-géométrique, de premier terme  $\mathcal{N}_0^{\mathcal{S}} = N_b$ .

**Propriété 2.6.** Pour tout entier naturel  $m$ , les  $\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}$  sommets consécutifs du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$  sont, aussi, les sommets de  $N_b^m$  polygones  $\mathcal{P}_{m,j}$ ,  $0 \leq j \leq N_b^m - 1$  à  $N_b$  côtés, qui constituent une tribu borélienne de  $\mathbb{R}^2$ .

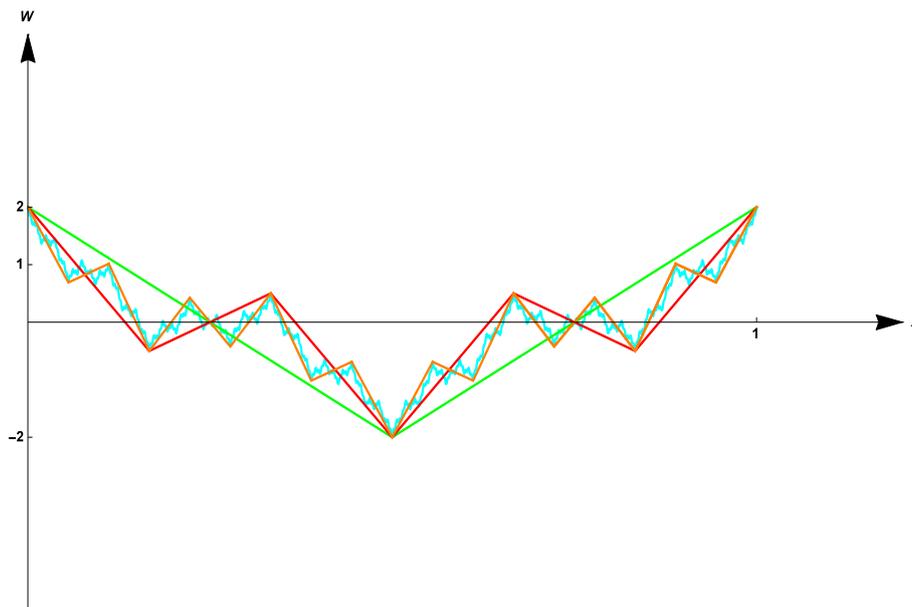


FIGURE 1 – Les graphes  $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$  (en vert),  $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$  (en rouge),  $\Gamma_{\mathcal{W}_2}$  (en orange),  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  (en cyan), dans le cas où  $\lambda = \frac{1}{2}$ , et  $N_b = 3$ .

**Définition 2.3. Sommets consécutifs sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$**

Deux points  $X$  et  $Y$  de  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  sont appelés **sommets consécutifs** du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  s'il existe un entier naturel  $m$ , et un entier  $j$  de  $\{0, \dots, N_b - 2\}$ , tels que :

$$X = (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_m})(P_j) \quad \text{et} \quad Y = (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_m})(P_{j+1}) \quad \{i_1, \dots, i_m\} \in \{0, \dots, N_b - 1\}^m$$

ou :  $X = (T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \dots \circ T_{i_m})(P_{N_b-1}) \quad \text{et} \quad Y = (T_{i_1+1} \circ T_{i_2} \circ \dots \circ T_{i_m})(P_0)$ .

**Définition 2.4. Relation d'adjacence sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$**

Etant donné un entier naturel  $m$ , deux points  $X$  et  $Y$  de  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$  sont dits **adjacents** si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont deux sommets consécutifs de  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ . On écrit alors :  $X \underset{m}{\sim} Y$ .

Cette relation d'adjacence conduit à l'existence d'un mot :  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m)$ , de longueur  $|\mathcal{M}| = m$ , sur les lettres-nombres  $\mathcal{M}_i$  prenant leurs valeurs dans l'ensemble des entiers  $\{0, \dots, N_b - 1\}$ , telles que  $X$  et  $Y$  appartiennent tous deux à l'itéré :  $T_{\mathcal{M}} V_0 = (T_{\mathcal{M}_1} \circ \dots \circ T_{\mathcal{M}_m}) V_0$ .

