Construction d'un laplacien sur le graphe de la fonction de Weierstrass

Claire David

▶ **To cite this version:**

Claire David. Construction d'un laplacien sur le graphe de la fonction de Weierstrass. 2017. hal-01456250v1

HAL Id: hal-01456250

https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01456250v1

Preprint submitted on 4 Feb 2017 (v1), last revised 11 Feb 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction d'un laplacien sur le graphe de la fonction de Weierstrass

Claire David

4 février 2017

Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06
CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu 75005, Paris, France

1 Introduction

Le laplacien occupe, au sein de l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles, une place centrale. Récemment, les travaux de J. Kigami [1], [2], repris par R. Strichartz [3], [4], ont permis la construction d'un opérateur de même nature, défini localement, sur des graphes présentant un caractère fractal : le triangle de Sierpiński, le tapis de Sierpiński, le diamant fractal, les ensembles de Julia, la fougère de Barnsley.

J. Kigami part de la définition du Laplacien sur le segment unité de la droite réelle ; pour une fonction u deux fois dérivable sur $[0,1]$, le laplacien Δu est obtenu comme dérivée seconde de u sur $[0,1]$. Pour tout couple (u,v) appartenant à l'espace des fonctions dérivables sur $[0,1]$, et telles que :

$$v(0) = v(1) = 0$$

il fait remarquer que, compte-tenu de :

$$\int_0^1 (\Delta u)(x)\, v(x)\, dx = -\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} u'(x)\, v'(x)\, dx$$

si on se donne un réel $\varepsilon > 0$, la continuité de u' et v' conduit à l'existence d'un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, et tout réel x de $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\left| u'(x) - \frac{u\left(\frac{k}{n}\right) - u\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right| \leqslant \varepsilon \quad , \quad \left| v'(x) - \frac{u\left(\frac{k}{n}\right) - v\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right| \leqslant \varepsilon$$

la relation, obtenue :

$$\int_0^1 (\Delta u)(x)\, v(x)\, dx = -\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{n} \left(u\left(\frac{k}{n}\right) - u\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \left(v\left(\frac{k}{n}\right) - v\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

permet de définir, sous une forme faible, le laplacien de u, en évitant le recours aux dérivées premières, et ouvre donc la voie aux calculs de laplaciens sur des domaines à caractère fractal.

En pratique, la formulation faible est écrite à l'aide de formes de Dirichlet, construites par itérations successives sur une suite de graphes convergeant vers le domaine considéré. Pour une fonction continue sur ce domaine, son laplacien est obtenu comme la limite normalisée de la suite de laplaciens obtenus à chaque itération.

Si le travail de J. Kigami se révèle, en termes d'analyse sur les fractales, fondateur, c'est, par contre, à **Robert S. Strichartz** qu'on en doit l'essor. Robert S. Strichartz va plus loin que J. Kigami : sur la base du triangle de Sierpiński, il approfondit, il développe, il exploite, il généralise, et reconstruit les espaces fonctionnels classiques.

Curieusement, le cas du **graphe de la fonction de Weierstrass**, introduite en 1872 par K. Weierstrass [5], qui présente des propriétés d'auto-similarité, ne semble pas avoir été envisagé, **ni par Robert S. Strichartz, ni par d'autres**. C'est pourtant un **passage obligé**, si l'on veut étudier des **phénomènes de diffusion dans des milieux partout irréguliers.**
On rappelle que étant donnés $\lambda \in]0,1[$, et b tel que $\lambda\, b > 1 + \dfrac{3\,\pi}{2}$, la fonction de Weierstrass

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(\pi\, b^n\, x\right)$$

est continue partout, mais nulle part dérivable. La preuve originale de K. Weierstrass [5], peut aussi être retrouvée dans [6]. Elle a été complétée, par celle, désormais classique, dans le cas où $\lambda\, b > 1$, par G. Hardy [7].

C'est Benoît Mandelbrot [8] qui, en 1977, a mis en évidence le caractère fractal du graphe de la fonction de Weierstrass. K. Falconer [9] a montré, en 1985, que la dimension de Hausdorff du graphe est majorée par $2 + \dfrac{\ln \lambda}{\ln b}$. La preuve formelle a été établie par B. Hunt [10] en 1998.

Nous nous sommes posé la question suivante : **si on se donne une fonction u définie et continue sur le graphe de la fonction de Weierstrass, sous quelles conditions est-il possible de lui associer une fonction $\Delta\, u$ qui soit, au sens faible, son laplacien, de façon à ce que cette nouvelle fonction $\Delta\, u$ soit aussi définie et continue sur le graphe de la fonction de Weierstrass ?**

Nous présentons, dans ce qui suit, les résultats que nous avons obtenus en suivant l'approche de J. Kigami et R. S. Strichartz. La nôtre se fait **dans un cadre complètement renouvelé** par rapport à celui, affine, du triangle de Sierpiński. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux formes de Dirichlet sur le graphe de la fonction de Weierstrass, qui permettent, ensuite, sous réserve d'existence, de définir le laplacien d'une fonction continue sur ce même graphe. Ce laplacien apparaît comme la limite normalisée d'une suite de laplaciens discrets sur une **suite de graphes** convergeant vers celui de la fonction de Weierstrass. Les constantes de normalisation affectées à chacun des termes de la suite de laplaciens sont obtenues grâce aux formes de Dirichlet.

Outre la construction en elle-même des formes de Dirichlet, plusieurs points délicats ont dû être étudiés : la construction d'une mesure auto-similaire sur le graphe de cette fonction, ainsi que de fonctions d'interpolation sur les points du graphe.

Le **spectre du laplacien** ainsi construit est obtenu par décimation spectrale. De façon assez spectaculaire par rapport à la méthode développée par Robert S. Strichartz dans le cas du triangle de Sierpiński, les résultats que nous présentons se font l'illustration la plus naturelle du procédé itératif

engendrant la suite de graphes.

2 Formes de Dirichlet sur le graphe de la fonction de Weierstrass

Notation. Dans ce qui suit, λ et b sont deux réels tels que :

$$0 < \lambda < 1 \quad , \quad b = N_b \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lambda\, N_b > 1$$

On considérera la fonction de Weierstrass $\mathcal{W}$, définie, pour tout réel x, par :

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^n\, x\right)$$

2.1 Aspect théorique

On se place, dans ce qui suit, dans le plan euclidien de dimension 2, rapporté à un repère orthonormé direct. Les coordonnées cartésiennes usuelles sont (x, y).

Propriété 2.1. ***Caractère périodique de la fonction de Weierstrass***
Pour tout réel x :

$$\mathcal{W}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^n\, x + 2\,\pi\, N_b^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^n\, x\right) = \mathcal{W}(x)$$

L'étude de la fonction de Weierstrass peut être restreinte à l'intervalle $[0, 1[$.

Suivant la méthode développée par Kigami, on approche la restriction $\Gamma_{\mathcal{W}}$ à $[0, 1[\times\mathbb{R}$, du graphe de la fonction de Weierstrass, par une suite de graphes, construits suivant un processus itératif. À cet effet, on introduit le système de fonctions itérées constitué par la famille d'applications, de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\{T_0, ..., T_{N_b-1}\}$$

où, pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 1\}$, et tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$T_i(x, y) = \left(\frac{x+i}{N_b}, \lambda\, y + \cos\left(2\,\pi\, \left(\frac{x+i}{N_b}\right)\right)\right)$$

Lemme 2.2. *Pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 1\}$, l'application T_i est une bijection de $\Gamma_{\mathcal{W}}$.*

Démonstration. Soit $i \in \{i = 0, ..., N_b - 1\}$. Considérons un point $(y, \mathcal{W}(y))$ de $\Gamma_{\mathcal{W}}$, et cherchons un réel x de $[0, 1]$ tel que :

$$T_i\left(x, \mathcal{W}(x)\right) = T_i\left(y, \mathcal{W}(y)\right)$$

On a alors :

$$y = \frac{x+i}{N_b}$$

puis :

$$x = N_b\, y - i$$

On peut ensuite calculer :

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(N_b\, y - i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^{n+1}\, y - 2\,\pi\, N_b^n\, i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^{n+1}\, y\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
T_i\left(x, \mathcal{W}(x)\right) &= \left(\frac{x+i}{N_b}, \lambda\, \mathcal{W}(x) + \cos\left(2\,\pi\, \left(\frac{x+i}{N_b}\right)\right)\right) \\
&= \left(y, \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^{n+1}\, y\right) + \cos\left(2\,\pi\, \left(y\right)\right)\right) \\
&= \left(y, \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^{n+1}\, y\right) + \cos\left(2\,\pi\, \left(y\right)\right)\right) \\
&= \left(y, \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(2\,\pi\, N_b^n\, y\right)\right) \\
&= \left(y, \mathcal{W}(y)\right)
\end{aligned}$$

Il existe donc bien un unique réel x de $[0,1]$ tel que :

$$T_i\left(x, \mathcal{W}(x)\right) = T_i\left(y, \mathcal{W}(y)\right)$$

□

Propriété 2.3.

$$\Gamma_{\mathcal{W}} = \bigcup_{i=0}^{N_b-1} T_i(\Gamma_{\mathcal{W}})$$

Remarque 2.1. La famille $\{T_0, ..., T_{N_b-1}\}$ est une famille de contractions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 1\}$, et tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on introduit la matrice jacobienne de T_i telle que, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$DT_i(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N_b} & 0 \\ -\dfrac{2\,\pi}{N_b} \sin\left(2\,\pi\, \left(\dfrac{x+i}{N_b}\right)\right) & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 1\}$, le rayon spectral de l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 & \\ (u,v) & \mapsto & DT_i(x,y)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{array}$$

est :

$$\rho(DT_i(x,y)) = \max\left\{\frac{1}{N_b}, \lambda\right\} = K < 1$$

Désignons par $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall\, X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \|X\|_2 = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

Pour la norme spectrale $\|\cdot\|_{2,2}$, définie sur l'espace des matrices réelles de taille 2×2, par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \sup_{\|X\|_2=1} \|A\,X\|_2$$

on a donc :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \|DT_i(x,y)\|_{2,2} \leqslant \max\left\{\frac{1}{N_b}, \lambda\right\} < 1$$

Alors, pour tout quadruplet (x,y,z,t) de réels :

$$\|T_i(x,y) - T_i(z,t)\|_2 \leqslant K\ \|(x,y)-(z,t)\|_2$$

□

Définition 2.1. On désigne par V_0 l'ensemble ordonné, suivant les abscisses croissantes, des points :

$$\{P_0, ..., P_{N_b-1}\}$$

puisque, pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 2\}$:

$$x_i \leqslant x_{i+1}$$

L'ensemble des points V_0, où, pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 2\}$, le point P_i est relié au point P_{i+1}, constitue un graphe orienté (suivant les abscisses croissantes), que l'on désigne par $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$. V_0 est appelé ensemble des sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$.

