



Sur la construction de grandes solutions pour des équations de Schrödinger de type “ masse critique ”

Jean-Yves Chemin, Claire David

► To cite this version:

Jean-Yves Chemin, Claire David. Sur la construction de grandes solutions pour des équations de Schrödinger de type “ masse critique ”. Séminaire Laurent Schwartz - EDP et applications, 2013. hal-01448876

HAL Id: hal-01448876

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01448876>

Submitted on 29 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la construction de grandes solutions pour des équations de Schrödinger de type « masse critique »

Jean-Yves Chemin, Claire David

29 mai 2014

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

Résumé

Le but de cet article est de construire une application continue de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans l'ensemble, noté $\mathcal{G}$, des données initiales engendrant des solutions globales de l'équation non-linéaire de Schrödinger bidimensionnelle « masse critique ». À cet effet, nous utilisons le fait que des solutions d'échelles suffisamment différentes n'interagissent quasiment pas, et nous déterminons la condition devant alors être vérifiée par ces échelles.

1 Introduction

Soit P_3 un polynôme homogène de degré trois sur $\mathbb{C}^2$, quelconque. On s'intéresse, ici, à l'ensemble $\mathcal{G}$ des données initiales de l'équation de Schrödinger semi-linéaire suivante, posée dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u &= P_3(\bar{u}, u) \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{cases} \quad (1)$$

qui génèrent des solutions globales. Le changement d'échelle $u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ permet d'observer que, si u est solution, u_λ l'est aussi. En dimension deux d'espace, la norme L^2 , qui représente ici la masse, est invariante d'échelle pour la donnée initiale. La famille d'équations précédente est donc dite « masse critique ».

Les estimations de Strichartz pour l'opérateur de Schrödinger en dimension deux affirment que, pour tout intervalle $I = (I^-, I^+)$ de $\mathbb{R}$, et pour tout couple d'indices $(p_j, q_j)_{1 \leq j \leq 2}$ tels que $\frac{2}{p_j} + \frac{2}{q_j} = 1$ et différent du couple $(2, \infty)$, on a

$$\|u\|_{L^{p_1}(I; L^{q_1}(\mathbb{R}^2))} \lesssim \|u(I^-)\|_{L^2} + \|i\partial_t u + \Delta u\|_{L^{p'_2}(I; L^{q'_2}(\mathbb{R}^2))}. \quad (2)$$

Ces estimations permettent de démontrer par un argument de contraction classique, le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit u_0 une fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Il existe un unique temps T^* maximal, associé à une unique solution u de (1) dans l'espace $C([0, T^*]; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^3_{\text{loc}}([0, T^*]; L^6(\mathbb{R}^2))$. De plus :*

$$T^* < \infty \implies \int_0^{T^*} \|u(t, \cdot)\|_{L^6}^3 dt = \infty.$$

Enfin, il existe un réel ρ strictement positif tel que, si $\|u_0\|_{L^2} < \rho$, alors $T^ = \infty$, et la solution u appartient à la boule de centre 0 et de rayon 2ρ de $L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))$.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à [2].

On se propose d'établir, dans ce qui suit, une propriété de l'ensemble $\mathcal{G}$ des données initiales dans L^2 qui génèrent une solution globale appartenant à l'espace $L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))$. Remarquons qu'un argument de perturbation classique permet d'affirmer que $\mathcal{G}$ est un ouvert de l'espace $L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))$. L'objectif de ce texte est la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.2. *Il existe une application continue F de $L^2(\mathbb{R}^2)$, à valeurs dans $\mathcal{G}$, telle que*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \frac{1}{C} \|u\|_{L^2} \leq \|F(u)\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}.$$

Deux cas particuliers de polynômes P_3 ont été particulièrement étudiés en raison de leur pertinence physique et de la richesse de leur structure : le cas dit défocalisant, où $P_3(z, \bar{z}) = -|z|^2 z$, et le cas focalisant, où $P_3(z, \bar{z}) = |z|^2 z$. B. Dodson a démontré le théorème suivant (voir [3] et [4]).

Théorème 1.3. *Dans le cas défocalisant, l'équation (1) génère, pour toute donnée initiale u_0 , une solution globale. Dans le cas focalisant, c'est aussi le cas pour toute donnée initiale dont la masse est plus petite que celle de l'état fondamental Q , solution de masse minimale de l'équation*

$$-Q + \Delta Q = -|Q|^2 Q.$$

De plus, dans les deux cas, la solution globale u appartient à l'espace $L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))$.

En outre, dans le cas focalisant, on sait qu'il existe des données initiales explosives, c'est-à-dire n'appartenant pas à $\mathcal{G}$. De nombreux travaux étudient l'allure de l'ensemble $\mathcal{G}$ au voisinage de l'état fondamental Q , qui génère une solution globale, périodique en temps, donnée par $u(t, x) = e^{it} Q$ (voir en particulier [5] et [7]).

L'idée de la construction de la fonctionnelle $F(u)$ est la suivante : on commence par rendre petite la fonction u par homothétie de rapport α et, ensuite, on somme N dilatées de cette fonction ainsi rendue petite. Ensuite, si les dilatations sont assez grandes, et l'entier N bien choisi, la norme L^2 de $F(u)$ est équivalente à celle de u . Enfin, pour des dilatations suffisamment grandes, la solution associée à $F(u)$ ressemble à la somme des solutions associées à chaque dilatée de αu en vertu du principe suivant lequel des solutions d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires n'interagissent que très peu si les échelles sont très différentes. Cette idée est très classique. Quantifier les paramètres de façon continue par rapport à la fonction u de départ ne l'est pas.

Pour conclure cette introduction, nous voudrions faire remarquer que cette méthode est de peu d'intérêt pour toute équation de Schrödinger du type

$$i\partial_t u + \Delta u = P_k(u, \bar{u})$$

où P_k désigne un polynôme homogène de degré k strictement supérieur à 3 (ou bien à $1 + 4/d$ en dimension d d'espace). Dans ce cas, F. Planchon a démontré, dans [8] que, si la norme dans l'espace de Besov $B_{2,\infty}^{s_c}$ est petite, alors l'équation ci-dessus est globalement bien posée, dans le cas où $s_c \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - \frac{2}{p-1}$ est strictement positif. Dans le cas des espaces de Besov de troisième indice infini, on peut démontrer que, pour Λ assez grand, on a

$$\left\| \sum_{j=0}^N \Lambda^{-\frac{2}{p-1}} v(\Lambda^{-1} \cdot) \right\|_{B_{2,\infty}^{s_c}} \sim \|v\|_{B_{2,\infty}^{s_c}}.$$

Le procédé décrit ci-dessus peut, simplement, conduire à construire une application F continue de H^{s_c} dans H^{s_c} telle que $\|F(u)\|_{H^{s_c}}$ soit équivalente à $\|u\|_{H^{s_c}}$, et telle que $F(u)$ appartienne à une petite boule de $B_{2,\infty}^{s_c}$. Du point de vue des équations aux dérivées partielles, l'intérêt est faible, puisque l'on peut appliquer directement à $F(u)$ un théorème d'existence globale.