Pour tout entier naturel  $m$ , les sommets successifs de l'itéré précédent constituent une suite de  $N_b^m$  polygones comportant chacun  $N_b$  côtés. Les polygones successifs de cette suite seront notés  $\mathcal{P}_i^m$ ,  $0 \leq i \leq N_b^m - 1$ . Etant donnés deux points  $X$  et  $Y$  du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , on dira que  $X$  et  $Y$  sont **adjacents** si et seulement si il existe un entier naturel  $m$  tel que :  $X \underset{m}{\sim} Y$ .

**Proposition 2.7. Adresses sur le graphe de la fonction de Weierstrass**

Etant donné un entier naturel non nul  $m$ , et un mot  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m)$  de longueur  $m \in \mathbb{N}^*$ , sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , pour tout entier  $j$  de  $\{1, \dots, N_b - 2\}$ , tout  $X = T_{\mathcal{M}}(P_j)$  de  $V_m \setminus V_0$ , i.e. distinct de l'un des  $N_b$  points fixes  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq N_b - 1$ , possède exactement deux sommets adjacents, donnés par :

$$T_{\mathcal{M}}(P_{j+1}) \quad \text{et} \quad T_{\mathcal{M}}(P_{j-1})$$

avec :  $T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}_1} \circ \dots \circ T_{\mathcal{M}_m}$ . Par convention, les sommets adjacents de  $T_{\mathcal{M}}(P_0)$  sont  $T_{\mathcal{M}}(P_1)$  et  $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-1})$ , et ceux de  $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-1})$ ,  $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-2})$  et  $T_{\mathcal{M}}(P_0)$ .

**Propriété 2.8.** L'ensemble des sommets  $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ .

**Définition 2.5. Forme de Dirichlet sur un ensemble fini** (voir l'article séminal de [14], ou l'ouvrage [15], ainsi que [16])

Etant donné un ensemble fini  $V$ , muni du produit scalaire usuel qui, à tout couple de fonctions  $(u, v)$  définies sur  $V$ , associe :  $(u, v) = \sum_{p \in V} u(p) v(p)$ , une **forme de Dirichlet** sur  $E$  est une forme bilinéaire symétrique  $\mathcal{E}$ , telle que :

1. Pour toute fonction  $u$  définie sur  $V$ , à valeurs réelles :  $\mathcal{E}(u, u) \geq 0$ .
2.  $\mathcal{E}(u, u) = 0$  si et seulement si  $u$  est constante sur  $V$ .
3. Pour toute fonction  $u$  définie sur  $V$ , si on définit :  $u_{\star} = \min(\max(u, 0), 1)$ , alors :  $\mathcal{E}(u_{\star}, u_{\star}) \leq \mathcal{E}(u, u)$  (propriété de Markov).

**Définition 2.6. Energie associée à un couple de fonctions, sur un graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$**

Soit  $m$  un entier naturel  $m$ , et  $u$  et  $v$  deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur l'ensemble  $V_m = \{\mathcal{S}_0^m, \mathcal{S}_1^m, \dots, \mathcal{S}_{N_m-1}^m\}$  des  $\mathcal{N}_m$  sommets de  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ . L'énergie, sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , associée au couple de fonctions  $(u, v)$ , est :  $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u, v) = \sum_{i=0}^{N_m-2} (u(\mathcal{S}_i^m) - u(\mathcal{S}_{i+1}^m)) (v(\mathcal{S}_i^m) - v(\mathcal{S}_{i+1}^m)) = \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (u(X) - u(Y)) (v(X) - v(Y))$ .

**Propriété 2.9.** Etant donné un entier naturel  $m$ , et une fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sommets de  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , l'application qui, à tout couple de fonctions  $(u, v)$ , à valeurs réelles, définies sur l'ensemble  $V_m$  des  $\mathcal{N}_m$  sommets de  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , associe :  $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u, v) = \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (u(X) - u(Y)) (v(X) - v(Y))$  est une forme de Dirichlet sur  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ . De plus :  $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u, u) = 0 \Leftrightarrow u$  est constante.

**Proposition 2.10. Extension harmonique d'une fonction, sur le graphe de la fonction de Weierstrass**

Pour tout entier naturel non nul  $m$ , étant donnée une fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur  $V_{m-1}$ , son extension harmonique, notée  $\tilde{u}$ , est obtenue comme le prolongement de  $u$  à  $V_m$  qui minimise l'énergie :  $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(\tilde{u}, \tilde{u}) = \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2$ .

Le lien entre  $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}$  et  $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}}$  est obtenu grâce à l'introduction de deux constantes réelles strictement positives  $r_m$  et  $r_{m+1}$  telles que :  $r_m \sum_{X \sim_m Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2 = r_{m-1} \sum_{X \sim_{m-1} Y} (u(X) - u(Y))^2$ .

