على سرعة انقراض السكان في بيئة عشوائية

C. R. Biol. **340 (2017) 259–263.**
http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة
Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا
nicolas.bacaer@ird.fr

الملخص

نحن مهتمون بمعدل انقراض السكان الذين يعيشون في بيئة عشوائية تحكمها سلسلة ماركوف في وقت مستمر. يموت كل فرد أو يتكاثر بمعدل يعتمد على البيئة. أثناء التكاثر ، يفترض أن عدد النسل يتبع قانون احتمالي معين يعتمد أيضًا على البيئة. في ما يسمى بالحالة دون الحرجة حيث ينقرض السكان بالتأكيد ، يتم تحديد معدل الانقراض بشكل صريح. بمعنى ما ، فإن العشوائية البيئية تبطئ انقراض السكان.

الكلمات المفتاحية: الديناميكا السكانية ، العشوائية الديمغرافية ، العشوائية البيئية

1. مقدمة

لقد درست العديد من دراسات النمذجة تأثير العشوائية الديموغرافية والبيئية على ديناميكيات السكان. كما لوحظ على سبيل المثال (Gaveau et al.، 1996؛ Lebreton et al.، 2007) ، يعمل حيث يعامل السكان كرقم حقيقي والذين يستخدمون تقديرات الانتشار (Lande et al.، 2003) يمكن يؤدي إلى نتائج غير دقيقة لمعدل انقراض السكان عندما يكون هذا الانقراض مؤكدًا. للحفاظ على عدد السكان الصحيح ، (Athreya and Karlin، 1971) درس عمليات التفرع في وقت منفصل مع بيئة عشوائية ثابتة وأظهر تحت أي ظروف انقراض السكان مؤكد. كما هو الحال في بيئة ثابتة ، يمكننا التمييز بين ثلاث حالات: فوق الحرجة ، حرجة وشبه حرجة. (Cogburn and Torrez، 1981؛ Bacaër and Ed-Darraz، 2014) نظروا في ظروف الانقراض للنماذج المماثلة في الوقت المستمر ، أي عمليات الولادة والموت في بيئة عشوائية. . بالنسبة للحالة دون الحرجة ذات الوقت المنفصل والبيئة العشوائية ، (D'Souza and Hambly، 1997؛ Guivarc'h and Liu، 2001) من بين أمور أخرى ، حسب معدل الانقراض ، مما يؤدي إلى التمييز بين فرعين آخرين - مخططات تصنف على أنها دون الحرجة للغاية وضعف. في الوقت المستمر ، حسب (باكير ، 2017) معدل الانقراض لعملية خطية للولادة والموت في بيئة ماركوف العشوائية ؛ كانت الطريقة في تحديد الوقت الذي سيتم اختزاله في قضية (D'Souza and Hambly، 1997) ، ثم لجعل الخطوة الزمنية تميل نحو 0. لكن هذا النموذج لم يسمح بالولادة المتزامنة للعديد من الأفراد. الهدف أدناه هو رفع هذا التقييد ، أي دراسة "العمليات المتفرعة المتفرعة للوقت" (Méléard، 2016، §4.4) في بيئة عشوائية ، لحساب سرعة الانقراض المقابل ولاحظ أن هذه السرعة أقل (في القيمة المطلقة) من تلك التي قد يتوقعها المرء.

في القسم 2 ، نقدم نموذجنا مع بيئة تتأرجح بين حالات K وفقًا لسلسلة ماركوف في وقت مستمر. في القسم 3 ، نحسب معدل النمو δ_i (إيجابي أو سلبي) للسكان في البيئة i ($(1 \leq i \leq K)$) ومتوسط النسبة u_iالوقت الذي تقضيه البيئة في الحالة i . نوضح في القسم 4 أن السكان منقرضون بالتأكيد إذا كان متوسط معدل النمو سلبيًا ، أي إذا$\sum_i u_i\, \delta_i \leq 0$. ثم نظهر في القسم 5 أنه في الحالة دون الحرجة حيث $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$، سرعة الانقراض ω من السكان ، التي تحددها حقيقة أن احتمال عدم الانقراض ينخفض كما $e^{\omega t}$ مع $\omega < 0$، تعطى من الصيغة

$$\omega = \min_{0\leq\alpha\leq 1} s(Q + \alpha\, \Delta),$$

حيث:

- Q هي المصفوفة التي تصف التحولات العشوائية للبيئة ؛
- Δ هي المصفوفة القطرية بمعدلات النمو $(\delta_i)_{1\leq i\leq K}$ على القطر.
- $s(Q + \alpha\, \Delta)$ يشير إلى الارتباط الطيفي ، أي القيمة الذاتية لأكبر جزء حقيقي ، من المصفوفة $Q + \alpha\, \Delta$.

هو تعميم للصيغة التي تم الحصول عليها في (باكير ، 2017) للعمليات الخطية للولادة والموت ، والتي لا تأخذ في الاعتبار الولادات المتزامنة. نعرض في القسم 6 ذلك

$$\sum_i u_i\, \delta_i \le \omega < 0$$

وأن التفاوت الأول صارم إذا δ_iليست كلها متساوية. معدل الانقراض أقل (بالقيمة المطلقة) من متوسط معدل النمو. لذلك يمكننا القول أنه بطريقة معينة ، فإن العشوائية البيئية تبطئ انقراض السكان في نموذجنا. في الختام ، نلاحظ أن عدم مساواة مماثل ينطبق على عمليات التفرع في وقت منفصل مع بيئة عشوائية: تم العثور عليه بالفعل ضمنيًا في (Guivarc'h and Liu، 2001).

2. النموذج

نفترض أن البيئة تتأرجح بشكل عشوائي بين حالات K وفقًا لسلسلة ماركوف في وقت مستمر. وبعبارة أخرى ، هناك أرقام$0 \ge Q_{i,j}$بحيث إذا كانت البيئة في الحالة j ، فهناك احتمال$Q_{i,j}\,dt$التي تحولها البيئة إلى الحالة i لـ$i \neq j$ خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر dt. نحدد $Q = (Q_{i,j})$ المصفوفة المربعة ذات الحدود القطرية $Q_{j,j} = -\sum_{i\neq j} Q_{i,j}$. نفترض أيضا أن المصفوفة$Q$غير قابل للاختزال ، مما يعني أنه في الرسم البياني الموجه إلى رؤوس K بحافة من j إلى i ($i \neq j$) إذا $Q_{i,j} > 0$، قمتين i_1 و i_2 يمكن الوصول إليه دائمًا عن طريق المسار i_1 نحو i_2 وطريق i_2 نحو i_1. ثم يوجد ناقل فريد ش مع

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

(سيريكولا ، 2013 ، ص 152). المكونu_iيمثل متوسط نسبة الوقت الذي تقضيه البيئة في الحالة i .

ضع في اعتبارك مجموعة من الأفراد ، لا جنسي أو أنثى ، الذين يموتون ويتكاثرون في هذه البيئة بشكل مستقل عن بعضهم البعض. إذا كانت البيئة في الحالة i ، فإننا نفترض ذلك ، خلال كل فترة زمنية متناهية الصغرdt، كل فرد يتكاثر باحتمال $a_i\,dt$ ($(a_i > 0)$) ويموت باحتمال $b_i\,dt$ ($(b_i > 0)$). إذا تكاثر الفرد ، افترض أنه أنجب عددًا من الأفراد ($n = 0, 1, 2 \ldots$) مع الاحتمال $q_{n,i}$مع $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1$ للجميع i.