Cette remarque vaut aussi pour l'équation de Navier-Stokes incompressible en dimension trois, qui est globalement bien posée, en particulier, pour des données petites dans $B_{2,\infty}^{\frac{1}{2}}$.

Remarquons qu'un résultat non publié de P. Gérard (voir [9] pour un énoncé du théorème) affirme que si la norme d'une donnée initiale $L^2(\mathbb{R}^2)$ est petite dans l'espace de Besov homogène $B_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)$, alors elle génère une solution globale dans l'espace $L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))$. Nous vérifierons qu'il est possible d'assurer que la fonction F n'envoie pas $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans une petite boule de $B_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)$.

2 Structure de la preuve

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'idée est de ramener, par homothétie, la donnée initiale dans la petite boule d'existence globale, puis de recopier, un nombre suffisant de fois, en la dilatant, cette donnée initiale ainsi rendue petite. Introduisons, pour p dans $[1, \infty[$, la notation suivante :

$$\forall v \in L^2(\mathbb{R}^d), \pi_{\mathbb{S}}^{(p)} v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{\|v\|_{L^p}} \quad \text{et} \quad \pi_{\mathbb{S}} = \pi_{\mathbb{S}}^{(2)}.$$

Nous allons, dans un premier temps, définir une fonction sur $L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, qui précise le procédé décrit ci-dessus.

Definition 2.1. *Considérons une fonction régulière χ , définie sur $\mathbb{R}^+$ et telle que*

$$\chi|_{[0, \frac{1}{4}]} = 0 \quad \text{et} \quad \chi|_{[\frac{3}{4}, +\infty[} = 1.$$

On définit l'application $\mathcal{F}$ de $L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}_+^ \times \mathbb{R}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la façon suivante :*

$$\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda) = \sum_{j=0}^{[\lambda]} \Lambda^{-j} v(\Lambda^{-j} \cdot) + \chi(\lambda - [\lambda]) \Lambda^{-[\lambda]-1} v(\Lambda^{-[\lambda]-1} \cdot).$$

Les propriétés principales de $\mathcal{F}$ sont données dans les deux propositions suivantes.

Proposition 2.1. *L'application $\mathcal{F}$ est continue de $L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. De plus, il existe une constante strictement positive C , et une fonction continue Λ_0 de $]1, +\infty[\times \mathbb{S}(L^2(\mathbb{R}^2))$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction v non nulle, on ait*

$$\Lambda \geq \Lambda_0(\lambda + 1, \pi_{\mathbb{S}} v) \implies \frac{1}{C}(\lambda + 1) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C(\lambda + 1) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (3)$$

Cette proposition traduit essentiellement le fait que des fonctions d'échelles suffisamment différentes sont presque orthogonales dans L^2 . Le point essentiel de cette proposition est que le choix de la taille des échelles peut être fait continûment par rapport à la fonction v .

Proposition 2.2. *Soit B_ρ la boule de rayon ρ centrée en l'origine. Il existe une fonction continue Λ_1 de $]1, \infty[\times B_\rho$ dans $]0, +\infty[$ telle que, pour tout v de B_ρ ,*

$$\Lambda \geq \Lambda_1(\lambda + 1, v) \implies \mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{G}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur l'idée selon laquelle deux solutions d'une équation aux dérivées partielles semi-linéaire, d'échelles suffisamment différentes, n'interagissent presque pas. À nouveau, il est important de remarquer que le choix de la taille de la dilation peut être fait continûment par rapport à la fonction v .

Ces deux propositions impliquent le théorème 1.2. En effet, si ρ est un réel strictement positif tel que la boule de $L^2(\mathbb{R}^2)$ de rayon ρ centrée à l'origine soit incluse dans $\mathcal{G}$, il suffit de poser

$$\begin{aligned} F(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \chi\left(\frac{\|v\|_{L^2}}{\rho}\right)\right)v + \chi\left(\frac{\|v\|_{L^2}}{\rho}\right)\mathcal{F}(\rho \pi_{\mathbb{S}} v, \Lambda(v), \|v\|_{L^2}) \quad \text{avec} \\ \Lambda(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_0(\|v\|_{L^2}^2 + 1, \pi_{\mathbb{S}} v) + \Lambda_1(\|v\|_{L^2}^2 + 1, \rho \pi_{\mathbb{S}} v). \end{aligned}$$

et d'appliquer les deux propositions ci-dessus.

Le principe de la démonstration de la proposition 2.1 est élémentaire : on développe la quantité $\|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{L^2}^2$, et on montre que les termes croisés sont suffisamment petits grâce au lemme suivant.

Lemme 2.3. Désignons par $\mathbb{S}(L^p(\mathbb{R}^d))$ la sphère unité de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour tout p de $]1, +\infty[$, il existe une fonction continue Λ_p de $]0, 1[\times \mathbb{S}(L^p(\mathbb{R}^d)) \times \mathbb{S}(L^{p'}(\mathbb{R}^d))$ telle que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\Lambda \geq \Lambda_p(\varepsilon, \pi_{\mathbb{S}}^{(p)} f, \pi_{\mathbb{S}}^{(p')} g) \implies \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} g(\Lambda^{-1}x) dx \right| \leq \varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

Si on s'affranchit de la continuité, cette preuve est des plus simples et des plus classiques : il suffit d'approcher à ε près les fonctions $\pi_{\mathbb{S}}^{(p)} f$ et $\pi_{\mathbb{S}}^{(p')} g$ respectivement dans L^p et $L^{p'}$ par leurs troncatures dans des couronnes assez grandes. On choisit alors Λ en fonction des rayons des couronnes, pour que l'intégrale relative aux fonctions ainsi tronquées soit nulle. Le choix de la troncature peut-il être fait de manière continue par rapport à la fonction ? La réponse est, en général, non, comme l'illustre le dessin suivant :

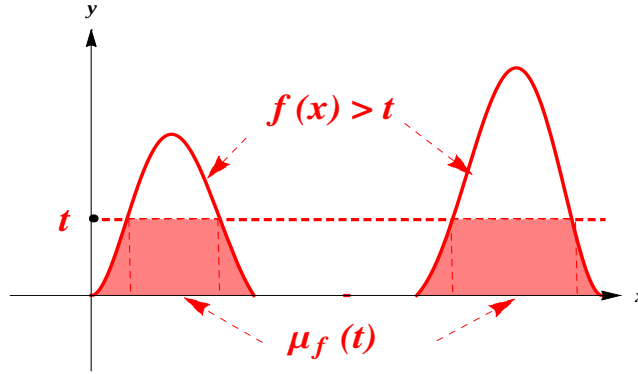


FIGURE 1 – Le graphe d'une fonction f à valeurs positives, mesurable.

Par contre, si la fonction est radiale décroissante, cela devient possible. Le recours à la théorie du réarrangement décroissant prend alors tout son sens, et permet de se ramener à ce type de fonctions.