On notera désormais :  $\mathcal{E}_m(u) = r_m \sum_{X \sim_m Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2$ . On fixera, dans ce qui suit, la valeur de la constante initiale :  $r_0 = 1$ . La détermination de l'extension harmonique d'une fonction étant un problème local, sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$ , relié au graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$  par un procédé identique à celui qui relie  $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$  à  $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ , on en déduit, pour tout entier naturel  $m$  :  $r_m = r_1^m r_0 = r^{-m}$ .

Si  $v$  est une fonction à valeurs réelles, définie sur  $V_{m-1}$ , d'extension harmonique  $\tilde{v}$ , on écrira :

$$\mathcal{E}_m(u, v) = r^{-m} \sum_{X \sim_m Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y)) (\tilde{v}(X) - \tilde{v}(Y))$$

Pour plus de précisions sur la construction et l'existence d'extensions harmoniques, on renvoie à [13].

**Définition 2.7.** Forme de Dirichlet associée à un couple de fonctions définies et continues, sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$

On définit la forme de Dirichlet  $\mathcal{E}$  qui, à tout couple  $(u, v)$  de fonctions, à valeurs réelles, continues, définies sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , associe :

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_m(u, v) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{X \sim_m Y} r^{-m} (u(X) - u(Y)) (v(X) - v(Y))$$

**Propriété 2.11.** La forme de Dirichlet  $\mathcal{E}$  qui, à tout couple  $(u, v)$  de fonctions, à valeurs réelles, définies et continues sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , associe :

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_m(u, v) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{X \sim_m Y} c_m (u(X) - u(Y)) (v(X) - v(Y))$$

vérifie la relation d'auto-similarité :  $\mathcal{E}(u, v) = r^{-1} \sum_{i=0}^{N_b-1} \mathcal{E}(u \circ T_i, v \circ T_i)$ .

**Définition 2.8.** Énergie normalisée, associée à une fonction  $u$ , définie et continue sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$

La suite  $(\mathcal{E}_m(u))_{m \in \mathbb{N}}$  étant définie sur  $V_\star = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ , on définit l'énergie normalisée, associée à une fonction  $u$ , définie et continue sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , par :  $\mathcal{E}(u) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_m(u)$ .

**Notation.** On désignera par  $\text{dom } \mathcal{E}$  le sous-espace des fonctions continues sur  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , telles que :  $\mathcal{E}(u) < +\infty$ , et par  $\text{dom}_0 \mathcal{E}$  le sous-espace des fonctions continues sur  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , s'annulant sur  $V_0$ , telles que :  $\mathcal{E}(u) < +\infty$ .

## 2.2 Construction pratique des formes de Dirichlet - Valeur des constantes de normalisation

Dans ce qui suit,  $u$  est une fonction définie sur  $V_0$ . On s'intéresse, dans un premier temps, à son extension harmonique  $\tilde{u}$  à  $V_1$ , qui minimise  $\mathcal{E}_{\Gamma_1}(u, u)$ . Pour alléger les écritures, on pose, pour tout couple d'entiers  $(i, j) \in \{0, \dots, N_b - 1\}^2$  :  $u_j^i = \tilde{u}(T_i(P_j))$  ,  $u_i = u_i^i = u(P_i)$ .

Comme  $\mathcal{E}_{\Gamma_1}(u, u) = \sum_{i=0}^{N_b-1} \sum_{j=0}^{N_b-2} (u_j^i - u_{j+1}^i)^2$ , le procédé de minimisation de la fonction quadratique  $\mathcal{E}_{\Gamma_1}(u, u)$  décrit plus haut invite à chercher les  $u_j^i$ ,  $i \in \{0, \dots, N_b - 1\}$ ,  $i \in \{0, \dots, N_b - 2\}$ ,  $j \neq i$ , parmi les points critiques de la fonction :  $(u_j^i)_{\substack{i \in \{0, \dots, N_b - 1\} \\ j \in \{0, \dots, N_b - 2\}, \\ j \neq i}} \mapsto \sum_{i=0}^{N_b-1} \sum_{j=0}^{N_b-2} (u_j^i - u_{j+1}^i)^2$ .