طريقة أخرى لمعرفة ذلك هي أن نقول أنه في البيئة i ، يواجه كل فرد حدثًا مع احتمال$c_i\,dt$ (أين $c_i = a_i + b_i$) خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر dt. في حالة وقوع الحدث ، يتم استبدال الفرد بـ 0 فرد باحتمالية$p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$وبواسطة n من الأفراد ($n \ge 1$) مع الاحتمال $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}\, q_{n-1,i}$. لذا ، $\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1$ للجميع i. لذا فهو تعميم لعملية التوصيل في الوقت المستمر (Méléard، 2016، §4.4) في حالة بيئة عشوائية. ومن المفترض كذلك

$$m_i = \sum_{n \ge 1} n\, p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

نحدد

$$\delta_i = c_i(m_i - 1)$$

و Δالمصفوفة القطرية مع $(\delta_i)_{1\le i\le K}$ على القطر.

3. معدلات النمو δ_i

في هذا النموذج ، الاحتمال $\pi_{n,i}(t)$أن يكون عدد سكانها n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) في البيئة i ($1 \le i \le K$) في الوقت t هو حل النظام

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n\, c_i\, \pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k\, p_{n+1-k,i}\, \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\, \pi_{n,j}(t)\,. \tag{1}$$

في الواقع، يفترض هذا أن هناك ن الأفراد في الوقت تي في البيئة ط . حدث حدث خلال الفاصل الزمني متناهية الصغر$(t, t + dt)$ ويغير عدد الأفراد الذين لديهم احتمال بترتيب $n\,c_i\,dt$. بالإضافة إلى ذلك ، يمكن أن ينتهي بنا المطاف بـ n أفراد في الوقت $t + dt$ إذا ، بدءًا من k أفراد ($1 \le k \le n + 1$) في الوقت t ، يخضع أحدهم لحدث (الاحتمال$c_i\,k\,dt$) ويتم استبداله بـ $n + 1\text{-}k$ أفراد جدد (الاحتمال$p_{n+1-k,i}$) لأن $n = (n + 1 - k) + k - 1$. أخيرًا ، يمكن أن ينتهي بنا المطاف مع n أفراد في البيئة i في الوقت $t + dt$ إذا كان لدينا n أفراد في البيئة j في الوقت t وإذا كانت البيئة قد تحولت من الحالة j في الدولة ط (الاحتمال $Q_{i,j}\,dt$). مع المعلمات a_i، b_i و $q_{n,i}$، يتم كتابة النظام أيضا

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -\,n\,(a_i+b_i)\,\pi_{n,i}(t) + (n+1)b_i\,\pi_{n+1,i}(t) + a_i\sum_{k=1}^{n} k\,q_{n-k,i}\,\pi_{k,i}(t)$$
$$+\sum_j Q_{i,j}\,\pi_{n,j}(t)\,.$$

نأخذ كشرط أولي n_0 الأفراد ($n_0 \geq 1$) في البيئة i_0، بحيث $\pi_{n_0,i_0}(0)=1$ و $\pi_{n,i}(0)=0$ إذا $(n,i)\neq(n_0,i_0)$. كما يجب أن يكون من أجل الاحتمالات ، عندها$0 \leq \pi_{n,i}(t)$ و $\sum_i\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{n,i}(t)=1$ ل $t>0$.

نحدد $\pi=(\pi_{0,1},\dots,\pi_{0,K},\dots,\pi_{n,1},\dots,\pi_{n,K},\dots)$. نحن نرى ذلك$\frac{d\pi}{dt}=M\pi(t)$، أين M هي مصفوفة لا نهائية من الشكل

$$\left(\begin{array}{c|cccc}
Q & CP_0 & 0 & 0 & \cdots\\
\hline
0 & Q-C+CP_1 & 2CP_0 & 0 & \cdots\\
0 & CP_2 & Q-2C+2CP_1 & 3CP_0 & \cdots\\
0 & CP_3 & 2CP_2 & Q-3C+3CP_1 & \ddots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots
\end{array}\right),$$

أين C هي المصفوفة القطرية $(c_i)_{1\leq i\leq K}$ و P_n المصفوفة القطرية $(p_{n,i})_{1\leq i\leq K}$. في حالة معينة من عمليات الولادة والوفاة الخطي ، المصفوفات فقطP_0 و P_2 هي غير صفرية: المصفوفة M ثم يكون ثلاثي الأبعاد بواسطة الكتل.