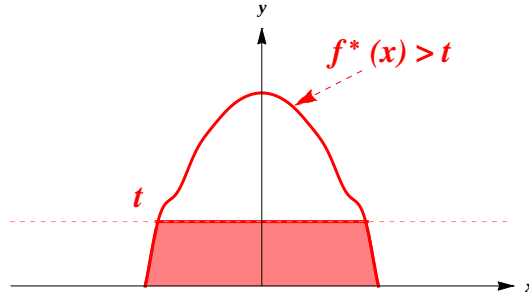


FIGURE 2 – Le graphe du réarrangement décroissant f^*

La section 3 est, tout d'abord, consacrée à de rapides rappels sur la définition et quelques propriétés fondamentales du réarrangement décroissant. On démontre, ensuite, le lemme 2.3, qui permet de tronquer continûment les réarrangées. Une fois ce lemme démontré, on prouve la proposition 2.1.

La section 4 est consacrée à la démonstration de la proposition 2.2. Là encore, le lemme 2.3 joue un grand rôle dans la preuve de la continuité.

La section 5 est consacrée à la démonstration du fait que la fonction F n'est pas petite dans l'espace de Besov $B_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)$.

Nous concluons ce texte par un appendice rappelant les démonstrations des résultats de base que nous utilisons sur le réarrangement décroissant.

3 Le réordonnement décroissant et la presque orthogonalité

Dans toute la première partie de cette section, nous travaillons dans l'espace $\mathbb{R}^d$. Commençons par définir quelques notations qui nous utiliserons dans la suite. Étant donnée une fonction mesurable f , on note

$$(f > t) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d / f(x) > t\} \quad \text{et} \quad (f \leq t) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d / f(x) \leq t\}.$$

Nous pouvons maintenant définir la réarrangée décroissante, pour des fonctions dites nulles à l'infini, c'est-à-dire pour telles que, pour tout réel strictement positif t , l'ensemble $(|f| > t)$ soit de mesure finie.

Definition 3.1. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue finie. On désigne par $A^\star$ la boule centrée en l'origine et de même mesure de Lebesgue que A . Pour une fonction f , mesurable et nulle à l'infini, on définit sa réarrangée décroissante $f^\star$ par

$$f^\star(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{(|f|>t)^\star}(x) dt.$$

Pour une présentation générale de la théorie et de ses développements, le lecteur peut consulter [11] ou [6]. On peut, d'ores et déjà, remarquer que $f^\star = |f|^\star$, et que la fonction $f^\star$ est radiale décroissante, dans le sens où $f^\star(x) = f^\star(y)$ si $|x| = |y|$ et $f^\star(x) \geq f^\star(y)$ si $|x| \leq |y|$. Nous utiliserons les propriétés du réarrangement décroissant décrites dans la proposition suivante.

Proposition 3.1. Soient f et g deux fonctions positives nulles à l'infini. Alors, pour tout réel strictement positif s ,

$$(f(s \cdot))^\star = f^\star(s \cdot), \tag{4}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^\star(x)g^\star(x)dx \quad \text{et} \tag{5}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^\star(x) \mathbb{1}_{(g^\star \leq s)}(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x)dx. \tag{6}$$

Si, de plus, f et g sont dans L^p , alors $f^\star$ et $g^\star$ le sont aussi, et :

$$\|f\|_{L^p} = \|f^\star\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|f^\star - g^\star\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p}.$$

Pour la commodité du lecteur, cette proposition est démontrée en appendice.

Démonstration du lemme 2.3 D'après l'égalité (4) et l'inégalité (5), on est ramené à majorer

$$I_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f^\star(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} g^\star(\Lambda^{-1}x) dx.$$

Comme expliqué dans l'introduction, il faut tronquer des fonctions $f^\star$ et $g^\star$ dans des couronnes, ce qui est rendu possible grâce au lemme suivant.

Lemme 3.2. Pour tout p dans l'intervalle $[1, \infty[$, il existe une fonction continue R_0 de $]0, 1[\times \mathbb{S}(L^p)$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\|\phi_{R_0(\varepsilon, f)} f^\star\|_{L^p} = \varepsilon \quad \text{avec} \quad \phi_R(x) \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - \mathbb{1}_{\{R^{-1} \leq |x| \leq R\}}(x).$$

Démonstration. Démontrons d'abord qu'étant donné une fonction positive h , radiale, décroissante, de norme L^p égale à 1, et ε un réel de l'intervalle $]0, 1[$, il existe un unique $R(\varepsilon, h)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_{R(\varepsilon, h)}(x) h^p(x) dx = \varepsilon.$$

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction

$$R \mapsto \rho_h(R) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_R(x) h^p(x) dx$$

est continue et décroissante sur $[1, \infty[$. De plus : $\rho_h(1) = \|h\|_{L^p}^p = 1$ et $\rho_h(+\infty) = 0$. Soit R_h le maximum des R tels que $\rho_h(R) = 1$. La fonction ρ_h est strictement décroissante sur l'intervalle $[R_h, \infty[$. Ainsi, il existe un unique R_h tel que $\rho_h(R) = \varepsilon$. En appliquant cette propriété à la fonction $h = f^*$, ceci permet de définir la fonction R_0 .

Pour démontrer la continuité de cette même fonction R_0 , considérons une suite (ε_n, f_n) d'éléments de $]0, 1[\times \mathbb{S}(L^p)$ convergeant vers (ε, f) dans $]0, 1[\times \mathbb{S}(L^p)$, et démontrons que toute valeur d'adhérence dans $[1, \infty]$ est $R_0(\varepsilon, f)$. Soit donc R_∞ une valeur d'adhérence de $R_0(\varepsilon_n, f_n)$. On omet de noter l'extraction. L'inégalité triangulaire assure que

$$\|\phi_{R_0(\varepsilon_n, f_n)} f_n^*\|_{L^p} - \|f^* - f_n^*\|_{L^p} \leq \|\phi_{R_0(\varepsilon_n, f_n)} f^*\|_{L^p} \leq \|\phi_{R_0(\varepsilon_n, f_n)} f_n^*\|_{L^p} + \|f^* - f_n^*\|_{L^p}.$$

Par définition de R_0 ,

$$\varepsilon_n - \|f^* - f_n^*\|_{L^p} \leq \|\phi_{R_0(\varepsilon_n, f_n)} f^*\|_{L^p} \leq \varepsilon_n + \|f^* - f_n^*\|_{L^p}.$$

Le réarrangement décroissant étant lipschitzien de rapport 1 sur les espaces L^p , on en déduit que

$$\varepsilon_n - \|f - f_n\|_{L^p} \leq \|\phi_{R_0(\varepsilon_n, f_n)} f^*\|_{L^p} \leq \varepsilon_n + \|f - f_n\|_{L^p}. \quad (7)$$

Le théorème de Lebesgue implique, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_{R_0(\varepsilon_n, f_n)} f^*\|_{L^p} = \|\phi_{R_\infty} f^*\|_{L^p}.$$

En passant à la limite dans (7), on obtient $\|\phi_{R_\infty} f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon$, ce qui, toujours par définition de R_0 , conduit à $R_\infty = R_0(\varepsilon, f)$. Ainsi, la fonction R_0 est bien continue, et le lemme est démontré. $\square$