Pour tout entier naturel non nul m, on pose :

$$V_m = \bigcup_{i=0}^{N_b-1} T_i\,(V_{m-1})$$

L'ensemble des points V_m, où deux points consécutifs sont reliés, constitue un graphe orienté (suivant les abscisses croissantes), que l'on désigne par $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$. V_m est appelé ensemble des sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$. On désignera, dans ce qui suit, par $\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}$ le nombre de sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, et on écrira :

$$V_m = \left\{\mathcal{S}_0^m, \mathcal{S}_1^m, \ldots, \mathcal{S}_{\mathcal{N}_m-1}^m\right\}$$

Enfin, pour tout i de $\{0, ..., N_b - 1\}$, on désigne par :

$$P_i = (x_i, y_i) = \left(\frac{i}{N_b-1}, \frac{1}{1-\lambda}\ \cos\left(\frac{2\,\pi\,i}{N_b-1}\right)\right)$$

le point fixe de la contraction T_i.

Propriété 2.4. *Pour tout entier naturel m :*

$$V_m \subset V_{m+1}$$

Propriété 2.5. *Pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 2\}$:*

$$T_i\left(P_{N_b-1}\right) = T_{i+1}\left(P_0\right)$$

Démonstration. Compte-tenu de :

$$P_0 = \left(0, \frac{1}{1-\lambda}\right) \quad , \quad P_{N_b-1} = \left(\frac{N_b-1}{N_b-1}, \frac{1}{1-\lambda}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,(N_b-1)}{N_b-1}\right)\right) = \left(1, \frac{1}{1-\lambda}\right)$$

on obtient :

$$T_i\left(P_{N_b-1}\right) = \left(\frac{1+i}{N_b}, \frac{\lambda}{1-\lambda} + \cos\left(2\,\pi\,\left(\frac{1+i}{N_b}\right)\right)\right)$$

$$T_{i+1}\left(P_0\right) = \left(\frac{i+1}{N_b}, \frac{\lambda}{1-\lambda} + \cos\left(2\,\pi\,\left(\frac{i+1}{N_b}\right)\right)\right)$$

□

Propriété 2.6. *La suite $\left(\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, de premier terme $\mathcal{N}_0^{\mathcal{S}} = N_b$:*

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : \quad \mathcal{N}_{m+1}^{\mathcal{S}} = N_b\,\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}} - (N_b - 2)$$

ce qui conduit à :

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : \quad \mathcal{N}_{m+1}^{\mathcal{S}} = N_b^m\,\left(\mathcal{N}_0 - (N_b - 2)\right) + (N_b - 2) = 2\,N_b^m + N_b - 2$$

Démonstration. Ce résultat vient du fait que chaque graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, $m \in \mathbb{N}^\star$, est construit à partir du graphe précédent $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$ en appliquant les N_b contractions T_i, $0 \leqslant i \leqslant N_b - 1$, aux sommets de $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$. Comme, pour tout i de $\{i = 0, ..., N_b - 2\}$:

$$T_i\left(P_{N_b-1}\right) = T_{i+1}\left(P_0\right)$$

alors, $N_b - 2$ points apparaissent de deux façons différentes si l'on considère les images des $\mathcal{N}_{m-1}$ sommets de $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$ par toutes les contractions T_i, $0 \leqslant i \leqslant N_b - 1$.

□

Définition 2.2. Pour tout entier naturel m, les $\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}$ sommets consécutifs du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ sont, aussi, les sommets de N_b^m polygones simples $\mathcal{P}_{m,j}$, $0 \leqslant j \leqslant N_b^m - 1$ à N_b côtés. Pour tout entier j de $0 \leqslant j \leqslant N_b^m - 1$, chaque polygone est obtenu en reliant le point numéro j au point numéro $j + 1$ si $j = i \bmod N_b$, $0 \leqslant i \leqslant N_b - 2$, et le point numéro j au point numéro $j - N_b + 1$ si $j = -1 \bmod N_b$. Ces polygones engendrent une tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.3. Domaine polygonal délimité par le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, $m \in \mathbb{N}$

Pour tout entier naturel m, on appellera **domaine polygonal délimité par le graphe** $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, que l'on notera $\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}_m})$, la réunion des N_b^m polygones $\mathcal{P}_{m,j}$, $0 \leqslant j \leqslant N_b^m - 1$ à N_b côtés.

Définition 2.4. Domaine délimité par le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

On appellera **domaine délimité par le graphe** $\Gamma_{\mathcal{W}}$, que l'on notera $\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})$, la limite :

$$\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}}) = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}_m})$$

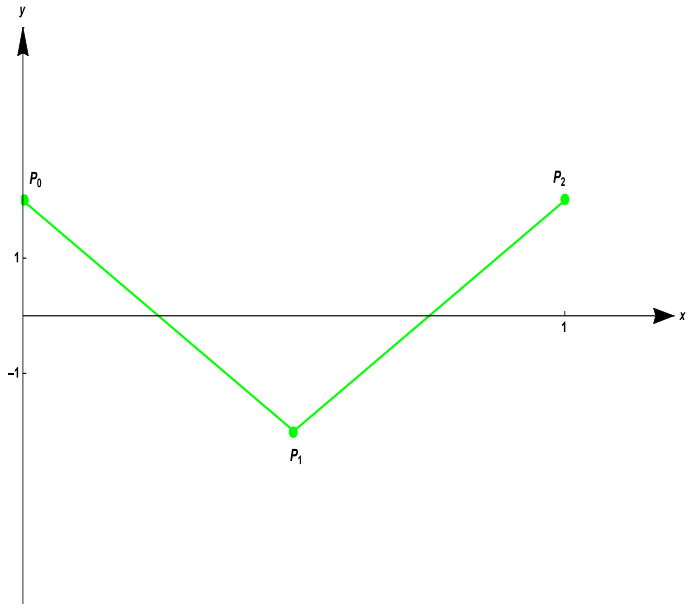

FIGURE 1 – Les points fixes P_0, P_1, P_2, et le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$, dans le cas où $\lambda = \dfrac{1}{2}$, et $N_b = 3$.

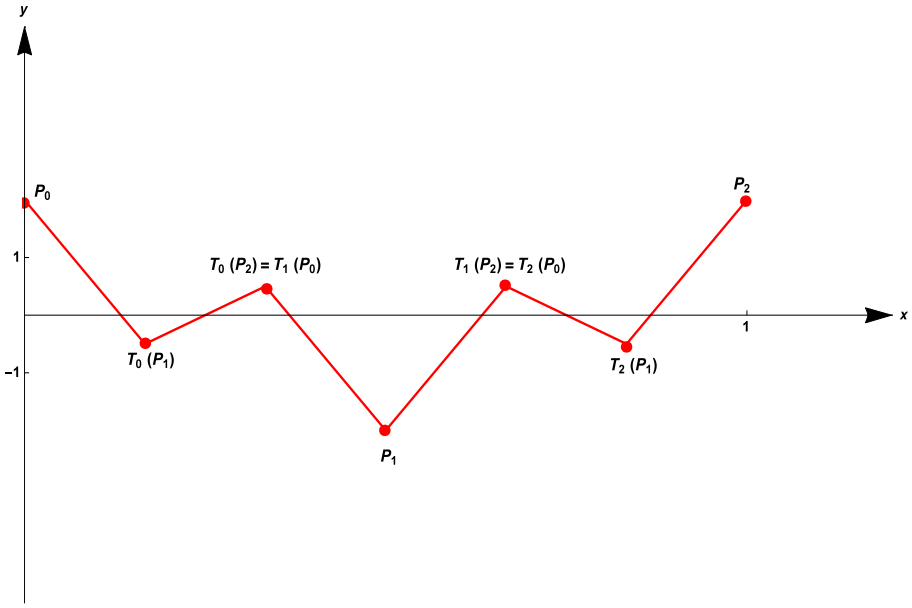

FIGURE 2 – Le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$, dans le cas où $\lambda = \dfrac{1}{2}$, et $N_b = 3$. $T_0(P_2) = T_1(P_0)$ et $T_1(P_2) = T_2(P_1)$.

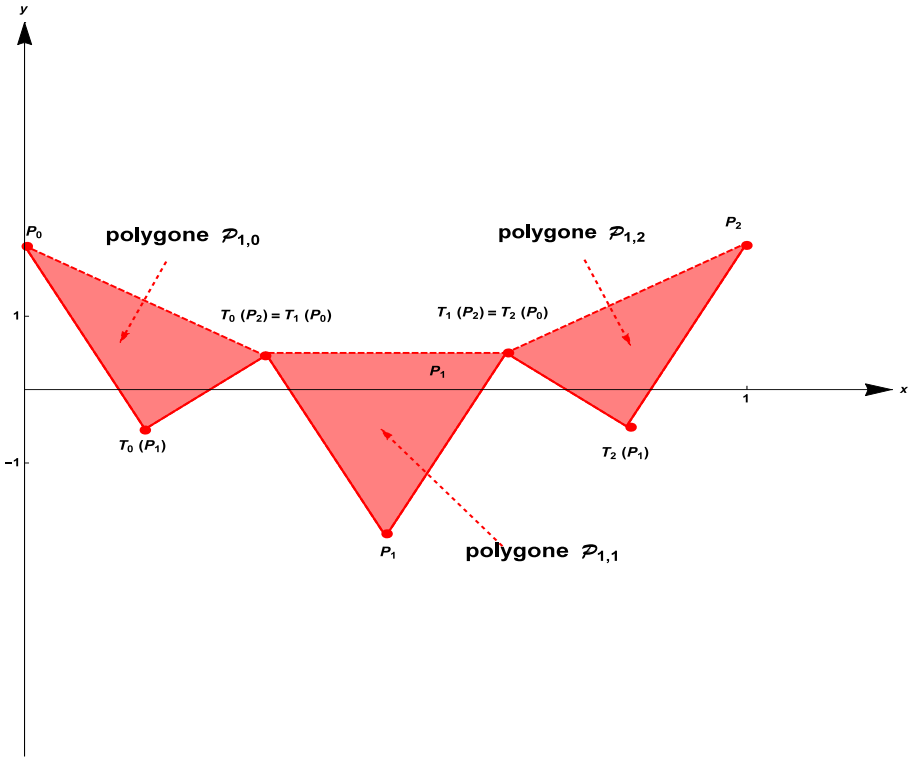

FIGURE 3 – Les polygones $\mathcal{P}_{1,0}$, $\mathcal{P}_{1,1}$, $\mathcal{P}_{1,2}$, dans le cas où $\lambda = \dfrac{1}{2}$, et $N_b = 3$.