دعنا نقدم وظائف التوليد

$$g_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{n,i}\,x^n\,,\qquad f_i(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{n,i}(t)\,x^n\,.$$

نلاحظ أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\pi_{n,i}(t)\,x^n = x\,\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} k\,p_{n+1-k,i}\,\pi_{k,i}(t)\,x^n = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_{k,i}(t)\sum_{n=k-1}^{\infty}p_{n+1-k,i}\,x^n$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_{k,i}(t)\,x^{k-1}g_i(x) = g_i(x)\,\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)\,.$$

لذلك نستنتج من (1) نظام المعادلات التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x)-x)\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j}\,f_j(t,x)\,. \tag{2}$$

في حالة معينة من العمليات الخطية للولادة والموت ، لدينا $g_i(x)=p_{0,i}+p_{2,i}\,x^2$، يعطي $c_i(g_i(x)-x)=(x-1)(a_i\,x-b_i)$.

لاحظ أن توقعات السكان

$$e_i(t)=\sum_n n\,\pi_{n,i}(t)=\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,1)$$

هو حل لنظام المعادلات التفاضلية العادية ، والذي يتم الحصول عليه عن طريق اشتقاق النظام (2) فيما يتعلق ب x ، بأخذ س $= 1$ وتلاحظ أن $g_i(1)=1$:

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i\, e_i(t) + \sum_j Q_{i,j}\, e_j(t)\,. \tag{3}$$

إذا بقينا في بيئة i ، فإن توقع السكان في الوقت t يكون$e^{\delta_i t}$ إذا بدأنا من فرد واحد في الوقت $t = 0$.

يتضمن النظام (3) المصفوفة $Q + \Delta$. ومع ذلك ، سنرى في القسم 5 أن معدل انقراض السكان لا يعطى دائمًا من خلال القيمة الذاتية $s(Q + \Delta)$.

4. حالة الإنهاء

دعونا نلقي نظرة على حالة يؤدي النموذج إلى انقراض معين للسكان. للقيام بذلك ، ضع في اعتبارك سلسلة ماركوف في وقت منفصل ، كل خطوة زمنية هي المدة بين قفزتين في البيئة. تحتوي هذه السلسلة على مساحة للأزواج(i, t) بشكل عام $\{1, 2, \ldots, K\} \times [0, +\infty[$حيث المكون الأول i يمثل البيئة والمكون الثاني tالوقت قبل التحول إلى بيئة أخرى. لذا بدلاً من القول إن البيئة في الدولةi_0 لفترة t_0 ثم في الدولة i_1 لفترة t_1، نقول نذهب من (i_0, t_0) الى (i_1, t_1)، إلخ. لقد رأينا بالفعل في (Bacaër and Ed-Darraz، 2014، §2.1) أنه إذا عرفنا

$$Q_i = -Q_{i,i} \quad \forall i,$$

ثم التوزيع الثابت لسلسلة ماركوف هو

$$w_{i,t} = \frac{Q_i\, u_i}{\sum_j Q_j\, u_j}\, Q_i\, e^{-Q_i t}\,.$$

لذلك يمكننا تطبيق نتائج (Athreya and Karlin، 1971) التي تتعلق بعمليات التفرع في بيئة ماركوف: من شبه المؤكد أن السكان يخرجون إذا وفقط إذا

$$\sum_i \int_0^\infty w_{i,t} \log(e^{\delta_i t})\, dt \le 0\,,$$

الذي يعطي ، منذ ذلك الحين $\int_0^\infty t\, e^{-Q_i\, t} dt = (1/Q_i)^2$، الشرط

$$\sum_i u_i\, \delta_i \le 0.$$

لان $\delta_i = c_i(m_i - 1)$، يمكن كتابة هذا أيضًا في النموذج $\sum_i \theta_i\, m_i \le 1$مع $\theta_i = c_i u_i / (\sum_j c_j u_j)$. وبعبارة أخرى ، فإن متوسط "عدد" النسل الناتج أقل من 1 ، مع إعطاء أوزان لكل بيئة بواسطةθ_i.