Conclusion de la démonstration du lemme 2.3 On peut alors estimer I_Λ . Grâce aux identités

$$f^* = \phi_{R_0(\varepsilon, f)} f^* + \mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, f)} f^* \quad \text{et} \quad g^* = \phi_{R_0(\varepsilon, g)} g^* + \mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, g)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, g)} g^*$$

nous avons

$$\begin{aligned} I_\Lambda &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (\phi_{R_0(\varepsilon, f)} f^*)(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} g^*\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, f)} f^*)(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} (\phi_{R_0(\varepsilon, g)} g^*)\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, f)} f^*)(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, g)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, g)} g^*)\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx \\ &\leq \|\phi_{R_0(\varepsilon, f)} f^*\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} + \|f^*\|_{L^p} \|\phi_{R_0(\varepsilon, g)} g^*\|_{L^{p'}} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, f)} f^*)(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, g)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, g)} g^*)\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx. \end{aligned}$$

Comme $\|f\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p} = \|g\|_{L^{p'}} = \|g^*\|_{L^{p'}} = 1$, ceci conduit à :

$$\begin{aligned} I_\Lambda &\leq 2\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, g)} f^*)(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} (\mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, g)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, g)} g^*)\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx \\ &\leq 2\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, f)}(x) \mathbb{1}_{\frac{\Lambda}{R_0(\varepsilon, g)} \leq |x| \leq \Lambda R_0(\varepsilon, g)}(x) f^*(x) \Lambda^{-\frac{d}{p'}} g^*\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx. \end{aligned}$$

Remarquons que si

$$\Lambda \geq 2R_0(\varepsilon, f) R_0(\varepsilon, g) \quad (8)$$

alors

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d, \frac{1}{R_0(\varepsilon, f)} \leq |x| \leq R_0(\varepsilon, g)\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d, \frac{\Lambda}{R_0(\varepsilon, g)} \leq |x| \leq \Lambda R_0(\varepsilon, g)\right\} = \emptyset.$$

Ainsi, sous réserve que la condition (8) soit vérifiée, on a $I_\Lambda(f, g) \leq 2\varepsilon$. La fonction définie, pour (f, g) dans $\mathbb{S}(L^p) \times \mathbb{S}(L^{p'})$, par

$$\Lambda_p(\varepsilon, f, g) \stackrel{\text{déf}}{=} 2R_0\left(\frac{\varepsilon}{2}, f\right) R_0\left(\frac{\varepsilon}{2}, g\right)$$

convient et le lemme 2.3 est ainsi démontré. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.1 Nous travaillons à nouveau dans l'espace $\mathbb{R}^2$. En développant la somme $\|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{L^2}^2$, on obtient, après un changement de variable :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{L^2}^2 &= \sum_{j=0}^{[\lambda]} \left\| \Lambda^{-j} v(\Lambda^{-j} \cdot) \right\|_{L^2}^2 + \chi^2(\lambda - [\lambda]) \left\| \Lambda^{-(\lfloor \lambda \rfloor + 1)} v(\Lambda^{-(\lfloor \lambda \rfloor + 1)} \cdot) \right\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j < k \leq [\lambda]} \int_{\mathbb{R}^2} v(x) \Lambda^{j-k} v(\Lambda^{j-k} x) dx + 2\chi(\lambda - [\lambda]) \sum_{j=0}^{[\lambda]} \int_{\mathbb{R}^2} v(x) \Lambda^{j-[\lambda]-1} v(\Lambda^{j-[\lambda]-1} x) dx. \end{aligned}$$

Le lemme 2.3 implique que, si $\Lambda \geq \Lambda_2(\varepsilon, \pi_{\mathbb{S}}(v), \pi_{\mathbb{S}}(v))$, alors, pour tout $k > j$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} v(x) \Lambda^{j-[\lambda]-1} v(\Lambda^{j-[\lambda]-1} x) dx \right| \leq \varepsilon \|v\|_{L^2}^2.$$

On trouve ainsi que

$$([\lambda] + 1 - [\lambda]^2 \varepsilon) \|v\|_{L^2}^2 \leq \|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{L^2}^2 \leq ([\lambda] + 2 + [\lambda]^2 \varepsilon) \|v\|_{L^2}^2.$$

On conclut la démonstration de l'inégalité (3) en choisissant $\varepsilon = (10[\lambda] + 10)^{-1}$.

Pour démontrer l'ensemble de la proposition, démontrons la continuité de $\mathcal{F}$. Elle résulte essentiellement du lemme suivant, valable en toute dimension d'espace.

Lemme 3.3. *Soit p dans $[1, +\infty[$; alors, l'application*

$$\mathcal{D} \quad \begin{cases} L^p(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ (v, \delta) & \longmapsto \delta^{-\frac{d}{p}} v(\delta^{-1} \cdot) \end{cases}$$

est continue

Démonstration. Il est intéressant de remarquer que cette application est une isométrie. Pour tout couple $((v_0, \Lambda_0), (v, \Lambda))$ de $(L^p(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}(v, \delta) - \mathcal{D}(v_0, \delta_0)\|_{L^p} &\leq \left\| \delta^{-\frac{d}{p}} (v - v_0)(\delta^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} + \left\| \delta^{-\frac{d}{p}} v_0(\delta^{-1} \cdot) - \delta_0^{-\frac{d}{p}} v_0(\delta_0^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} \\ &\leq \|v - v_0\|_{L^p} + \left\| v_0 - \delta \delta_0^{-\frac{d}{p}} v_0(\delta \delta_0^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} \end{aligned}$$

Considérons alors un réel strictement positif ε . Il existe une fonction $v_{0,\varepsilon}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\|v_0 - v_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On obtient alors, pour tout réel strictement positif δ ,

$$\begin{aligned} \|v_0 - \delta^{-\frac{d}{p}} v_0(\delta^{-1} \cdot)\|_{L^p} &\leq \|v_0 - v_{0,\varepsilon}\|_{L^p} + \left\| v_{0,\varepsilon} - \delta^{-\frac{d}{p}} v_{0,\varepsilon}(\delta^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} \\ &\quad + \left\| \delta^{-\frac{d}{p}} v_{0,\varepsilon}(\delta^{-1} \cdot) - \delta^{-\frac{d}{p}} v_0(\delta^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} \\ &\leq 2 \|v_0 - v_{0,\varepsilon}\|_{L^p} + \left\| v_{0,\varepsilon} - \delta^{-\frac{d}{p}} v_{0,\varepsilon}(\delta^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{2} + \left\| v_{0,\varepsilon} - \delta^{-\frac{d}{p}} v_{0,\varepsilon}(\delta^{-1} \cdot) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

En raison de l'invariance par changement d'échelle de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$, ceci conduit à

$$\left\| \delta^{-\frac{d}{p}} v_{0,\varepsilon}(\delta^{-1} \cdot) - \delta^{-\frac{d}{p}} v_0(\delta^{-1} \cdot) \right\|_{L^p} = \|v_{0,\varepsilon} - v_0\|_{L^p}$$