Définition 2.5. Sommets consécutifs sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

Deux points X et Y de $\Gamma_{\mathcal{W}}$ sont appelés ***sommets consécutifs*** du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$ s'il existe un entier naturel m, et un entier j de $\{0, ..., N_b - 2\}$, tels que :

$$X = \left(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_m}\right)(P_j) \quad \text{et} \quad Y = \left(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_m}\right)(P_{j+1}) \qquad \{i_1, \ldots, i_m\} \in \{0, ..., N_b - 1\}^m$$

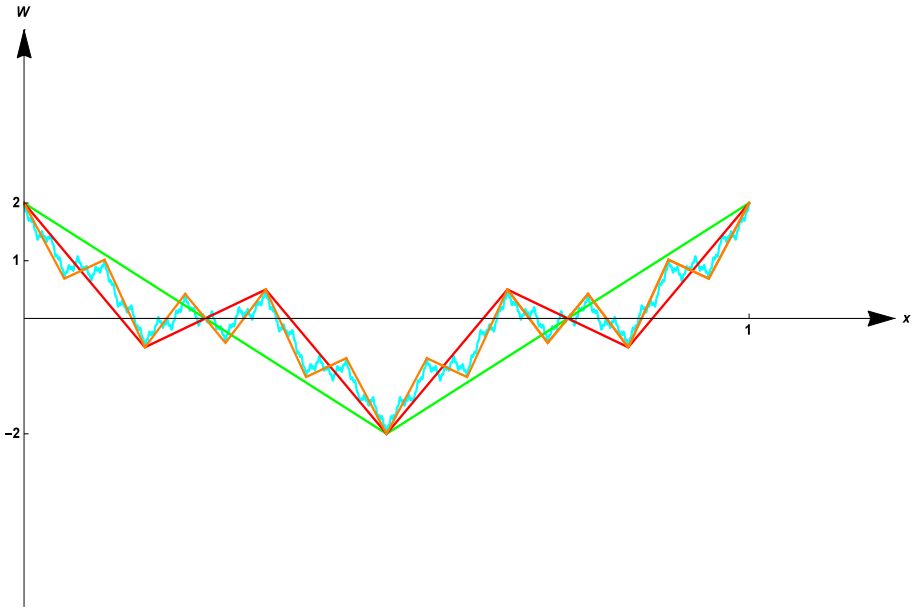

FIGURE 4 – Les graphes $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ (en vert), $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$ (en rouge), $\Gamma_{\mathcal{W}_2}$ (en orange), $\Gamma_{\mathcal{W}}$ (en cyan), dans le cas où $\lambda = \dfrac{1}{2}$, et $N_b = 3$.

ou :

$$X = (T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \ldots \circ T_{i_m})(P_{N_b-1}) \quad \text{et} \quad Y = (T_{i_1+1} \circ T_{i_2} \ldots \circ T_{i_m})(P_0)$$

Remarque 2.2. On notera que X et Y ne peuvent être à la fois images de P_j et P_{j+1}, $0 \leqslant j \leqslant N_{b-2}$, par $T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_m}$, $(i_1, \ldots, i_m) \in \{0, ..., N_b - 2\}$, et de P_k et P_{k+1}, $0 \leqslant k \leqslant N_{b-2}$,
par $T_{p_1} \circ \ldots \circ T_{p_m}$, $(p_1, \ldots, p_m) \in \{0, ..., N_b - 2\}$. Ce résultat peut être démontré par récurrence, puisque, tout couple d'entiers (j, k) de $\{0, ..., N_b - 2\}^2$, pour tout i_m de $\{0, ..., N_b - 2\}$, et tout p_m de $\{0, ..., N_b - 2\}$:

$$(i_m \neq p_m \quad \text{et} \quad j \neq k) \Longrightarrow (T_{i_m}(P_j) \neq T_{j_m}(P_k) \quad \text{et} \quad T_{i_m}(P_j) \neq T_{j_m}(P_k))$$

En effet, chacune des contractions T_i, $\{0, ..., N_b - 2\}$, est injective.
Les sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ étant distincts, le résultat en découle.

Définition 2.6. Mot, sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

Soit m un entier naturel non nul. On appellera **lettre-nombre** tout entier $\mathcal{M}_i$ de $\{0, \ldots, N_b - 1\}$, et **mot de longueur** $|\mathcal{M}| = m$, sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, tout ensemble de lettres-nombres de la forme :

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m)$$

Enfin, on écrira :

$$T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}_1} \circ \ldots \circ T_{\mathcal{M}_m}$$

Propriété 2.7. *Pour tout entier naturel m :*

$$\Gamma_{\mathcal{W}} = \overline{\bigcup_{|\mathcal{M}|=k\geqslant m} T_{\mathcal{M}}(\Gamma_{\mathcal{W}})}$$

Définition 2.7. Relation d'adjacence sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

Étant donné un entier naturel m, deux points X et Y de $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ sont dits ***adjacents*** si et seulement si X et Y sont deux sommets consécutifs de $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$. On écrira alors :

$$X \underset{m}{\sim} Y$$

Cette relation d'adjacence conduit à l'existence d'un mot $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m)$ de longueur m, tel que X et Y appartiennent tous deux à l'itéré :

$$T_{\mathcal{M}}\, V_0 = (T_{\mathcal{M}_1} \circ \ldots \circ T_{\mathcal{M}_m})\; V_0$$

Étant donné deux points X et Y du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, on dira que X et Y sont ***adjacents*** si et seulement si il existe un entier naturel m tel que :

$$X \underset{m}{\sim} Y$$

Proposition 2.8. ***Adresses sur le graphe de la fonction de Weierstrass***

Étant donnés un entier naturel non nul m, et un mot $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m)$ de longueur $m \in \mathbb{N}^\star$, sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, pour tout entier j de $\{1, ..., N_b - 2\}$, tout $X = T_{\mathcal{M}}(P_j)$ de $V_m \setminus V_0$, i.e. distinct de l'un des N_b points fixes P_i, $0 \leqslant i \leqslant N_b - 1$, possède exactement deux sommets adjacents, donnés par :

$$T_{\mathcal{M}}(P_{j+1}) \quad et \quad T_{\mathcal{M}}(P_{j-1})$$

avec :

$$T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}_1} \circ \ldots \circ T_{\mathcal{M}_m}$$

Par convention, les sommets adjacents de $T_{\mathcal{M}}(P_0)$ sont $T_{\mathcal{M}}(P_1)$ et $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-1})$, et ceux de $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-1})$, $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-2})$ et $T_{\mathcal{M}}(P_0)$.

Propriété 2.9. *L'ensemble des sommets $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\Gamma_{\mathcal{W}}$.*

Définition 2.8. Mesure, sur le domaine délimité par le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

On appellera **domaine délimité par le graphe** $\Gamma_{\mathcal{W}}$, que l'on notera $\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})$, la limite :

$$\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}}) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}_m})$$

qu'il faut comprendre dans le sens suivant : étant donné une fonction u continue sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, et une mesure μ de support plein sur $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})} u\, d\mu = \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{N_b^m-1} \sum_{X \text{ sommet de } \mathcal{P}_{m,j}} u\,(X)\ \mu\,(\mathcal{P}_{m,j})$$

On dira que μ est une **mesure, sur le domaine délimité par le graphe** $\Gamma_{\mathcal{W}}$.

Définition 2.9. Forme de Dirichlet (voir l'article [14], ou l'ouvrage [15])

Étant donné un espace mesuré (E, μ), une ***forme de Dirichlet*** sur E est une forme bilinéaire symétrique, que l'on désignera par $\mathcal{E}$, définie sur un sous-espace vectoriel D dense dans $L^2(E, \mu)$, telle que :

1. Pour toute fonction u de D, à valeurs réelles : $\mathcal{E}(u, u) \geqslant 0$.
2. D, muni du produit scalaire défini, pour tout couple de fonctions (u, v) de $D \times D$, par :

   $$(u, v)_{\mathcal{E}} = (u, v)_{L^2(E,\mu)} + \mathcal{E}(u, v)$$

   est un espace de Hilbert.
3. Pour toute fonction u de D, on définit :

   $$u_\star = \min\left(\max(u, 0), 1\right) \in D$$

   Alors : $\mathcal{E}(u_\star, u_\star) \leqslant \mathcal{E}(u, u)$ (propriété de Markov, ou propriété d'absence de mémoire).

Définition 2.10. Forme de Dirichlet sur un ensemble fini ([16])

Étant donné un ensemble fini V, muni du produit scalaire usuel qui, à tout couple de fonctions (u, v) définies sur V, associe :

$$(u, v) = \sum_{p\in V} u(p)\, v(p)$$

une ***forme de Dirichlet*** sur V est une forme bilinéaire symétrique $\mathcal{E}$, telle que :

1. Pour toute fonction u définie sur V, à valeurs réelles : $\mathcal{E}(u, u) \geqslant 0$.
2. $\mathcal{E}(u, u) = 0$ si et seulement si u est constante sur V.
3. Pour toute fonction u définie sur V, si on définit :

   $$u_\star = \min\left(\max(u, 0), 1\right)$$

   i.e. :

   $$\forall\, p \in V : \quad u_\star(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u(p) \geqslant 1 \\ u(p) & \text{si} \quad 0 < u(p) < 1 \\ 0 & \text{si} \quad u(p) \leqslant 0 \end{cases}$$

   alors : $\mathcal{E}(u_\star, u_\star) \leqslant \mathcal{E}(u, u)$ (propriété de Markov).