5. سرعة الانقراض

نحن مهتمون الآن في الحالة دون الحرجة حيث $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$. في هذه الحالة،

$$\pi_{0,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_i, \quad \pi_{n,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall n \ge 1.$$

نحاول تحديد معدل انقراض السكان:

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}(t)\,, \quad n \ge 1,\ 1 \le i \le K.$$

هذا الحد موجود ولا يعتمد على n (شريطة أن *رقم 1*) أو i أو الشروط الأولية(n_0, i_0)(كوليت وآخرون ، 2013 ، القسم 4.5). مع تدويننا ، لدينا$\omega < 0$ واحتمال عدم الانقراض $\sum_i \sum_{n\ge1} \pi_{n,i}(t) = 1 - \sum_i \pi_{0,i}(t)$ ينخفض أيضًا بشكل كبير نحو 0 مع المعدل ω.

كما في (Bacaër، 2017، §2.1) ، حساب ω يستخدم تقدير الوقت ، وصيغة (D'Souza and Hambly ، 1997) لسرعة انقراض عمليات التفرع في وقت منفصل مع بيئة ماركوفيا ، وممر إلى الحد الذي يجعل الخطوة الزمنية تميل نحو 0.

لذا دعنا نميِّز الوقت بخطوة زمنية منتظمة صغيرة $\tau > 0$. تخيل أن البيئة لا تزال ثابتة داخل كل خطوة زمنية صغيرة وأن التحولات تتبع سلسلة ماركوف في وقت منفصل على مساحة الدولة$\{1, 2, \ldots, K\}$ مع مصفوفة الانتقال $e^{\tau Q^\mathsf{T}}$، أين Q^T هي مصفوفة منقولة Q. سلسلة ماركوف المستمرة التي تصف البيئة في نموذجنا هي حد العملية الموصوفة أعلاه إذا$\tau \to 0$.

خلال كل فترة زمنية صغيرة τحيث البيئة دعنا نقول في الدولة iنفترض أن السكان يتبعون عملية الاتصال في وقت مستمر وبيئة ثابتة مع المعلمات c_i و $(p_{n,i})$ من القسم 2. دعنا نلاحظ $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t)$ احتمال وجود عدد كبير من السكان n في البيئة i في الوقت t في هذا النموذج المعدل مع بيئة ثابتة في كل فترة زمنية τ. للجميع$t > 0$، $n \geq 0$ و K $1 \leq i \leq$، لدينا $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t) \to \pi_{n,i}(t)$ إذا $\tau \to 0$.

إذا كان عكس الحدود شرعيًا ،

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) = \lim_{\tau\to 0} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) := \lim_{\tau\to 0} \omega^{[\tau]},$$

يتم إرجاع المرء إلى حساب سرعة انقراض عملية الاتصال في وقت منفصل في بيئة ماركوف لأنه (مع عدد صحيح N)

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log \left(\lim_{N\to+\infty} [\pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) \, .$$

توقع السكان يزيد أو ينقص بعامل $e^{\delta_i \tau}$ لخطوة زمنية τحيث يتم حظر البيئة في الحالة i . لاحظ ذلك$u^\intercal$ هو التوزيع الثابت للسلسلة ، لأن $Qu = 0$ يعني $u^\intercal Q^\intercal = 0$ و $u^\intercal e^{\tau Q^\intercal} = u^\intercal (I + \tau Q^\intercal + \frac{1}{2}(\tau Q^\intercal)^2 + \cdots) = u^\intercal$. هذه السلسلة هي دون الحرجة دائمًا ، وفقًا لـ (Athreya and Karlin ، 1971) ، لأن