Comme $\lim_{\delta \rightarrow 1} \|v_{0,\varepsilon} - \delta^{-\frac{d}{p}} v_{0,\varepsilon}(\delta^{-1} \cdot)\|_{L^p} = 0$, on en déduit que l'application $\mathcal{D}$ est continue. $\square$

Conclusion de la démonstration de la proposition 2.1 Le lemme ci-dessus assure que la fonction $\mathcal{F}$ est continue sur $L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}_+^* \times (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}^*)$. On va démontrer que, pour tout entier positif k ,

$$\forall \lambda \in \left] -\frac{1}{4} + k, k + \frac{1}{4} \right[, \quad \mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda) = \sum_{j=0}^k \Lambda^{-j} v(\Lambda^{-j} \cdot) \quad (9)$$

ce qui, grâce au lemme 3.3 ci-dessus assurera la continuité sur tout $L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$. Si λ appartient à l'intervalle $] -1/4 + k, k[$, alors $[\lambda] = k - 1$ et $\chi(\lambda - [\lambda]) = 1$ et donc l'identité (9) est vérifiée. Si maintenant λ appartient à l'intervalle $[k, k + 1/4[$, alors $[\lambda] = k$, $\chi(\lambda - [\lambda]) = 0$, et l'identité (9) est à nouveau vérifiée. La proposition 2.1 est ainsi démontrée. $\square$

4 Quasi-orthogonalité et génération de solutions globales

Le but de cette section est de démontrer la proposition 2.2. Classiquement, on recherche la solution associée à $\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)$ sous la forme $u_{\text{app}} + R$, où la solution approchée $u_{\text{app}}(t, x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} u_{\text{app}}(t, x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^{[\lambda]+1} V_{j,\Lambda}(t, x) \quad \text{avec} \\ V_{j,\Lambda}(t, x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda^{-j} \mathcal{NLS}(v)(\Lambda^{-2j} t, \Lambda^{-j} x) \quad \text{pour } j \text{ dans } \{1, \dots, [\lambda]\} \text{ et} \\ V_{[\lambda]+1,\Lambda}(t, x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda^{-([\lambda]+1)} \mathcal{NLS}(\chi(\lambda - [\lambda])v)(\Lambda^{-2([\lambda]+1)} t, \Lambda^{-([\lambda]+1)} x). \end{aligned}$$

et où le terme R est à comprendre comme un terme d'erreur.

L'idée est que, si le paramètre d'échelle Λ est choisi suffisamment grand, alors le terme d'erreur R est petit, en raison de la quasi non-interaction des solutions d'échelles très différentes. Il faut donc montrer que le choix (en taille) du paramètre Λ peut être fait continûment lorsque le champ v varie. À cet effet, écrivons l'équation vérifiée par le terme d'erreur R . Nous avons

$$\begin{aligned} \begin{cases} i \partial_t R + \Delta R &= E_\Lambda + \Phi(R) \\ R|_{t=0} &= 0 \end{cases} \quad \text{avec} \\ |E_\Lambda| &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{0 \leq j, k, \ell \leq [\lambda]+1, (j, k, \ell) \neq (j, j, j)} (V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda} \quad \text{et} \\ |\Phi(R)(t, x)| &\leq C |R(t, x)|^3 + C |u_{\text{app}}(t, x)|^2 |R(t, x)|. \end{aligned}$$

où Φ est une notation générique désignant une fonction de R qui, dans un souci d'alléger les écritures, ne sera pas explicitée.

Intéressons-nous au terme $\|E_\Lambda\|_{L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))}$. Par définition des champs $V_{j,\Lambda}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \left((V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda} \right)(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \Lambda^{-\frac{2}{3}(j+k+\ell)} \|\mathcal{NLS}(v)(\Lambda^{-2j} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad \times \|\mathcal{NLS}(v)(\Lambda^{-2k} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \|\mathcal{NLS}(v)(\Lambda^{-2\ell} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Une intégration en temps conduit à

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\| \left((V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda} \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad \times \Lambda^{-\frac{2}{3}k} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(\Lambda^{-2k} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} \Lambda^{-\frac{2}{3}\ell} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(\Lambda^{-2\ell} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)} dt. \end{aligned}$$

Dans le cas où l'on a $k = \ell$, le lemme 2.3, appliqué avec $d = 1$, $p = 3$, $f = \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}$ et $g = \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^2$, conduit à

J'ai ajouté un carré manquant pour $g = \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^2$

$$\begin{aligned} \Lambda &\geq \Lambda_3(\varepsilon, \pi_{\mathbb{S}}^{(3)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}, \pi_{\mathbb{S}}^{(\frac{3}{2})} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^2) \\ &\implies \|(V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))} \leq \varepsilon \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))}^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Lorsque les trois indices j , k et ℓ sont deux à deux distincts, écrivons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\| \left((V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda} \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt &\leq \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \Lambda^{-k} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(\Lambda^{-2k} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}} \Lambda^{-\ell} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(\Lambda^{-2\ell} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Un changement de variables conduit à

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\| \left((V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda} \right) (t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt &\leq \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}} \Lambda^{-(\ell-k)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(\Lambda^{-2(\ell-k)} t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Le lemme 2.3, dans le cas où $d = 1$, $p = 2$ et $f = g = \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}}$, permet d'en déduire que

$$\begin{aligned} \Lambda &\geq \Lambda_2(\varepsilon, \pi_{\mathbb{S}}^{(2)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}}, \pi_{\mathbb{S}}^{(2)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}}) \\ &\implies \|(V_{j,\Lambda} | V_{k,\Lambda})_{\mathbb{R}^2} V_{\ell,\Lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))} \leq \varepsilon \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))}^3. \end{aligned} \quad (11)$$

Posons

$$\begin{aligned} \Lambda_F(\varepsilon, v) &\stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda_3(\varepsilon, \pi_{\mathbb{S}}^{(3)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}, \pi_{\mathbb{S}}^{(\frac{3}{2})} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^2) \\ &\quad + \Lambda_2(\varepsilon, \pi_{\mathbb{S}}^{(2)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}}, \pi_{\mathbb{S}}^{(2)} \|\mathcal{NL}\mathcal{S}(v)(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

Les assertions (10) et (11) impliquent que

$$\Lambda \geq \Lambda_F(\varepsilon, v) \implies \|E_{\Lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))} \lesssim \varepsilon([\lambda] + 1)^3 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^3.$$

De même, on montre que

$$\Lambda \geq \Lambda_F(\varepsilon, v) \implies \|u_{\text{app}}\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))} \leq C([\lambda] + 1) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^3 (C + \varepsilon([\lambda] + 1)^2).$$

On en déduit alors

$$\left(\varepsilon \leq \frac{1}{2C([\Lambda] + 1)^2} \quad \text{et} \quad \Lambda \geq \Lambda_F(\varepsilon, v) \right) \implies \|u_{\text{app}}\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))} \leq C([\lambda] + 1) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^3. \quad (12)$$

Admettons, momentanément, que, pour tout temps T plus petit que le temps maximal d'existence T^* ,

$$\|R\|_{L^3([0, T]; L^6(\mathbb{R}^2))} \leq C(\|E_\Lambda\|_{L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0, T]; L^6(\mathbb{R}^2))}^3) \exp(\|u_{\text{app}}\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))}^3). \quad (13)$$

Étant donné un réel positif η , introduisons le temps T_η défini par

$$T_\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ 0 \leq T < T^* / \int_0^T \|R(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3 dt \leq \eta^3 \right\}.$$

C'est peut-être idiot comme remarque, mais je me demande si ce n'est pas $\int_0^T \|R(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3 dt \leq \eta^3$?