Remarque 2.3. On ne peut que renvoyer à l'article d'A. Beurling et J. Deny [14] pour bien comprendre la théorie sous-jacente aux formes de Dirichlet. L'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ des fonctions u, à valeurs dans le corps des nombres complexes, indéfiniment dérivables, à support dans un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^\star$, est muni de la norme hilbertienne

$$u \mapsto \|u\|_{\mathcal{D}} = \int_\omega |\mathrm{grad}\, u(x)|^2 \, dx$$

Si le complémentaire de ω n'est pas « trop petit », l'espace $\mathcal{D}$ peut être complété en lui rajoutant des fonctions définies presque partout dans ω. L'espace $\mathcal{D}_\omega$, muni de la mesure de Lebesgue ξ, ainsi obtenu vérifie :

i. Pour tout compact $K \subset \omega$, il existe une constante positive C_K telle que, pour tout u de $\mathcal{D}_\omega$:

$$\int_K |u(x)| \, d\xi(x) \leqslant C_K \, \|u\|_{\mathcal{D}_\omega}$$

ii. Si on désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions à valeurs dans le corps des nombres complexes, continues, à support compact, alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_\omega$ est dense dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{D}_\omega$.

iii. Pour toute contraction du plan complexe, et tout u de $\mathcal{D}_\omega$:

$$T\,u \in \mathcal{D}_\omega \quad \text{et} \quad \|T\,u\|_{\mathcal{D}_\omega} \leqslant \|u\|_{\mathcal{D}_\omega}$$

L'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\omega$ est engendré par les potentiels de Green d'énergie finie, qui sont définis de façon directe, comme étant les fonctions u de $\mathcal{D}_\omega$ telles qu'il existe une mesure de Radon μ vérifiant :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_\omega \; : \quad (u, \varphi) = \int_\omega \bar{\varphi} \, d\mu$$

Une telle fonction u est appelée **potentiel engendré par** μ.
L'opérateur linéaire Δ qui, à tout potentiel u de $\mathcal{D}_\omega$, associe la mesure μ engendrant ce potentiel, est appelé **laplacien généralisé associé à l'espace** $\mathcal{D}$.

Il est intéressant de noter que la théorie originale des espaces de Dirichlet concernait, au départ, des espaces de fonctions définies sur un espace de Hausdorff (espace séparé), muni d'une mesure de Radon positive de support plein (tout ouvert non vide de l'espace séparé est de mesure strictement positive pour cette mesure).

Remarque 2.4. Pourquoi la propriété de Markov est-elle si importante dans notre construction d'un laplacien ? Tout simplement, l'absence de mémoire - ou le fait que l'état futur, qui correspond, pour tout entier naturel m, aux valeurs prises par la fonction considérée sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_{m+1}}$, ne dépende que de l'état présent, i.e. les valeurs prises par la fonction considérée sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, justifie la construction du laplacien étape par étape.

Définition 2.11. Energie associée à un couple de fonctions, sur un graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$

Soit m un entier naturel m, et u et v deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur l'ensemble

$$V_m = \left\{\mathcal{S}_0^m, \mathcal{S}_1^m, \ldots, \mathcal{S}_{\mathcal{N}_m - 1}^m\right\}$$

des $\mathcal{N}_m$ sommets de $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$.

L'énergie, sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, associée au couple de fonctions (u, v), est :

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u,v) \;=\; \sum_{i=0}^{\mathcal{N}_m-2} \left(u\left(\mathcal{S}_i^m\right)-u\left(\mathcal{S}_{i+1}^m\right)\right)\left(v\left(\mathcal{S}_i^m\right)-v\left(\mathcal{S}_{i+1}^m\right)\right)$$

que l'on écrira sous la forme :

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u,v) = \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} \left(u(X)-u(Y)\right)\left(v(X)-v(Y)\right)$$

Propriété 2.10. *Étant donné un entier naturel m, et une fonction u, à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sommets de $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, l'application qui, à tout couple de fonctions (u,v), à valeurs réelles, définies sur l'ensemble V_m des $\mathcal{N}_m$ sommets de $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, associe :*

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u,v) = \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} \left(u(X)-u(Y)\right)\left(v(X)-v(Y)\right)$$

est une forme de Dirichlet sur $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$.
De plus :

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(u,u) = 0 \Leftrightarrow u \text{ est constante}$$

Proposition 2.11. ***Extension harmonique d'une fonction, sur le graphe de la fonction de Weierstrass***

Pour tout entier naturel non nul m, étant donnée une fonction u, à valeurs réelles, définie sur V_{m-1}, son ***extension harmonique****, notée $\tilde{u}$, est obtenue comme le prolongement de u à V_m qui minimise l'énergie :*

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(\tilde{u},\tilde{u}) = \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2$$

Le lien entre $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}$ et $\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}}$ est obtenu grâce à l'introduction de deux constantes réelles strictement positives r_m et r_{m+1} telles que :

$$r_m \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2 = r_{m-1} \sum_{X \underset{m-1}{\sim} Y} (u(X) - u(Y))^2$$

En particulier :

$$r_1 \sum_{X \underset{1}{\sim} Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2 = r_0 \sum_{X \underset{0}{\sim} Y} (u(X) - u(Y))^2$$

Par souci de simplification, on fixera, dans ce qui suit, la valeur de la constante initiale : $r_0 = 1$. On a alors :

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(\tilde{u},\tilde{u}) = \frac{1}{r_1}\, \mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_0}}(\tilde{u},\tilde{u})$$

On pose alors :

$$r = \frac{1}{r_1}$$

On notera désormais :

$$\mathcal{E}_m(u) = r_m \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))^2$$

La détermination de l'extension harmonique d'une fonction étant un problème local, sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$, relié au graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ par un procédé identique à celui qui relie $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$ à $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$, on en déduit, pour tout entier naturel non nul m :

$$\mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_m}}(\tilde{u},\tilde{u}) = \frac{1}{r_1}\, \mathcal{E}_{\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}}(\tilde{u},\tilde{u})$$

Par récurrence immédiate, il en résulte :

$$r_m = r_1^m\, r_0 = r^{-m}$$

Si v est une fonction à valeurs réelles, définie sur V_{m-1}, d'extension harmonique $\tilde{v}$, on écrira :

$$\mathcal{E}_m(u,v) = r^{-m} \sum_{X \underset{m}{\sim} Y} (\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y))\,(\tilde{v}(X) - \tilde{v}(Y))$$

Pour plus de précisions sur la construction et l'existence d'extensions harmoniques, on renvoie à [13].

Définition 2.12. Forme de Dirichlet associée à un couple de fonctions définies et continues, sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$

On définit la forme de Dirichlet $\mathcal{E}$ qui, à tout couple (u, v) de fonctions, à valeurs réelles, continues, définies sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, associe, sous réserve d'existence :

$$\mathcal{E}(u,v) = \lim_{m\to+\infty} \mathcal{E}_m\left(u_{|V_m}, v_{|V_m}\right) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{X\underset{m}{\sim}Y}} r^{-m}\ \left(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\right)\ \left(v_{|V_m}(X) - v_{|V_m}(Y)\right)$$

Définition 2.13. Energie normalisée, associée à une fonction u, définie et continue sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$
La suite $\left(\mathcal{E}_m\left(u_{|V_m}\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ étant définie sur

$$V_\star = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$$

on définit l'énergie normalisée, associée à une fonction u, définie et continue sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, par :

$$\mathcal{E}(u) = \lim_{m\to+\infty} \mathcal{E}_m\left(u_{|V_m}\right)$$

Propriété 2.12. *La forme de Dirichlet $\mathcal{E}$ qui, à tout couple (u, v) de fonctions, à valeurs réelles, définies et continues sur le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, associe :*

$$\mathcal{E}(u,v) = \lim_{m\to+\infty} \mathcal{E}_m\left(u_{|V_m}, v_{|V_m}\right) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{X\underset{m}{\sim}Y}} r^{-m}\ \left(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\right)\ \left(v_{|V_m}(X) - v_{|V_m}(Y)\right)$$

vérifie la relation d'auto-similarité :

$$\mathcal{E}(u,v) = r^{-1} \sum_{i=0}^{N_b-1} \mathcal{E}\left(u\circ T_i, v\circ T_i\right)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N_b-1} \mathcal{E}\left(u\circ T_i, v\circ T_i\right) &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{N_b-1} \mathcal{E}_m\left(u_{|V_m}\circ T_i, v_{|V_m}\circ T_i\right)\\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{\substack{X\underset{m}{\sim}Y}} r^{-m} \sum_{i=0}^{N_b-1} \left(u_{|V_m}\left(T_i(X)\right) - u_{|V_m}\left(T_i(Y)\right)\right)\ \left(v\left(T_i(X)\right) - v\left(T_i(Y)\right)\right)\\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{X\underset{m+1}{\sim}Y} r^{-m} \sum_{i=0}^{N_b-1} \left(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\right)\ \left(v(X) - v(Y)\right)\\
&= \lim_{m\to+\infty} r\,\mathcal{E}_{m+1}\left(u_{|V_{m+1}}, v_{|V_{m+1}}\right)\\
&= r\mathcal{E}(u,v)
\end{aligned}$$

□

Notation. On désignera par $\mathrm{dom}\,\mathcal{E}$ le sous-espace des fonctions continues sur $\Gamma_{\mathcal{W}}$, telles que :

$$\mathcal{E}(u) < +\infty$$

Notation. On désignera par $\mathrm{dom}_0\,\mathcal{E}$ le sous-espace des fonctions continues sur $\Gamma_{\mathcal{W}}$, s'annulant sur V_0, telles que :

$$\mathcal{E}(u) < +\infty$$

Pour la construction pratique des formes de Dirichlet, on renvoie à [18].

3 Le laplacien d'une fonction continue sur le graphe de la fonction de Weierstrass

3.1 Construction théorique

Définition 3.1. Mesure auto-similaire, pour le graphe de la fonction de Weierstrass

Une mesure μ sur $\mathbb{R}^2$ est dite **auto-similaire** pour le domaine délimité par le graphe de la fonction de Weierstrass s'il existe une famille de poids strictement positifs $(\mu_i)_{0\leqslant i\leqslant N_b-1}$, tels que :

$$\mu = \sum_{i=0}^{N_b-1} \mu_i\, \mu \circ T_i^{-1} \quad , \quad \sum_{i=0}^{N_b-1} \mu_i = 1$$

Pour plus de précisions sur les mesures auto-similaires, nous renvoyons aux travaux de J. E. Hutchinson (voir [20]).