On se ramène donc à la détermination du noyau de matrices réelles de taille  $(N_b - 1) \times (N_b + 1)$ , de la forme :

$$L_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient :  $\mathcal{E}_{\Gamma_1}(u, u) = \frac{1}{N_b} \mathcal{E}_{\Gamma_0}(u, u)$ . Ainsi :  $r = N_b$ . On itère le procédé pour les ordres suivants.

### 3 Le laplacien, sur le graphe de la fonction de Weierstrass

#### 3.1 Construction théorique

**Propriété 3.1. Construction d'une mesure auto-similaire, pour le graphe de la fonction de Weierstrass**

*J.E. Hutchinson (voir [19]) a introduit, dans le cas d'un système de fonctions itérées  $\{T_0, \dots, T_{N_b-1}\}$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ , la notion de mesure auto-similaire par rapport à un ensemble de référence, de mesure 1, sous la forme :*

$$\mu = \sum_{i=0}^{N_b-1} \mu_i \mu \circ T_i^{-1}$$

où  $(\mu_i)_{0 \leq i \leq N_b-1}$  est une famille de poids strictement positifs dont la somme vaut 1.

*R.S. Strichartz (voir [20]) a montré que l'on peut ne considérer que des mesures auto-répliquantes  $\mu$ , telles que  $\tilde{\mu} = \sum_{i=0}^{N_b-1} \tilde{\mu}_i \tilde{\mu} \circ T_i^{-1}$ , où  $(\tilde{\mu}_i)_{0 \leq i \leq N_b-1}$  est une famille de poids strictement positifs.*

*C'est cette dernière approche qui convient à notre étude, puisque, dans le cas du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , l'ensemble initial est constitué par les sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ , qui constituent un polygone  $\mathcal{P}_0$ , dont la mesure, qui est l'aire du polygone, n'est pas nécessairement égale à 1.*

*La relation  $(\star)$  conduit, pour toute famille de polygones  $\mathcal{P}_{m,j}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq j \leq N_b^m - 1$  à  $N_b$  côtés :*

$$\tilde{\mu} \left( \bigcup_{0 \leq j \leq N_b^m - 1} \mathcal{P}_{m,j} \right) = \sum_{i=0}^{N_b-1} \tilde{\mu}_i \tilde{\mu} \left( T_i^{-1} \left( \bigcup_{0 \leq j \leq N_b^m - 1} \mathcal{P}_{m,j} \right) \right)$$

*et, en particulier :  $\tilde{\mu}(T_0(\mathcal{P}_0) \cup T_1(\mathcal{P}_0) \cup T_2(\mathcal{P}_0)) = \sum_{i=0}^{N_b-1} \tilde{\mu}_i \tilde{\mu}(\mathcal{P}_0)$ .*

*Il suffit donc de prendre, pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, N_b - 1\}$  :  $\tilde{\mu}_i = \frac{\tilde{\mu}(T_i(\mathcal{P}_0))}{\tilde{\mu}(\mathcal{P}_0)}$ . Si  $\mu_{\mathcal{L}}$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ , le choix  $\tilde{\mu} = \mu_{\mathcal{L}}$  convient. On peut, à partir de la mesure  $\tilde{\mu}$ , construire la mesure auto-*

similaire  $\mu$ , telle que :  $\mu = \sum_{i=0}^{N_b-1} \mu_i \mu \circ T_i^{-1}$ , où, pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, N_b - 1\}$  :  $\mu_i = \frac{\tilde{\mu}(T_i(\mathcal{P}_0))}{\sum_{j=0}^{N_b-1} \tilde{\mu}(T_j(\mathcal{P}_0))}$ .

**Définition 3.1. Laplacien d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$**

Pour tout entier naturel non nul  $m$ , et toute fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble  $V_m$  des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , on introduit le laplacien d'ordre  $m$ ,  $\Delta_m(u)$ , par :

$$\Delta_m u(X) = \sum_{Y \sim_m X} (u(X) - u(Y))^2 \quad \forall X \in V_m \setminus V_0$$

**Définition 3.2. Fonction harmonique d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$**

Soit  $m$  un entier naturel non nul  $m$ . Une fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble  $V_m$  des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , est dite harmonique d'ordre  $m$  si son laplacien d'ordre  $m$  est nul :

$$\Delta_m u(X) = 0 \quad \forall X \in V_m \setminus V_0$$

**Définition 3.3. Fonction harmonique par morceaux d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$**

Etant donné un entier naturel non nul  $m$ , et une fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , est dite harmonique par morceaux d'ordre  $m$  si, pour tout mot  $\mathcal{M}$  de longueur  $m$ ,  $u \circ T_{\mathcal{M}}$  est harmonique d'ordre  $m$ .