Si l'on montre que $T_\eta = T^*$, alors le temps maximal d'existence T^* sera infini. L'inégalité (13) montre que, pour tout T plus petit que T_η ,

$$\|R\|_{L^3([0, T]; L^6(\mathbb{R}^2))} \leq C(\|E_\Lambda\|_{L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))} + \eta^3) \exp(C\|u_{\text{app}}\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))}^3).$$

Choisissons alors η et ε tels que

$$\eta = \frac{1}{4C^2} \exp(-2C\|u_{\text{app}}\|_{L^3(\mathbb{R}; L^6(\mathbb{R}^2))}^3) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\eta}{4([\lambda] + 1)^3(\|v\|_{L^2} + 1)^3} \exp((-C[\lambda] + 1)^3\|v\|_{L^2}^3).$$

Ne serait-ce pas plutôt :

$$\varepsilon = \frac{\eta}{2C([\lambda] + 1)^3\|v\|_{L^2}^3} \exp(-C^4([\lambda] + 1)^3\|v\|_{L^2}^9) ?$$

Les assertions (12) et (13) conduisent à

$$\|R\|_{L^3([0, T]; L^6(\mathbb{R}^2))} \leq \frac{3\eta}{4}.$$

Ainsi $T_\eta = T^*$, ce qui conduit à $T^* = +\infty$. Notre théorème est démontré si l'inégalité (13) l'est. Introduisons la suite croissante $(T_m)_{0 \leq m \leq M+1}$ telle que $T_0 = 0$, $T_{M+1} = +\infty$, et

$$\forall m < M, \quad \int_{T_m}^{T_{m+1}} \|u_{\text{app}}(t)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3 dt = c_0 \quad \text{and} \quad \int_{T_M}^{T_{M+1}} \|u_{\text{app}}(t)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3 dt \leq c_0 \quad (14)$$

pour un réel positif c_0 qui sera, ultérieurement, choisi suffisamment petit. De façon évidente,

$$Mc_0 \leq \int_0^{T_M} \|u_{\text{app}}(t)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3 dt \leq \int_0^{+\infty} \|u_{\text{app}}(t)\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3 dt \leq (M+1)c_0. \quad (15)$$

Ainsi, le nombre M de T_m tels que T_m est fini, et plus petit que $c_0^{-1}\|u_{\text{app}}\|_{L^3(\mathbb{R}^+;L^6(\mathbb{R}^2))}^3$. Posons

$$\mathcal{R}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \|R\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))}$$

et démontrons par récurrence sur m que, pour tout temps T plus petit que $\min\{T_m, T^*\}$:

$$\mathcal{R}(T) \leq C_0^{m+1} (\|E_\Lambda\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3).$$

Considérons donc un temps T plus petit que $\min\{T_{m+1}, T^*\}$. Les inégalités de Strichartz, sur l'intervalle $[T_m, T]$, conduisent à

$$\begin{aligned} \|R\|_{L^\infty([T_m, T];L^2)} + \|R\|_{L^3([T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))} &\leq C(\|R(T_m)\|_{L^2} + \|E_\Lambda\|_{L^1([T_m, T];L^2)} \\ &\quad + \|R\|_{L^3([T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3 + \|R\|_{L^3(T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))} \|u_{\text{app}}\|_{L^3(T_m, T_{m+1}];L^6(\mathbb{R}^2))}^2). \end{aligned}$$

Par définition de c_0 ,

$$\begin{aligned} \|R\|_{L^\infty([T_m, T];L^2)} + \|R\|_{L^3([T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))} &\leq C(\|R(T_m)\|_{L^2} + \|E_\Lambda\|_{L^1([T_m, T];L^2)} \\ &\quad + \|R\|_{L^3([T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3 + c_0^{\frac{2}{3}} \|R\|_{L^3(T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))}). \end{aligned}$$

Si $Cc_0 \leq \frac{1}{2}$, on obtient

$$\|R\|_{L^\infty([T_m, T];L^2)} + \|R\|_{L^3([T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))} \leq 2C(\|R(T_m)\|_{L^2} + \|E_\Lambda\|_{L^1([T_m, T];L^2)} + \|R\|_{L^3([T_m, T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3).$$

Avec le choix $C_0 = 2C + 1$, l'hypothèse de récurrence conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(T) &\leq (2C + 1)C_0^{m+1} (\|E_\Lambda\|_{L^1([0, T_m];L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0, T_m];L^6(\mathbb{R}^2))}^3) \\ &\leq C_0^{m+2} (\|E_\Lambda\|_{L^1([0, T];L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0, T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3). \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que, pour tout temps T plus petit que T^* ,

$$\mathcal{R}(T) \leq C_0^{M+2} (\|E_\Lambda\|_{L^1([0, T];L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0, T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3).$$

D'après l'inégalité (15), on a

$$\mathcal{R}(T) \leq C(\|E_\Lambda\|_{L^1([0, T];L^2(\mathbb{R}^2))} + \|R\|_{L^3([0, T];L^6(\mathbb{R}^2))}^3) \exp\left(C \int_0^\infty \|u_{\text{app}}(t)\|_{L^3(\mathbb{R};L^6(\mathbb{R}^2))}^3 dt\right).$$

ce qui implique l'inégalité (13). La proposition 2.2 est démontrée. $\square$

5 Le cas de l'espace $B_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)$

Le but de cette section est la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Il existe une constante C , et une fonction continue Λ_0 de $]1, +\infty[\times \mathbb{S}(L^2(\mathbb{R}^2))$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction v non nulle, on ait*

$$\Lambda \geq \Lambda_0(\lambda + 1, \pi_{\mathbb{S}} v) \implies \frac{1}{C}(\lambda + 1) \|v\|_{\dot{B}_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)}^4 \leq \|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{\dot{B}_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)}^4 \leq C(\lambda + 1) \|v\|_{\dot{B}_{2,4}^0(\mathbb{R}^2)}^4. \quad (16)$$

Démonstration. On utilise ici une version continue de la théorie de Littlewood-Paley. Soit φ une fonction radiale de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, telle que

$$\varphi(\xi) = f(|\xi|) \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty f(r^{-1}) \frac{dr}{r} = 1.$$