Propriété 3.1. ***Construction d'une mesure auto-similaire, pour le domaine délimité par le graphe de la fonction de Weierstrass***

Les formes de Dirichlet sus-citées requièrent une mesure de Radon positive partout dense. Le choix d'une mesure auto-similaire, généralement contruite par rapport à un ensemble de référence, de mesure 1 apparaît, dans un premier temps, comme naturel. R. S. Strichartz (voir [3], [21]*) a montré que l'on peut ne considérer que des mesures auto-réplicantes $\tilde{\mu}$, i.e. des mesures $\tilde{\mu}$ telles que :*

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=0}^{N_b-1} \tilde{\mu}_i\, \tilde{\mu} \circ T_i^{-1} \qquad (\star)$$

où $(\tilde{\mu}_i)_{0\leqslant i\leqslant N_b-1}$ est une famille de poids strictement positifs.

C'est cette dernière approche qui convient à notre étude, puisque, dans le cas du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, l'ensemble initial est constitué par le polygone $\mathcal{P}_0$, dont la mesure, qui est l'aire du polygone, n'est pas nécessairement égale à 1.

Supposons qu'il existe une mesure $\tilde{\mu}$ vérifiant $(\star)$. La relation $(\star)$ conduit, pour toute famille de polygones $\mathcal{P}_{m,j}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant j \leqslant N_b^m - 1$ à N_b côtés :

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{0\leqslant j\leqslant N_b^m-1}\mathcal{P}_{m,j}\right)=\sum_{i=0}^{N_b-1}\tilde{\mu}_i\,\tilde{\mu}\left(T_i^{-1}\left(\bigcup_{0\leqslant j\leqslant N_b^m-1}\mathcal{P}_{m,j}\right)\right)$$

et, en particulier :

$$\tilde{\mu}\left(T_0\left(\mathcal{P}_0\right)\cup T_1\left(\mathcal{P}_0\right)\cup T_2\left(\mathcal{P}_0\right)\right)=\sum_{i=0}^{N_b-1}\tilde{\mu}_i\,\tilde{\mu}\left(\mathcal{P}_0\right)$$

soit :

$$\sum_{i=0}^{N_b-1}\tilde{\mu}\left(T_i\left(\mathcal{P}_0\right)\right)=\sum_{i=0}^{N_b-1}\tilde{\mu}_i\,\tilde{\mu}\left(\mathcal{P}_0\right)$$

Il suffit donc de prendre, pour tout i de $\{0,\ldots,N_b-1\}$:

$$\tilde{\mu}_i=\frac{\tilde{\mu}\left(T_i\left(\mathcal{P}_0\right)\right)}{\tilde{\mu}\left(\mathcal{P}_0\right)}$$

Si $\mu_{\mathcal{L}}$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, le choix $\tilde{\mu}=\mu_{\mathcal{L}}$ convient.

On peut, à partir de la mesure $\tilde{\mu}$, construire la mesure auto-similaire μ, telle que :

$$\mu=\sum_{i=0}^{N_b-1}\mu_i\,\mu\circ T_i^{-1}$$

où $(\mu_i)_{0\leqslant i\leqslant N_b-1}$ est une famille de poids strictement positifs dont la somme vaut 1.

Il suffit de prendre, pour tout i de $\{0,\ldots,N_b-1\}$:

$$\mu_i=\frac{\tilde{\mu}\left(T_i\left(\mathcal{P}_0\right)\right)}{\sum_{j=0}^{N_b-1}\tilde{\mu}\left(T_j\left(\mathcal{P}_0\right)\right)}$$

La mesure μ est telle que :

$$\mu\left(\mathcal{P}_0\right)=1$$

Le choix $\mu=\dfrac{\mu_{\mathcal{L}}}{\mu_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{P}_0\right)}=\dfrac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}\left(\mathcal{P}_0\right)}$ convient.

La mesure μ est auto-similaire pour le domaine délimité par le graphe de la fonction de Weierstrass.

Définition 3.2. Laplacien d'ordre $m\in\mathbb{N}^\star$

Pour tout entier naturel non nul m, et toute fonction u, à valeurs réelles, définie sur l'ensemble V_m des sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, on introduit le laplacien d'ordre m, $\Delta_m(u)$, par :

$$\Delta_m u(X)=\sum_{Y\in V_m,\,Y\underset{m}{\sim}X}\left(u(Y)-u(X)\right)\quad\forall\,X\,\in\,V_m\setminus V_0$$

Définition 3.3. Fonction harmonique d'ordre $m \in \mathbb{N}^\star$

Soit m un entier naturel non nul m. Une fonction u, à valeurs réelles, définie sur l'ensemble V_m des sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, est dite **harmonique d'ordre** m si son laplacien d'ordre m est nul :

$$\Delta_m u(X) = 0 \quad \forall\, X \in V_m \setminus V_0$$

Définition 3.4. Fonction harmonique par morceaux d'ordre $m \in \mathbb{N}^\star$

Étant donné un entier naturel non nul m, une fonction u, à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sommets du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, est dite **harmonique par morceaux d'ordre** m si, pour tout mot $\mathcal{M}$ de longueur m, $u \circ T_{\mathcal{M}}$ est harmonique d'ordre m.

Définition 3.5. Domaine d'existence du laplacien, pour une fonction continue sur le graphe Γ_W (voir [14])

On désignera par $\operatorname{dom}\Delta$ le domaine d'existence du laplacien sur le graphe Γ_W, constitué de toutes les fonctions u de $\operatorname{dom}\mathcal{E}$ telles qu'il existe une fonction continue sur Γ_W, notée $\Delta\, u$, et appelée **laplacien de** u, telle que :

$$\mathcal{E}(u, v) = -\int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} v\, \Delta u\, d\mu \quad \text{pour tout } v \in \operatorname{dom}_0 \mathcal{E}$$

Définition 3.6. Fonction harmonique

Une fonction u de $\operatorname{dom}\Delta$ est dite **harmonique** si son laplacien est nul.

Notation. Dans ce qui suit, on désignera par $\mathcal{H}_0 \subset \operatorname{dom}\Delta$ l'espace des fonctions harmoniques, i.e. l'espace des fonctions $u \in \operatorname{dom}\Delta$ vérifiant :

$$\Delta\, u = 0$$

Étant donné un entier naturel m, on notera $\mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V_m)$ l'espace, de dimension N_b^m, des fonctions d'interpolation dites « de niveau m », u, définies sur $\Gamma_{\mathcal{W}}$, continues, telles que, pour tout mot $\mathcal{M}$ de longueur m, $u \circ T_{\mathcal{M}}$ soit harmonique, i.e. :

$$\Delta_m\ (u \circ T_{\mathcal{M}}) = 0$$

Propriété 3.2. *Pour tout entier naturel m :*

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V_m) \subset dom\ \mathcal{E}$$

Propriété 3.3. *Soit m un entier naturel non nul, $X \notin V_0$ un sommet du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, et $\psi_X^m \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_0, V_m)$ une fonction d'interpolation, telle que :*

$$\psi_X^m(Y) = \begin{cases} \delta_{XY} & \forall \quad Y \in V_m \\ 0 & \forall \quad Y \notin V_m \end{cases} \quad , \quad où \quad \delta_{XY} = \begin{cases} 1 & si \quad X = Y \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors, comme $X \notin V_0$ *:* $\psi_X^m \in dom_0 \mathcal{E}$*.*
Pour toute fonction u *de* $dom\,\mathcal{E}$*, admettant un laplacien, la définition (3.5) appliquée à* ψ_X^m *conduit à :*

$$\mathcal{E}(u, \psi_X^m) = \mathcal{E}_m(u, \psi_X^m) = -r^{-m}\, \Delta_m u(X) = -\int_{\mathcal{D}(\Gamma_\mathcal{W})} \psi_X^m\, \Delta u\, d\mu \approx -\Delta u(X) \int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, d\mu$$

puisque, Δu *étant continu sur* $\Gamma_\mathcal{W}$*, et le support de la fonction d'interpolation* ψ_X^m *étant proche de* X *:*

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, \Delta u\, d\mu \approx -\Delta u(X) \int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, d\mu$$

En passant à la limite lorsque l'entier m *tend vers l'infini, on en déduit :*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, \Delta_m u\, d\mu = \Delta u(X) \lim_{m\to+\infty} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, d\mu$$

soit :

$$\Delta u(X) = \lim_{m\to+\infty} r^{-m} \left(\int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, d\mu \right)^{-1} \Delta_m u(X)$$

3.2 Détermination explicite du laplacien d'une fonction u de dom Δ

La détermination explicite du laplacien d'une fonction u de dom Δ requiert de connaître :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_W)} \psi_X^m\, d\mu$$

Comme expliqué dans [19], il suffit de raisonner par analogie avec la dimension 1, plus particulièrement, le segment unité $I = [0, 1]$, d'extrémités $X_0 = (0, 0)$, et $X_1 = (1, 0)$. Les fonctions ψ_{X_1} et ψ_{X_2} telles que, pour tout Y de $\mathbb{R}^2$:

$$\psi_{X_1}(Y) = \delta_{X_1 Y} \quad , \quad \psi_{X_2}(Y) = \delta_{X_2 Y}$$

sont, simplement, des fonctions « tente ». Pour la mesure usuelle, on obtient des valeurs qui ne dépendent ni de X_1, ni de X_2 (on pourrait, ainsi, choisir de placer X_1 et X_2 à l'intérieur de I) :

$$\int_I \psi_{X_1}\, d\mu = \int_I \psi_{X_2}\, d\mu = \frac{1}{2}$$

(ce qui correspond aux surfaces des deux triangles des « tentes »)

Dans notre cas, il faut donc construire le pendant, on ne raisonne plus sur le segment unité, mais sur nos polygones à N_b côtés.