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0 \, .$$

لذا (D'Souza and Hambly، 1997) و (Bacaër، 2017، §2.1) يوضحان أن المعدل الهندسي $\Omega(\tau)$ يتم انقراض السكان من قبل

$$\Omega(\tau) = \min_{0\leq\alpha\leq 1} \, \rho(e^{\tau Q^\intercal} e^{\alpha\tau\Delta}) \, ,$$

أين $\rho(\cdot)$يدل على نصف القطر الطيفي لمصفوفة. دع قيمة τ تكون معكوس عدد صحيح. لقد فعلنا

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log[\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0\leq\alpha\leq 1} \, \rho([e^{\tau Q^\intercal} e^{\alpha\tau\Delta}]^{1/\tau}).$$

المصفوفة $[e^{\tau Q^\intercal} e^{\alpha\tau\Delta}]^{1/\tau}$ يتلاقى ل $e^{Q^\intercal + \alpha\Delta}$ إذا $\tau \to 0$(ما يسمى بصيغة Lie-Trotter-Kato). نستنتج كما في (Bacaër، 2017، §2.1) أن السرعة الهائلة للانقراض في الوقت المستمر هي

$$\omega = \lim_{\tau\to 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0\leq\alpha\leq 1} s(Q + \alpha\Delta) \, , \tag{4}$$

أين $s(Q + \alpha\Delta)$ هو الحد الطيفي للمصفوفة $Q + \alpha\Delta$. وهكذا ، فقط التعبير عن المصفوفة القطرية Δ يتغير مقارنة مع (Bacaër، 2017).

تذكر أن جميع العناصر خارج قطر المصفوفة $Q + \alpha\Delta$ هم ≥ 0. في هذه الحالة ، يرتبط الطيف$s(Q + \alpha\Delta)$هو قيمة ذاتية حقيقية لهذه المصفوفة. إنها القيمة الذاتية مع الجزء الأكبر الحقيقي.

الصيغة (4) لـ ω هي تعميم لتلك التي تم الحصول عليها في حالة العمليات الخطية للولادة والموت (Bacaër، 2017). لهذه ، يولد كل فرد فردًا جديدًا واحدًا (للبكتيريا ، ينقسم كل منها إلى قسمين) مع احتمال$a_i \, dt$ ويموت باحتمال $b_i \, dt$ خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر dt في البيئة i. هذا يتوافق مع$q_{1,i} = 1$ و $q_{n,i} = 0$ إذا $n \neq 1$. لدينا بعد ذلك $c_i = a_i + b_i$، $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$، $p_{2,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}$، $p_{n,i} = 0$ إذا $n = 1$ أين $n > 2$ و$\delta_i = a_i - b_i$.

بشكل حدسي ، صيغة سرعة الانقراض ω يتعلق بحقيقة أننا إذا كنا نبحث عن حل $f_i(t,x)$ من النظام (2) الذي يتصرف على النحو $e^{\omega t}(1-x)^\alpha \phi_i$ على مقربة من $x = 1$ مع $x < 1$، نحصل على المعادلة

$$\omega \, \phi_i = \alpha \, \delta_i \, \phi_i + \sum_j Q_{i,j} \, \phi_j,$$

مما يوحي بذلك ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha \, \Delta$. ومع ذلك ، فإن هذا لا يجعل من الممكن فهم قيمة α المناسبة. كما رأينا ، هذا هو الذي يقلل$s(Q + \alpha\Delta)$ ل $\alpha \in [0,1]$.

6. عدم المساواة

(Bacaër، 2017، §2.2) قد لاحظوا ذلك بالفعل

- الوظيفة $\alpha \mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ يستحق $s(Q)=0$ إذا $\alpha=0$؛
- هذه الوظيفة محدبة إذا Δ مصفوفة قطرية ؛
- هذه الوظيفة حتى محدبة بصرامة إذا δ_i ليست كلها متساوية.