L'invariance par dilatation de la mesure $\mu^{-1}d\mu$ permet d'en déduire, pour tout ξ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:

$$\int_0^\infty \varphi(\mu^{-1}\xi) \frac{d\mu}{\mu} = 1.$$

Posons $\Delta_\mu a \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\mu^{-1}\xi)\widehat{a}(\xi))$. Dans ce cadre, la norme $B_{2,4}^0$ est donnée par

$$\|u\|_{B_{2,4}^0}^4 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\infty \|\Delta_\mu u\|_{L^2}^4 \frac{d\mu}{\mu}.$$

Un développement élémentaire, où l'on néglige le terme faisant intervenir la fonction χ , conduit alors à

$$\begin{aligned} & \left| \|\mathcal{F}(v, \Lambda, \lambda)\|_{B_{2,4}^0}^4 - \sum_{j=0}^{[\lambda]} \int_0^\infty \|\Delta_\mu(\Lambda^{-j}v(\Lambda^{-j}\cdot))\|_{L^2}^4 \frac{d\mu}{\mu} \right| \lesssim \mathcal{E}_{v,\Lambda,\lambda} \quad \text{avec} \\ \mathcal{E}_{v,\Lambda,\lambda} & \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\infty \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \tilde{\mathcal{J}}} \|\Delta_\mu(\Lambda^{-j_1}v(\Lambda^{-j_1}\cdot))\|_{L^2} \|\Delta_\mu(\Lambda^{-j_2}v(\Lambda^{-j_2}\cdot))\|_{L^2} \\ & \quad \times \|\Delta_\mu(\Lambda^{-j_3}v(\Lambda^{-j_3}\cdot))\|_{L^2} \|\Delta_\mu(\Lambda^{-j_4}v(\Lambda^{-j_4}\cdot))\|_{L^2} \frac{d\mu}{\mu} \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathcal{J}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{0, \dots, [\lambda]\}^4 \setminus \{(j, j, j, j), j \in \{0, \dots, [\lambda]\}\}$.

Comme $\Delta_\mu(\Lambda^{-j}v(\Lambda^{-j}\cdot)) = \Lambda^{-j}(\Delta_{\mu\Lambda^j}v)(\Lambda^{-j}\cdot)$, on trouve, grâce au scaling de la norme L^2 , que

$$\mathcal{E}(v, \Lambda, \lambda) = \int_0^\infty \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \tilde{\mathcal{J}}} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_1}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_2}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_3}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_4}}v\|_{L^2} \frac{d\mu}{\mu}.$$

La mesure $\mu^{-1}d\mu$ étant invariante par dilatation, on a

$$\mathcal{E}(v, \Lambda, \lambda) \lesssim [\lambda] \int_0^\infty \sum_{\substack{(j_1, j_2, j_3) \in \{0, \dots, [\lambda]\}^3 \\ 0 < j_1 \leq j_2 \leq j_3}} \|\Delta_\mu v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_1}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_2}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_3}}v\|_{L^2} \frac{d\mu}{\mu}.$$

L'inégalité de Hölder pour la mesure $\frac{d\mu}{\mu}$ et l'invariance par dilatation de cette même mesure implique que

$$\int_0^\infty \|\Delta_\mu v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_1}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_2}}v\|_{L^2} \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_3}}v\|_{L^2} \frac{d\mu}{\mu} \leq \|v\|_{B_{2,4}^0}^2 \left(\int_0^\infty \|\Delta_\mu v\|_{L^2}^2 \|\Delta_{\mu\Lambda^{j_1}}v\|_{L^2}^2 \frac{d\mu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{E}(v, \Lambda, \lambda) \lesssim [\lambda]^3 \|v\|_{B_{2,4}^0}^2 \sum_{j=0}^{[\lambda]} \left(\int_0^\infty \|\Delta_\mu v\|_{L^2}^2 \|\Delta_{\mu\Lambda^j}v\|_{L^2}^2 \frac{d\mu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On est donc ramené à étudier une intégrale du type

$$\int_0^\infty f(\mu) g(\Lambda^{-1}\mu) \frac{d\mu}{\mu}.$$

avec f et g dans $L^2([0, \infty[; \mu^{-1}d\mu)$. Définissons

$$\tilde{f}(\mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(\mu) \frac{f(\mu)}{\mu^{\frac{1}{2}}}.$$

Écrivons maintenant que

$$\int_0^\infty f(\mu)g(\Lambda^{-1}\mu)\frac{d\mu}{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\mu)\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tilde{g}(\Lambda^{-1}\mu)d\mu \quad \text{avec}$$

On applique alors le Lemme 2.3 avec $p = 2$ et $d = 1$, et on conclut comme pour la proposition 2.1. $\square$

6 Démonstration de quelques propriétés de réarrangement décroissant

Le but de cette section est de démontrer la proposition 3.1. Pour de plus amples développements de cette théorie et de ces nombreuses applications, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [6] et [11].

Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que des fonctions positives. Nous utiliserons très souvent le fait que, pour toute fonction h ,

$$h(x) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{(h>t)}(x)dt. \quad (17)$$

Pour démontrer (4), observons que $(f(s \cdot) > t) = s^{-1}(f > t)$. Soit R_t le rayon tel que $(f > t)$ ait même volume que la boule de centre 0 et de rayon R_t . Ainsi :

$$\mathbb{1}_{(f(s \cdot) > t)}(x) = \mathbb{1}_{B(0, s^{-1}R_t)}(x) = \mathbb{1}_{(f > t)}(sx).$$

On obtient l'égalité (4) par intégration en t .

La démonstration de l'inégalité (5) repose sur l'observation suivante. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie. Les ensembles $A^\star$ et $B^\star$ étant deux boules centrées à l'origine, on a

$$\text{meas}(A^\star \cap B^\star) = \min\{\text{meas } A^\star, \text{meas } B^\star\} = \min\{\text{meas } A, \text{meas } B\} \geq \text{meas}(A \cap B). \quad (18)$$

Ce raisonnement peut être illustré par le dessin suivant.

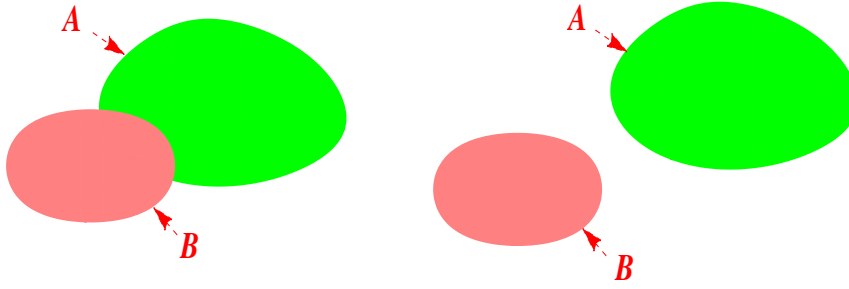


FIGURE 3 – Les ensembles A et B , avec ou sans intersection.

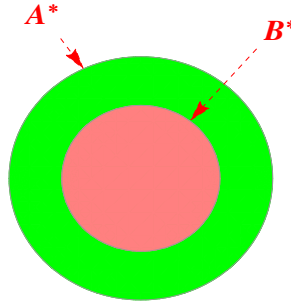


FIGURE 4 – Les boules centrées à l'origine A^* et B^* .