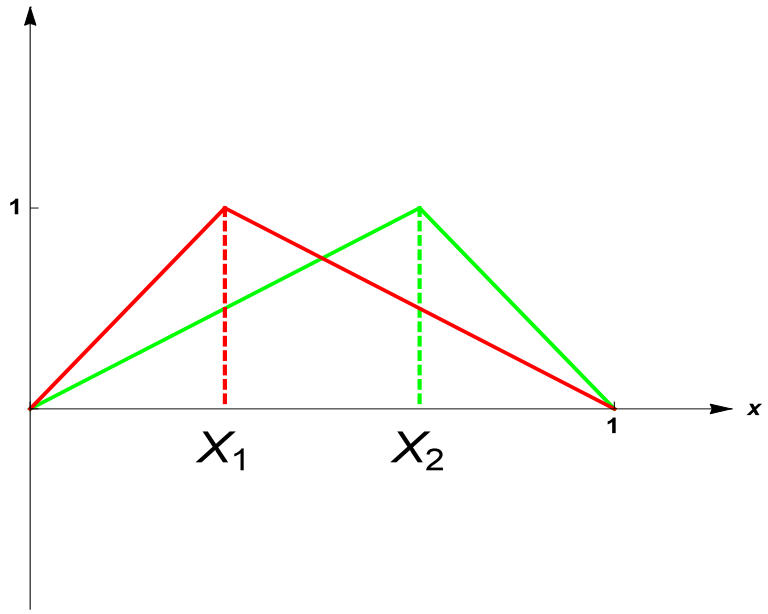

FIGURE 5 – Les graphes respectifs des fonctions d'interpolation ψ_{X_1} et ψ_{X_2}.

Étant donné un entier naturel non nul m, et un sommet X du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, les deux configurations qui se présentent sont :

i. le sommet X appartient à un et un seul polygone à N_b côtés, $\mathcal{P}_{m,j}$, $0 \leqslant j \leqslant N_b^m - 1$.

Dans ce cas, si on considère les fonctions d'interpolation ψ_Z^m associées aux $N_b - 1$ sommets distincts de X de ce polygone :

$$\sum_{Z \text{ sommet de } \mathcal{P}_{m,j}} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})} \psi_Z^m \, d\mu = \mu\left(\mathcal{P}_{m,j}\right)$$

soit, par symétrie :

$$N_b \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})} \psi_X^m \, d\mu = \mu\left(\mathcal{P}_{m,j}\right)$$

Ainsi :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})} \psi_X^m \, d\mu = \frac{1}{N_b} \, \mu\left(\mathcal{P}_{m,j}\right)$$

ii. le sommet X est le point d'intersection de deux polygones à N_b côtés, $\mathcal{P}_{m,j}$ et $\mathcal{P}_{m,j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant N_b^m - 2$.

Il faut alors prendre en compte les contributions de ces deux polygones, ce qui conduit à :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})} \psi_X^m \, d\mu = \frac{1}{2\,N_b} \, \left\{\mu\left(\mathcal{P}_{m,j}\right) + \mu\left(\mathcal{P}_{m,j+1}\right)\right\}$$

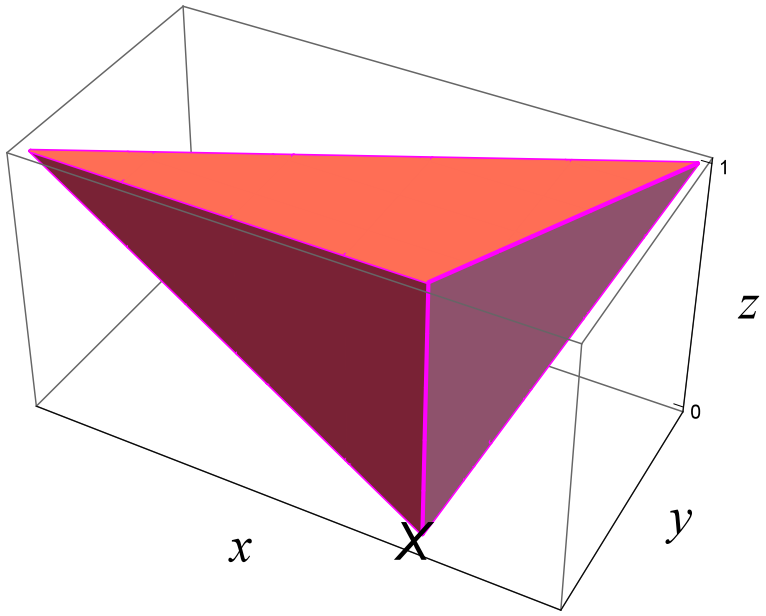

FIGURE 6 – Le graphe d'une fonction d'interpolation ψ_X^m, $m \in \mathbb{N}$, dans le cas $N_b = 3$.

Théorème 3.4. *Soit u dans $\mathrm{dom}\,\Delta$. Alors, la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel m, et tout X de $V_\star \setminus V_0$:*

$$f_m(X) = r^{-m} \left(\int_{\mathcal{D}(\Gamma_\mathcal{W})} \psi_X^m \, d\mu \right)^{-1} \Delta_m \, u(X)$$

converge uniformément vers $\Delta\, u$, et réciproquement, si la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue sur $V_\star \setminus V_0$, alors :

$$u \in \mathrm{dom}\,\Delta$$

Démonstration. Soit u dans $\mathrm{dom}\,\Delta$. Alors :

$$r^{-m} \left(\int_{\mathcal{D}(\Gamma_\mathcal{W})} \psi_X^m \, d\mu \right)^{-1} \Delta_m \, u(X) = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}(\Gamma_\mathcal{W})} \Delta\, u \, \psi_X^m \, d\mu}{\displaystyle\int_{\mathcal{D}(\Gamma_\mathcal{W})} \psi_X^m \, d\mu}$$

Comme u est dans $\mathrm{dom}\,\Delta$, son laplacien $\Delta\, u$ existe, et est continu sur le graphe $\Gamma_\mathcal{W}$. La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en résulte.

Réciproquement, si la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue sur $V_\star \setminus V_0$, alors, pour tout entier naturel m, et tout v de $\mathrm{dom}_0\,\mathcal{E}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_m(u,v) &= \sum_{(X,Y)\in V_m^2,\, X\underset{m}{\sim}Y} r^{-m}\,\big(u_{|V_m}(X)-u_{|V_m}(Y)\big)\,\big(v_{|V_m}(X)-v_{|V_m}(Y)\big)\\
&= \sum_{(X,Y)\in V_m^2,\, X\underset{m}{\sim}Y} r^{-m}\,\big(u_{|V_m}(Y)-u_{|V_m}(X)\big)\,\big(v_{|V_m}(Y)-v_{|V_m}(X)\big)\\
&= -\sum_{X\in V_m\setminus V_0} r^{-m} \sum_{Y\in V_m\, Y\underset{m}{\sim}X} v_{|V_m}(X)\,\big(u_{|V_m}(Y)-u_{|V_m}(X)\big)\\
&\qquad -\sum_{X\in V_0} r^{-m} \sum_{Y\in V_m\, Y\underset{m}{\sim}X} v_{|V_m}(X)\,\big(u_{|V_m}(Y)-u_{|V_m}(X)\big)\\
&= -\sum_{X\in V_m\setminus V_0} r^{-m}\, v(X)\,\Delta_m u(X)\\
&= -\sum_{X\in V_m\setminus V_0} v(X)\left(\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})}\psi_X^m\,d\mu\right) r^{-m}\left(\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})}\psi_X^m\,d\mu\right)^{-1}\Delta_m u(X)
\end{aligned}
$$

Notons que tout X de $V_m\setminus V_0$ admet exactement deux sommets adjacents appartenant à $V_m\setminus V_0$, ce qui explique pourquoi la sommation

$$
\sum_{X\in V_m\setminus V_0} r^{-m} \sum_{Y\in V_m\setminus V_0,\, Y\underset{m}{\sim}X} v(X)\,\big(u_{|V_m}(Y)-u_{|V_m}(X)\big)
$$

fait apparaître le même nombre de termes que dans

$$
\sum_{(X,Y)\in (V_m\setminus V_0)^2,\, X\underset{m}{\sim}Y} r^{-m}\,\big(u_{|V_m}(Y)-u_{|V_m}(X)\big)\,\big(v_{|V_m}(Y)-v_{|V_m}(X)\big)
$$

Pour tout entier naturel m, on introduit la suite de fonctions $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel m, et tout X de $V_m\setminus V_0$:

$$
f_m(X) = r^{-m}\left(\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})}\psi_X^m\,d\mu\right)^{-1}\Delta_m u(X)
$$

La suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers Δu. Il en résulte :

$$
\mathcal{E}_m(u,v) = -\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{W}})}\left\{\sum_{X\in V_m\setminus V_0} v_{|V_m}(X)\,\Delta\, u_{|V_m}(X)\,\psi_X^m\right\}d\mu
$$

□

4 Dérivées normales

Reprenons le cas d'une fonction u deux fois dérivable sur $I=[0,1]$. Pour toute fonction v dérivable sur $[0,1]$, ne s'annulant pas en 0 et en 1 :

$$
\int_0^1 (\Delta u)(x)\,v(x)\,dx = -\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx + u'(1)\,v(1) - u'(0)\,v(0)
$$

Il est naturel de définir les dérivées normales :

$$
\partial_n u(1) = u'(1) \quad \text{et} \quad \partial_n u(0) = u'(0)
$$

ce qui conduit à :

$$\int_0^1 (\Delta u)\,(x)\,v(x)\,dx = -\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx + \sum_{\partial\,[0,1]} v\,\partial_n\,u$$

On retrouve un cas particulier de la formule de Gauss-Green, pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^\star$:

$$\int_\Omega \nabla\,u\,\nabla\,v\,d\mu = -\int_\Omega (\Delta u)\;v\,d\mu + \int_{\partial\,\Omega} v\,\partial_n\,u\,d\sigma$$

où μ est une mesure sur Ω, et $d\sigma$ la surface élémentaire sur $\partial\,\Omega$.