بالإضافة إلى ذلك ، مشتقها في $\alpha=0$ كان بالضبط $\sum_i u_i\,\delta_i$وهو $0>$. الوظيفة$\alpha \mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ وبالتالي فوق المماس في $\alpha=0$. لذا

$$\alpha\sum_i u_i\,\delta_i \le s(Q+\alpha\Delta) \quad \forall\alpha.$$

لذلك لدينا الحد الأدنى من هذه الوظائف خلال الفاصل الزمني $0\le\alpha\le 1$

$$\sum_i u_i\,\delta_i \le \omega < 0 \tag{5}$$

مع عدم المساواة الصارمة في عدم المساواة الأولى إذا δ_i ليست كلها متساوية.

كمثال رقمي ، ضع في اعتبارك على سبيل المثال حالة بيئتين مع $Q_{1,2}=Q_{2,1}=1$، بحيث $u_1=u_2=1/2$: تنفق البيئة في المتوسط نصف الوقت في كل من هذه الحالات. إذا كانت معدلات النمو في كلا البيئتين$\delta_1=-1$ و $\delta_2=-2$ثم الوظيفة $\alpha \mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ يتناقص ، لذلك $\omega=s(Q+\Delta)\simeq -1{,}38$بينما $\sum_i u_i\,\delta_i=-1{,}5$.

يمكن تفسير عدم المساواة (5) على النحو التالي. النموذج السكاني بدون العشوائية الديموغرافية ولكن مع التقارب العشوائي البيئي الأقرب إلى نموذجنا هو بلا شك النموذج حيث السكان$p(t)$ في الوقت t يطيع المعادلة $\frac{dp}{dt}=\delta_{\theta(t)}\,p(t)$حيث الوظيفة العشوائية $\theta(t)$ مع القيم في $\{1,2,\ldots,K\}$ويمثل تطور البيئة. ثم$p(t)=p(0)\exp(\int_0^t \delta_{\theta(z)}\,dz)$. تضمن نظرية ergodic ، بالتأكيد ، $\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\theta(z)}\,dz \to \sum_i u_i\,\delta_i$ إذا $t\to+\infty$. لذا$\frac{1}{t}\log p(t)\to\sum_i u_i\,\delta_i$ إذا $t\to+\infty$. لذا$\sum_i u_i\,\delta_i$ هو نوع من معدل انقراض النموذج دون العشوائية الديموغرافية ، حتى لو $p(t)$لا تلغي نفسها. سيموت السكان بشكل أسرع من نموذجنا.

على العكس من ذلك ، فإن نموذج السكان مع العشوائية الديموغرافية ولكن بدون العشوائية البيئية الأقرب إلى نموذجنا هو بلا شك عملية الاتصال الزمني المستمر (Méléard، 2016، §4.4) بمتوسط معدل نمو (أو بالأحرى انقراض) $\delta=\sum_i u_i\,\delta_i$. سيموت السكان بشكل أسرع من نموذجنا.

وهكذا ، فإن العشوائية الديموغرافية والبيئية تبطئ إلى حد ما انقراض السكان. (تيرارد وآخرون ، 2016 ، ص 211) يشير أيضًا إلى أن "العشوائية البيئية يمكن أن تنقذ السكان المتناقصين". من ناحية أخرى ، يشير (بريماك وآخرون ، 2012 ، ص 159) إلى أنه "بشكل عام ، يؤدي إدخال العشوائية البيئية في نمذجة الديناميكيات السكانية ، من أجل الواقعية ، إلى معدلات النمو و عدد أقل من السكان واحتمال أكبر للانقراض ". يحدث العكس في نموذجنا.