D'après le théorème de Fubini et l'inégalité (18), on a par définition de f^* et g^* ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{(f>t)^*}(x)dt \right) \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{(g>s)^*}(x)ds \right) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \text{meas}((f>t)^* \cap (g>s)^*) dt ds. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (18) dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)dx \geq \int_0^\infty \int_0^\infty \text{meas}((f>t) \cap (g>s)) dt ds.$$

En appliquant alors la relation (17), il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)dx &\geq \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f>t)}(x) \mathbb{1}_{(g>s)}(x) dt ds dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{(f>t)}(x) dt \right) \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{(g>s)}(x) ds \right) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

ce qui assure l'inégalité voulue.

La démonstration de l'inégalité (6) est très semblable. D'après (17) et le théorème de Fubini, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbb{1}_{(f>t)}(x) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \text{meas}((f>t) \cap (g \leq s)) dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Comme $\mathbb{1}_{(f>t)}\mathbb{1}_{(g\leq s)} = \mathbb{1}_{(f>t)} - \mathbb{1}_{(f>t)}\mathbb{1}_{(g>s)}$, il en résulte, par intégration :

$$\text{meas}((f > t) \cap (g \leq s)) = \text{meas}(f > t) - \text{meas}((f > t) \cap (g > s)).$$

En appliquant (18) aux ensembles $(f > t)$ et $(g > s)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{meas}((f > t) \cap (g \leq s)) &\geq \text{meas}((f > t)^*) - \text{meas}((f > t)^* \cap (g > s)^*) \\ &\geq \text{meas}(f > t)^* - \text{meas}((f^* > t) \cap (g^* > s)) \\ &\geq \text{meas}((f > t)^* \cap (g^* \leq s)). \end{aligned}$$

Utiliser ceci dans l'inégalité (19) permet d'écrire, grâce au théorème de Fubini, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx &\geq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f>t)^*}(x) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité (6).

Pour démontrer l'égalité des normes L^p , observons que le théorème de Fubini assure que pour toute fonction positive h , et tout p de l'intervalle $[1, \infty]$, on a

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p}^p &= p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbb{1}_{(h>t)}(x) t^{p-1} dt dx \\ &= p \int_0^\infty \text{meas}(h > t) t^{p-1} dt. \end{aligned}$$

Par définition de l'opération $\star$ sur les ensembles, $(f > t)$ et $(f^* > t)$ sont de même mesure. La formule ci-dessus assure alors immédiatement l'égalité des normes L^p .

Le fait que l'opération $\star$ soit lipschitzienne de rapport 1 sur L^p est le résultat du lemme plus général suivant.

Lemme 6.1. Soit J une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $J(0) = 0$. Étant données deux fonctions f et g , positives, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} J(f^*(x) - g^*(x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} J(f(x) - g(x)) dx.$$

Démonstration. Écrivons que

$$J = J_+ + J_- \quad \text{avec} \quad J_+ \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} J \quad \text{et} \quad J_- \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^- \setminus \{0\}} J.$$

J'ai mis $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions J_+ et J_- sont convexes, positives. On démontre l'inégalité pour J_+ , la démonstration pour J_- étant strictement analogue. Soient h_1 et h_2 deux fonctions positives, nous avons

$$\begin{aligned} J_+(h_1(x) - h_2(x)) &= \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} J'_+(h_1(x) - s) ds \\ &= \int_{h_1(x)}^{+\infty} J'_+(h_1(x) - s) \mathbb{1}_{(h_2 \leq s)}(x) ds. \end{aligned} \tag{20}$$

Ne serait-ce pas plutôt :

$$\begin{aligned} J_+(h_1(x) - h_2(x)) &= \int_{h_2(x)}^{h_1(x)} J'_+(h_1(x) - s) ds \\ &= \int_{h_2(x)}^{+\infty} J'_+(h_1(x) - s) \mathbb{1}_{(h_2 \leq s)}(x) ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Si H est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $H(0) = 0$, c'est, aussi, l'intégrale de sa dérivée au sens des distributions, qui est elle-même une mesure positive, notée ici dH . Ceci conduit à :

J'ai rajouté $H(0) = 0$.

$$H(y - s) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{]s+t, \infty[}(y) dH(t).$$

D'après le théorème de Fubini, on en déduit que, pour tout couple de fonctions (h_1, h_2) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(h_1(x) - s) \mathbb{1}_{(h_2 \leq s)}(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(h_1 > s+t)}(x) \mathbb{1}_{(h_2 \leq s)}(x) dx \right) dH(t). \quad (22)$$

En appliquant cette formule avec $(h_1, h_2) = (f^*, g^*)$ ainsi que l'inégalité (6), on trouve, grâce à la positivité de la mesure $dH(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} H(f^*(x) - s) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \mathbb{1}_{(f^* > s+t)}(x) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx dH(t) \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(f > s+t)}(x) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx \right) dH(t). \end{aligned}$$

En appliquant la formule (22) cette fois avec le couple de fonctions (f, g) , on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(f^*(x) - s) \mathbb{1}_{(g^* \leq s)}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} H(f(x) - s) \mathbb{1}_{(g \leq s)}(x) dx.$$

Cette inégalité appliquée avec $H = J'_+$ assure le résultat d'après la formule (20). □

Références

- [1] N. Burq, Explosion pour l'équation de Schrödinger au régime du "log-log", (d'après Merle-Raphael), *Séminaire Bourbaki* 2005/06, Astérisque **311**, 2007, pages 33-53.

- [2] T. Cazenave and F. Weissler, Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case, *Nonlinear Semigroups, Partial Differential Equations and Attractors* Lecture Notes in Mathematics, **1394**, Berlin, 1989, pages 18-29.
- [3] B. Dodson, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2 -critical, nonlinear Schrödinger equation when $d = 2$, 2010, arXiv :1006.1375.
- [4] B. Dodson, Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state, arXiv :1104.1114, 2011.
- [5] F. Merle, P. Raphaël, J. Szeftel, The instability of Bourgain-Wang solutions for L^2 critical NSL, *American Journal of Mathematics*, **135**, 2013 pages 967-1017.
- [6] E. Lieb and M. Loss, Analysis, Graduate Studies in Mathematics, **14** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1997).
- [7] F. Merle and P. Raphaël, On universality of blow up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation, *Inventiones Mathematicae*, **156**, 2004, pages 565-672.
- [8] F. Planchon, On the Cauchy problem in Besov spaces for a non-linear Schrödinger equation, *Communications in Contemporary Mathematics*, **2**, 2000, pages 243-254.
- [9] F. Planchon, Dispersive estimates and the 2D Cubic NLS equation, *Journal d'Analyse Mathématique*, **86**, 2002, pages 319-334.
- [10] F. Planchon, Existence globale et scattering pour les solutions de masse finie de l'équation de Schrödinger cubique en dimension 2, Séminaire Bourbaki, 63^{ème} année, 2010-2011, n° 1042.
- [11] G. Pólya and G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 27, Princeton University Press, 1951.