Pour obtenir une formulation équivalente dans le cas du graphe $\Gamma_{\mathcal{W}}$, il faudrait avoir, pour un couple de fonctions (u, v) définies et continues sur $\Gamma_{\mathcal{W}}$ telles que u admette une dérivée normale :

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_\Omega (\Delta u)\;v\,d\mu + \sum_{V_0} v\,\partial_n\,u$$

Pour tout entier naturel m :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_m(u,v)\\
&\qquad= \sum_{(X,Y)\,\in\,V_m^2,\;X\underset{m}{\sim}Y} r^{-m}\;\big(u_{|V_m}(Y) - u_{|V_m}(X)\big)\;\big(v_{|V_m}(Y) - v_{|V_m}(X)\big)\\
&\qquad= \quad -\sum_{X\,\in\,V_m\setminus V_0} r^{-m} \sum_{Y\,\in\,V_m,\;Y\underset{m}{\sim}X} v_{|V_m}(X)\;\big(u_{|V_m}(Y) - u_{|V_m}(X)\big)\\
&\qquad\qquad -\sum_{X\,\in\,V_0} r^{-m} \sum_{Y\,\in\,V_m,\;Y\underset{m}{\sim}X} v_{|V_m}(X)\;\big(u_{|V_m}(Y) - u_{|V_m}(X)\big)\\
&\qquad= \qquad\qquad -\sum_{X\,\in\,V_m\setminus V_0} v_{|V_m}(X)\,r^{-m}\,\Delta_m\,u_{|V_m}(X)\\
&\qquad\qquad +\sum_{X\,\in\,V_0}\sum_{Y\,\in\,V_m,\;Y\underset{m}{\sim}X} r^{-m}\,v_{|V_m}(X)\;\big(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\big)
\end{aligned}$$

A noter que tout X de $V_m \setminus V_0$ admet exactement deux sommets adjacents appartenant à $V_m \setminus V_0$, ce qui explique pourquoi la sommation

$$\sum_{X\,\in\,V_m} r^{-m} \sum_{Y\,\in\,V_m,\;Y\underset{m}{\sim}X} v_{|V_m}(X)\;\big(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\big)$$

fait apparaître le même nombre de termes que dans

$$\sum_{(X,Y)\,\in\,V_m^2,\;X\underset{m}{\sim}Y} r^{-m}\;\big(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\big)\;\big(v_{|V_m}(X) - v_{|V_m}(Y)\big)$$

On retrouve alors une formule analogue à celle de la formule de Gauss-Green, où le rôle de la dérivée normale est joué par :

$$\sum_{X\,\in\,V_0} r^{-m} \sum_{Y\,\in\,V_m,\;Y\underset{m}{\sim}X} \big(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\big)$$

Définition 4.1. Pour tout X de V_0, et toute fonction u continue sur $\Gamma_{\mathcal{W}}$, on dira que u admet une dérivée normale en X, notée $\partial_n\,u(X)$, si

$$\lim_{m\to+\infty} r^{-m} \sum_{Y\,\in\,V_m,\;Y\underset{m}{\sim}X} \big(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\big) < +\infty$$

On posera alors :

$$\partial_n u(X) = \lim_{m\to+\infty} r^{-m} \sum_{Y\in V_m,\, Y\underset{m}{\sim} X} \big(u_{|V_m}(X) - u_{|V_m}(Y)\big) < +\infty$$

Définition 4.2. Pour tout entier naturel m, tout X de V_m, et toute fonction u continue sur $\Gamma_{\mathcal{W}}$, on dira que u admet une dérivée normale en X, notée $\partial_n u(X)$, si

$$\lim_{k\to+\infty} r^{-k} \sum_{Y\in V_k,\, Y\underset{k}{\sim} X} \big(u_{|V_k}(X) - u_{|V_k}(Y)\big) < +\infty$$

On posera alors :

$$\partial_n u(X) = \lim_{k\to+\infty} r^{-k} \sum_{Y\in V_k,\, Y\underset{k}{\sim} X} \big(u_{|V_k}(X) - u_{|V_k}(Y)\big) < +\infty$$

Remarque 4.1. On peut ainsi étendre la définition de la dérivée normale de u à $\Gamma_{\mathcal{W}}$.

Théorème 4.1. *Soit u dans $\mathrm{dom}\,\Delta$. Alors, pour tout X de $\Gamma_{\mathcal{W}}$, $\partial_n u(X)$ existe. De plus, pour tout v de $\mathrm{dom}\,\mathcal{E}$, et tout entier naturel m, la formule de Gauss-Green s'écrit :*

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_{\Gamma_{\mathcal{W}}} (\Delta u)\; v\, d\mu + \sum_{V_0} v\, \partial_n u$$

5 Spectre du laplacien

Dans ce qui suit, on considère un élément u de $\mathrm{dom}\,\Delta$. En appliquant la méthode de ***décimation spectrale*** développée par R. S. Strichartz [19], à partir des travaux de M. Fukushima et T. Shima [22] pour être en mesure de déterminer les valeurs propres du laplacien Δu précédemment construit, on commence par s'intéresser aux valeurs propres $(-\Lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la suite de laplaciens discrets $(\Delta_m u)_{m\in\mathbb{N}}$, construits sur la suite des graphes $(\Gamma_{\mathcal{W}_m})_{m\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel m, les restrictions des fonctions propres du laplacien continu Δu au graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ sont aussi fonctions propres du laplacien Δ_m, ce qui conduit à des relations de récurrence entre les valeurs propres de rang m et $m+1$.

On cherche donc à déterminer les solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$-\Delta u = \Lambda u \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{W}}$$

comme limites, lorsque l'entier m tend vers l'infini, des solutions de :

$$-\Delta_m u = \Lambda_m u \quad \text{sur } V_m \setminus V_0$$

Soit alors $m \geqslant 1$. On considère une fonction propre u_{m-1} sur $V_{m-1}\setminus V_0$, associée à la valeur propre Λ_{m-1}, et on cherche à prolonger u_{m-1} sur $V_m \setminus V_0$ en une fonction u_m, qui soit elle-même une fonction propre de Δ_m, associée à la valeur propre Λ_m, et, par là-même, obtenir une relation de récurrence entre les valeurs propres Λ_m et Λ_{m-1}. Étant donné trois sommets consécutifs de $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$, X_k, X_{k+1}, X_{k+2},

où k est un entier naturel générique, on désignera par Y_{k+1}, …, Y_{k+N_b-1}, les points de $V_m \setminus V_{m-1}$ tels que : Y_{k+1}, …, Y_{k+N_b-1} soient entre X_k et X_{k+1}, et par Y_{k+N_b+1}, …, $Y_{k+2\,N_b-1}$, les points de $V_m \setminus V_{m-1}$ tels que : Z_{k+1}, …, Z_{k+N_b-1} soient entre X_{k+1} et X_{k+2}. Par souci de cohérence, on pose :

$$Y_{k+N_b} = X_{k+1} \quad \text{et} \quad Y_{k+2\,N_b} = X_{k+2}$$

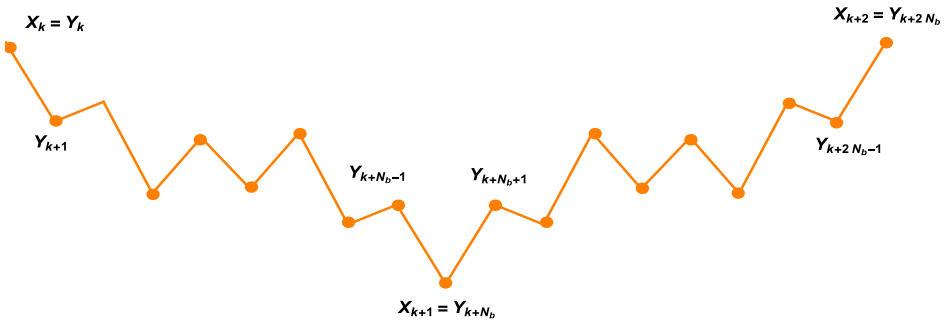

FIGURE 7 – Les points X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, et Y_k, …, Y_{k+N_b}, …, $Y_{k+2\,N_b}$.

Nota Bene : On a absolument besoin de considérer trois sommets consécutifs de V_{m-1} pour pouvoir disposer de la relation :

$$\{\Lambda_{m-1} - 2\}\ u_{m-1}(X_{k+1}) = -u_{m-1}(X_k) - u_{m-1}(X_{k+2})$$

Les valeurs de u_{m-1} en X_k, X_{k+1}, X_{k+2} sont donc supposées connues.
L'équation aux valeurs propres en Λ_m conduit aux deux systèmes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \{\Lambda_m - 2\}\ u_m(Y_{k+1}) & = & -u_{m-1}(X_k) - u_m(Y_{k+2}) \\ \{\Lambda_m - 2\}\ u_m(Y_{k+i}) & = & -u_m(Y_{k+i-1}) - u_m(Y_{k+i+1}) \\ \{\Lambda_m - 2\}\ u_m(Y_{k+N_b-1}) & = & -u_{m-1}(X_{k+1}) - u_m(Y_{k+N_b-2}) \end{array}\right. , \quad 1 \leqslant i \leqslant N_b - 3$$

et :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \{\Lambda_m - 2\}\ u_m(Y_{k+N_b+1}) & = & -u_{m-1}(X_{k+1}) - u_m(Y_{k+N_b+2}) \\ \{\Lambda_m - 2\}\ u_m(Y_{k+N_b+i}) & = & -u_m(Y_{k+N_b+i-1}) - u_m(Y_{k+N_b+i+1}) \\ \{\Lambda_m - 2\}\ u_m(Y_{k+2\,N_b-1}) & = & -u_{m-1}(X_{k+2}) - u_m(Y_{k+2\,N_b-2}) \end{array}\right. , \quad 1 \leqslant i \leqslant N_b - 3$$

La suite $(u_m(Y_{k+i}))_{0 \leqslant i \leqslant 2\,N_b}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :

$$r^2 + \{\Lambda_m - 2\}\ r + 1 = 0$$

Le discriminant est :

$$\delta_m = \{\Lambda_m - 2\}^2 - 4 = \omega_m^2 \quad , \quad \omega_m \in \mathbb{C}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont les scalaires $r_{1,m}$ et $r_{2,m}$, donnés par :

$$r_{1,m} = \frac{2 - \Lambda_m - \omega_m}{2} \quad , \quad r_{2,m} = \frac{2 - \Lambda_m + \omega_m}{2}$$