**Théorème 3.2. Une définition alternative du laplacien (voir [14])**

Soit  $u \in \text{dom} \mathcal{E}$ . Alors :  $\mathcal{E}(u, v) = - \int_{\Gamma_{\mathcal{W}}} v \Delta u \, d\mu$  pour tout  $v \in \text{dom}_0 \mathcal{E}$ .

**Propriété 3.3.** Soit  $m$  un entier naturel non nul,  $X \notin V_0$  un sommet du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , et  $\psi_X^m$  une fonction d'interpolation sur l'ensemble  $V_m$  des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$  telle que :

$$\psi_X^m(Y) = \delta_{XY} \quad \forall Y \in V_m \quad , \quad \text{où} \quad \delta_{XY} = \begin{cases} 1 & \text{si } X = Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, comme  $X \notin V_0$  :  $\psi_X^m \in \text{dom}_0 \mathcal{E}$ .

La définition (3.2) appliquée à  $\psi_X^m$  conduit à :

$$\mathcal{E}(u, \psi_X^m) = \mathcal{E}_m(u, \psi_X^m) = -r^{-m} \Delta_m u(X) = - \int_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}} \psi_X^m \Delta u \, d\mu \approx -\Delta u(X) \int_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}} \psi_X^m \, d\mu$$

puisque,  $\Delta u$  étant continu sur  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , et le support de la fonction d'interpolation  $\psi_X^m$  étant proche de  $X$  :

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}} \psi_X^m \Delta u \, d\mu \approx -\Delta u(X) \int_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}} \psi_X^m \, d\mu$$

En passant à la limite lorsque l'entier  $m$  tend vers l'infini, on en déduit :

$$\Delta u(X) = \lim_{m \rightarrow +\infty} r^{-m} \left( \int_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}} \psi_X^m \, d\mu \right)^{-1} \Delta_m u(X)$$

### Définition 3.4. Continuité du laplacien sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

La suite des graphes  $(\Gamma_{\mathcal{W}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  étant dense dans  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , toute fonction continue sur  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  est définie par ses restrictions sur les graphes  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . En particulier, étant donnée une fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , son laplacien  $\Delta u$  est continu sur  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ .

### Définition 3.5. Fonction harmonique

Une fonction  $u$ , à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sommets du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , est dite harmonique si son laplacien est nul.

## 3.2 Construction explicite

La construction explicite de l'extension harmonique d'une fonction  $u$  dont on connaît les valeurs sur  $V_0$  requiert de connaître :  $\int_{\Gamma_{\mathcal{W}}} \psi_X^m d\mu$ . Comme expliqué dans [18], il suffit de raisonner par analogie avec la dimension 1. Etant donné un entier naturel non nul  $m$ , et un sommet  $X$  du graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ , les deux configurations qui se présentent sont :

- i.* le sommet  $X$  appartient à un et un seul polygone à  $N_b$  côtés,  $\mathcal{P}_{m,j}$ ,  $0 \leq j \leq N_b^m - 1$ . Dans ce cas, si on considère les fonctions d'interpolation  $\psi_Z^m$  associées aux  $N_b - 1$  sommets distincts de  $X$  de ce polygone :

$$\sum_{Z \text{ sommet de } \mathcal{P}_{m,j}} \int_{\Gamma_{\mathcal{W}}} \psi_Z^m d\mu = \mu(\mathcal{P}_{m,j})$$

soit, par symétrie :  $\int_{\Gamma_{\mathcal{W}}} \psi_X^m d\mu = \frac{1}{N_b} \mu(\mathcal{P}_{m,j})$ .

- ii.* le sommet  $X$  est le point d'intersection de deux polygones à  $N_b$  côtés,  $\mathcal{P}_{m,j}$  et  $\mathcal{P}_{m,j+1}$ ,  $0 \leq j \leq N_b^m - 2$ .