7. الخلاصة

في الواقع ، لدينا عدم مساواة مماثلة في حالة العمليات المتفرعة في وقت منفصل وبيئة عشوائية. لنفترض على سبيل المثال أن البيئات يتم اختيارها من عدد محدود من الحالات بشكل مستقل وموزع بشكل متماثل:$v_i>0$هو احتمال أن تكون البيئة في حالة i في كل خطوة زمنية ولدينا$\sum_i v_i=1$. إذا كانت البيئة في الدولةi، يتم استبدال كل فرد بـ n أفراد باحتمال$p_{n,i}\ge 0$، بحيث $\sum_{n\ge 0}p_{n,i}=1$. نفترض ذلك $m_i=\sum_{n\ge 1}n\,p_{n,i}<+\infty$. في الحالة دون الحرجة حيث$\sum_i v_i\log m_i<0$، فإن المعدل الهندسي Ω لانخفاض احتمال عدم الانقراض هو مثل ذلك

$$1>\Omega=\min_{0\le\alpha\le 1}\Big(\sum_i v_i\,m_i^{\alpha}\Big)\ge\exp\Big(\sum_i v_i\log m_i\Big)=\prod_i m_i^{v_i} \tag{6}$$

(Guivarc'h and Liu، 2001، theorem 1). المصطلح الأخير على اليمين هو معدل النمو الهندسي (هنا من الانخفاض) للنموذج دون العشوائية الديموغرافية

$$p(t+1)=m_{\theta_t}\,p(t),$$

أين θ_t هي حالة البيئة و $p(t)$ السكان في ذلك الوقت $t=0,1,2\ldots$ وهو أيضًا المعدل الهندسي لانخفاض احتمالية عدم الانقراض في العمليات المتفرعة في بيئة ثابتة (وبالتالي بدون العشوائية البيئية) في المتوسط $m=\prod_i m_i^{v_i}$.

إذا $m_i < 1$ للجميع i، مكتوب اللامساواة (6)

$$1 > \Omega = \sum_i v_i\, m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}\ .$$

هذا يترجم تقعر دالة اللوغاريتم: $\log(\sum_i v_i\, m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$.

إذا كان أكثر عمومية

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

يظهر عدم المساواة في (6) نفسه كما هو الحال في القسم 6. نحن نحدد

$$h(\alpha) = \log\left(\sum_i v_i\, m_i^\alpha\right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

لذلك تظهر بعض الحسابات ذلك

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i\, m_i^\alpha \log m_i}{\sum_i v_i\, m_i^\alpha}\,, \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i<j} v_i\, v_j\, m_i^\alpha\, m_j^\alpha (\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i\, m_i^\alpha)^2}\ .$$

لذا

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \geq 0$$

على الفاصل الزمني $[0,1]$. الوظيفة$h(\alpha)$ لذلك هو محدب وفوق المماس في $\alpha = 0$: $h(\alpha) \geq \alpha\, h'(0)$ و

$$\min\{h(\alpha);\, 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq h'(0).$$

لذا

$$\min\{e^{h(\alpha)};\, 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq e^{h'(0)}.$$

إنه عدم مساواة (6).

وبالتالي ، فإن الانقراض يكون أبطأ عندما يكون لدينا استوكاستك ديمغرافي وبيئي ، سواء كان النموذج في وقت منفصل أو في وقت مستمر.

المراجع

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictionsbetween discrete and continuous models.
  Lett. Math. Phys. 37, 285–292.
- J.–D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. Écoscience 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.–E. Sæther (2003)
  Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford University Press.
- K.B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W.C. Torrez (1981)
  Birth and death processes with random environments in continuous time.
  J. Appl. Probab. 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed–Darraz (2014)
  On linear birth–and–death processes in a random environment, J. Math. Biol. 69, 73–90.

- J. C. D′Souza, B. M. Hambly (1997)
  On the survival probability of a branching process in a random environment,
  Adv. Appl. Probab. 29, 38–55.
- Y. Guivarc′h, Q. Liu (2001)
  Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire,
  C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017)
  Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous–critiques dans un environnement aléatoi
  J. Math. Biol., http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0 .
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications,
  Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi–stationary Distributions,
  Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) Écologie, Dunod, Paris.
- R. B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) Biologie de la conservation, Dunod, Paris.