On a alors, pour tout entier i de $\{0, \ldots, 2\,N_b\}$:

$$u_m\,(Y_{k+i}) = \alpha_m\,r_{1,m}^i + \beta_m\,r_{2,m}^i$$

Le prolongement u_m de u_{m-1} à $V_m \setminus V_0$ doit être fonction propre de Δ_m, associée à la valeur propre Λ_m. Sachant que u_{m-1} est fonction propre de Δ_{m-1}, associée à la valeur propre Λ_{m-1}, la suite $(u_{m-1}\,(X_{k+i}))_{0 \leqslant i \leqslant N_b}$ doit elle-même vérifier une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 qui soit le pendant, au rang m, de celle vérifiée par la suite $(u_m\,(Y_{k+i}))_{0 \leqslant i \leqslant 2\,N_b}$, donc d'équation caractéristique :

$$\{\Lambda_{m-1} - 2\}\;r = -1 - r^2$$

Le discriminant est :

$$\delta_{m-1} = \{\Lambda_{m-1} - 2\}^2 - 4 = \omega_{m-1}^2 \quad , \quad \omega_{m-1} \in \mathbb{C}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont les scalaires $r_{1,m-1}$ et $r_{2,m-1}$, donnés par :

$$r_{1,m-1} = \frac{2 - \Lambda_{m-1} - \omega_{m-1}}{2} \quad , \quad r_{2,m-1} = \frac{2 - \Lambda_{m-1} + \omega_{m-1}}{2}$$

Pour tout entier i de $\{0, \ldots, N_b\}$:

$$u_{m-1}\,(Y_{k+i}) = \alpha_{m-1}\,r_{1,m-1}^i + \beta_{m-1}\,r_{2,m-1}^i$$

A partir de là, il faut que soient vérifiées les relations de compatibilité suivantes, imposées par la décimation spectrale :

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_m\,(Y_k) & = & u_{m-1}\,(X_k) \\ u_m\,(Y_{k+N_b}) & = & u_{m-1}\,(X_{k+1}) \\ u_m\,(Y_{k+2\,N_b}) & = & u_{m-1}\,(X_{k+2}) \end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha_m + \beta_m & = & \alpha_{m-1} + \beta_{m-1} & & \mathcal{C}_m \\ \alpha_m\,r_{1,m}^{N_b} + \beta_m\,r_{2,m}^{N_b} & = & \alpha_{m-1}\,r_{1,m-1} + \beta_{m-1}\,r_{2,m-1} & & \mathcal{C}_{1,m} \\ \alpha_m\,r_{1,m}^{2\,N_b} + \beta_m\,r_{2,m}^{2\,N_b} & = & \alpha_{m-1}\,r_{1,m-1}^2 + \beta_{m-1}\,r_{2,m-1}^2 & & \mathcal{C}_{2,m} \end{array}\right.$$

où, pour tout entier naturel m, α_m et β_m sont des constantes scalaires, réelles ou complexes.

Le graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_{m-1}}$ étant relié au graphe $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ par un procédé identique à celui qui relie $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$ à $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$, il est légitime de considérer que les constantes α_m et β_m ne dépendent pas de l'entier m :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^\star : \quad \alpha_m = \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad \beta_m = \beta \in \mathbb{R}$$

Le système précédent devient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha\,r_{1,m}^{N_b} + \beta\,r_{2,m}^{N_b} & = & \alpha\,r_{1,m-1} + \beta\,r_{2,m-1} \\ \alpha\,r_{1,m}^{2\,N_b} + \beta\,r_{2,m}^{2\,N_b} & = & \alpha\,r_{1,m-1}^2 + \beta\,r_{2,m-1}^2 \end{array}\right.$$

Il faut alors envisager les deux cas suivants :

i. Premier cas :

Pour tout entier naturel m :

$$r_{1,m} \in \mathbb{R} \quad , \quad r_{2,m} \in \mathbb{R}$$

et, plus précisément :

$$r_{1,m} < 0 \quad , \quad r_{2,m} < 0$$

puisque la fonction φ, qui, à tout réel $x \geqslant 4$, associe :

$$\varphi(x) = \frac{2 - x + \varepsilon \sqrt{\{x-2\}^2 - 4}}{2} \quad , \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

est strictement croissante sur $]4, +\infty[$. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $]4, +\infty[$ sur $\varphi\left(]4, +\infty[\right) =]-1, 0[$.

Cette configuration n'est donc possible que si l'entier N_b est impair. Introduisons la fonction ϕ, qui, à tout réel $x \geqslant 2$, associe :

$$\phi(x) = |\varphi(x)| = \frac{-2 + x - \varepsilon \sqrt{\{x-2\}^2 - 4}}{2}$$

où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
La fonction ϕ réalise une bijection de $]4, +\infty[$ sur $\phi\left(]4, +\infty[\right) =]0, 1[$. On désignera par ϕ^{-1} sa bijection réciproque :

$$\forall\ x \in]0, 1[: \quad \phi^{-1}(x) = \frac{(y+1)^2}{y}$$

.

On a alors :

$$\varphi\left(\Lambda_{m-1}\right) = \frac{2 - \Lambda_{m-1} + \varepsilon\, \omega_{m-1}}{2} \leqslant 0$$

Il en résulte :

$$(-1)^{N_b}\ \left(\varphi\left(\Lambda_m\right)\right)^{N_b} = \varphi\left(\Lambda_{m-1}\right) \leqslant 0$$

ce qui conduit à :

$$\phi\left(\Lambda_m\right) = \left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}}$$

puis :

$$\Lambda_m = \phi^{-1}\left(\left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}}\right) = \frac{\left\{\left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}} + 1\right\}^2}{\left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}}} = \frac{\left\{\left(\dfrac{-2 + \Lambda_{m-1} - \varepsilon \sqrt{\{\Lambda_{m-1} - 2\}^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{N_b}} + 1\right\}^2}{\left(\dfrac{-2 + \Lambda_{m-1} - \varepsilon \sqrt{\{\Lambda_{m-1} - 2\}^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{N_b}}}$$

ii. Second cas :

Pour tout entier naturel m :

$$r_{1,m} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad r_{2,m} = \overline{r_{1,m}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

On introduit alors :

$$\rho_m = |r_{1,m}| \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \theta_m = \arg r_{1,m} \quad \text{si} \quad r_{1,m} \neq 0$$

Le système précédent s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_m^{N_b} \left\{ \gamma \cos\left(N_b\, \theta_m\right) + \delta \sin\left(N_b\, \theta_m\right) \right\} & = & \rho_{m-1} \left\{ \gamma \cos\left(\theta_{m-1}\right) + \delta \sin\left(\theta_{m-1}\right) \right\} \\ \rho_m^{N_b} \left\{ \gamma \cos\left(2\, N_b\, \theta_m\right) + \delta \sin\left(2\, N_b\, \theta_m\right) \right\} & = & \rho_{m-1} \left\{ \gamma \cos\left(2\, \theta_{m-1}\right) + \delta \sin\left(2\, \theta_{m-1}\right) \right\} \end{array} \right.$$

où γ et δ sont deux constantes réelles.

Le système est vérifié pour :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_m^{N_b} & = & \rho_{m-1} \\ \theta_m & = & \dfrac{\theta_{m-1}}{N_b} \end{array} \right.$$

et donc :

$$\phi\left(\Lambda_m\right) = \left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}}$$

ce qui conduit à la même relation que dans le cas précédent :

$$\Lambda_m = \phi^{-1}\left(\left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}}\right) = \frac{\left\{\left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}} + 1\right\}^2}{\left(\phi\left(\Lambda_{m-1}\right)\right)^{\frac{1}{N_b}}} = \frac{\left\{\left(\dfrac{-2 + \Lambda_{m-1} - \varepsilon\sqrt{\left\{\Lambda_{m-1} - 2\right\}^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{N_b}} + 1\right\}^2}{\left(\dfrac{-2 + \Lambda_{m-1} - \varepsilon\sqrt{\left\{\Lambda_{m-1} - 2\right\}^2 - 4}}{2}\right)^{\frac{1}{N_b}}}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Références

[1] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpiński spaces, Japan J. Appl. Math., **8** (1989), pages 259-290.

[2] J. Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, Trans. Amer. Math. Soc., **335**(1993), pages 721-755.

[3] R. S. Strichartz, Analysis on fractals, Notices of the AMS, **46**(8), 1999, pages 1199-1208.

[4] J. Kigami, R. S. Strichartz, K. C. Walker, Constructing a Laplacian on the Diamond Fractal, A. K. Peters, Ltd, Experimental Mathematics, **10**(3), pages 437-448.

[5] K. Weierstrass, Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, 1967, in Karl Weiertrass Mathematische Werke, Abhandlungen II, Johnson, Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenchaften am 18 Juli 1872, **2**, pages 71-74.

[6] E. C. Titschmarsh, The theory of functions, Second edition, Oxford University Press, 1939, pages 351-353.

[7] G. H. Hardy, Theorems Connected with Maclaurin's Test for the Convergence of Series, Proc. London Math. Soc., 1911, s2-9 (1), pages 126-144.

[8] B. B. Mandelbrot, Fractals : form, chance, and dimension, San Francisco : Freeman, 1977.

[9] K. Falconer,The Geometry of Fractal Sets, 1985, Cambridge University Press, pages 114-149.

[10] B. Hunt, The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (3), 1998, pages 791-800.

[11] M. F. Barnsley, S. Demko, Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals, The Proceedings of the Royal Society of London, **A**(399), 1985, pages 243-275.

[12] M.V. Berry, and Z.V. Lewis, On the Weierstrass-Mandelbrot function, Proc. R. Soc. Lond., **A**(370), 1980, pages 459-484.

[13] C. Sabot, Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4 e série, **30**(4), 1997, pages 605-673.

[14] A. Beurling, J. Deny, Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire, Acta Mathematica, **99** (1), 1985, pages 203-224.

[15] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, Dirichlet forms and symmetric Markov processes, 1994, Walter de Gruyter & Co.

[16] J. Kigami, Harmonic Analysis for Resistance Forms, Journal of Functional Analysis, **204**, 2003, pages 399-444.

[17] N. Riane, 2016, Autour du Laplacien sur des domaines présentant un caractère fractal, Mémoire de recherche, M2 Mathématiques de la modélisation, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6.

[18] Cl. David et N. Riane, Formes de Dirichlet et fonctions harmoniques sur le graphe de la fonction de Weierstrass, preprint, HAL.

[19] R. S. Strichartz, Differential Equations on Fractals, A tutorial, Princeton University Press, 2006.

[20] J. E. Hutchinson, Fractals and self similarity, Indiana University Mathematics Journal 30, 1981, pages 713-747.

[21] R. S. Strichartz, A. Taylor and T. Zhang, Densities of Self-Similar Measures on the Line, Experimental Mathematics, **4**(2), 1995, pages 101-128.

[22] M. Fukushima and T. Shima, On a spectral analysis for the Sierpinski gasket, Potential Anal., **1**, 1992, pages 1-3.