Il faut alors prendre en compte les contributions de ces deux polygones, ce qui conduit à :

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{W}}} \psi_X^m d\mu = \frac{1}{2N_b} \{ \mu(\mathcal{P}_{m,j}) + \mu(\mathcal{P}_{m,j+1}) \}$$

## Références

- [1] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpiński spaces, Japan J. Appl. Math., **8** (1989), pages 259-290.
- [2] J. Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, Trans. Amer. Math. Soc., **335**(1993), pages 721-755.
- [3] K. Weierstrass, Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, 1967, in Karl Weierstrass Mathematische Werke, Abhandlungen II, Johnson, Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18 Juli 1872, **2**, pages 71-74.
- [4] G.H. Hardy, Theorems Connected with Maclaurin's Test for the Convergence of Series, Proc. London Math. Soc., 1911, s2-9 (1), pages 126-144.
- [5] E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Second edition, Oxford University Press, 1939, pages 351-353.
- [6] R. S. Strichartz, Analysis on fractals, Notices of the AMS, **46**(8), 1999, pages 1199-1208.

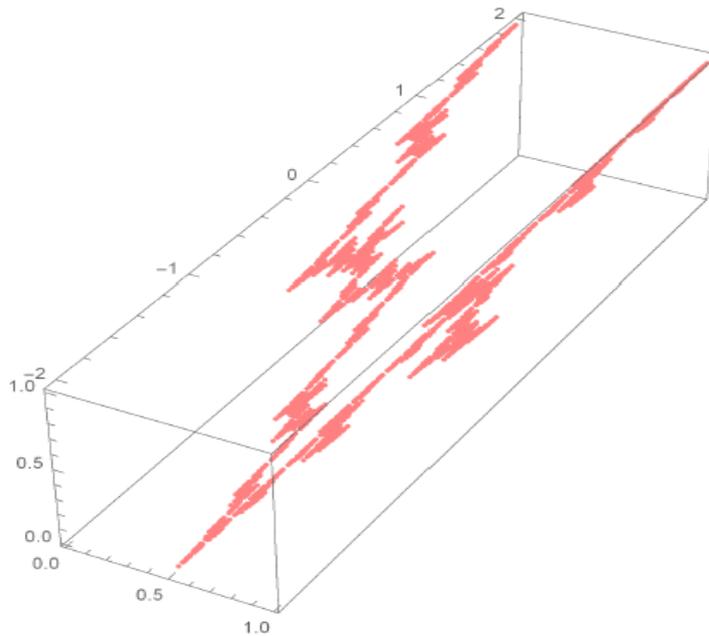


FIGURE 2 – Le graphe d’une fonction harmonique sur le graphe  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  de la fonction de Weierstrass, de valeurs données sur  $V_0$ , dans le cas où  $\lambda = \frac{1}{2}$ , et  $N_b = 3$ .

- [7] J. Kigami, R. S. Strichartz, K. C. Walker, Constructing a Laplacian on the Diamond Fractal, A. K. Peters, Ltd, Experimental Mathematics, **10**(3), pages 437-448.
- [8] B. B. Mandelbrot, Fractals : form, chance, and dimension, San Francisco : Freeman, 1977.
- [9] K. Falconer, The Geometry of Fractal Sets, 1985, Cambridge University Press, pages 114-149.
- [10] B. Hunt, The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (3), 1998, pages 791-800.
- [11] M. F. Barnsley, S. Demko, Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals, The Proceedings of the Royal Society of London, **A**(399), 1985, pages 243-275.
- [12] M.V. Berry, and Z.V. Lewis, On the Weierstrass-Mandelbrot function, Proc. R. Soc. Lond., **A**(370), 1980, pages 459-484.
- [13] C. Sabot, Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals, Annales scientifiques de l’É.N.S. 4 e série, **30**(4), 1997, pages 605-673.
- [14] A. Beurling, J. Deny, Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire, Acta Mathematica, **99** (1), 1985, pages 203-224.
- [15] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, Dirichlet forms and symmetric Markov processes, 1994, Walter de Gruyter & Co.
- [16] J. Kigami, Harmonic Analysis for Resistance Forms, Journal of Functional Analysis, **204**, 2003, pages 399-444.
- [17] N. Riane, 2016, Autour du Laplacien sur des domaines présentant un caractère fractal, Mémoire de recherche, M2 Mathématiques de la modélisation, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6.
- [18] R. S. Strichartz, Differential Equations on Fractals, A tutorial, Princeton University Press, 2006.
- [19] J.E. Hutchinson, Fractals and self similarity, Indiana University Mathematics Journal 30, 1981, pages 713-747.
- [20] R. S. Strichartz, A. Taylor and T. Zhang, Densities of Self-Similar Measures on the Line, Experimental Mathematics, **4**(2), 1995, pages 101-128.