

ランダムな環境における人口の絶滅の速度について

C. R. Biol. 340 (2017) 259–263.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリングユニット
Les Cordeliers、パリ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

まとめ

マルコフ連鎖によって支配されるランダムな環境に住んでいる人口が絶えず絶滅する速度に関心があります。一人一人が死ぬか、環境に依存する速度で繁殖します。繁殖中、子孫の数は、環境にも依存する特定の確率法則に従うと想定されます。人口が確実に絶滅している、いわゆる亜臨界の場合、絶滅率は明確に決定されます。ある意味で、環境の確率論は人口の絶滅を遅らせます。

キーワード：人口動態、人口統計的確率、環境確率

1.はじめに

多数のモデリング研究により、人口動態に及ぼす人口統計学および環境的確率の影響が研究されています。たとえば (Gaveau et al.、1996; Lebreton et al.、2007) のように、母集団を実数として扱い、拡散近似を使用する (Lande et al.、2003) この絶滅が確実な場合、人口の絶滅率の結果が不正確になります。人口を整数に保つために (Athreya and Karlin、1971) は、定常的なランダム環境で離散時間に分岐するプロセスを研究し、どの条件下で人口の絶滅が確実であるかを示しました。定常環境と同様に、3つのケースを区別できます。超臨界、クリティカルおよびサブクリティカル。(Cogburn and Torrez、1981; Bacaër and Ed-Darraz、2014) は、類似したモデルの絶滅状態を連続時間で調べました。つまり、ランダムな環境での誕生と死のプロセスです。離散時間とランダムな環境の亜臨界の場合 (D'Souza and Hambly、1997; Guivarc'h and Liu、2001) は、絶滅率を計算しました。スキームが高度および弱度の未臨界に分類されている。(Bacaër、2017) は、ランダムマルコフ環境での出生と死亡の線形プロセスの絶滅率を連続時間で計算しました。この方法は、(D'Souza and Hambly、1997) の場合に短縮される時間を離散化することで構成されていました。その後、タイムステップを0に近づけるようにします。ただし、このモデルでは、複数の個体を同時に誕生させることはできませんでした。以下の目的は、この制限を解除することです。つまり、ランダム環境で「連続時間分岐プロセス」(Méléard、2016年、§5.4) を研究して、速度を計算することです。対応する絶滅と、この速度が(絶対値で)予想よりも遅いことに注意してください。

セクション2では、マルコフ連鎖に従って連続時間で K 状態間で振動する環境をモデルに示します。セクション3では、成長率を計算します δ_i 環境内の人口の (正または負) i ($1 \leq i \leq K$) と平均比率 u_i 環境が状態 i で費やす時間の。セクション4で、平均成長率が負の場合、つまり

$\sum_i u_i \delta_i \leq 0$ 。次に、セクション5で、亜臨界の場合、 $\sum_i u_i \delta_i < 0$ 、消滅速度 ω 非絶滅の確率が次のように減少するという事実によって定義される人口の $e^{\omega t}$ と $\omega < 0$ は、次の式で与えられます

$$\omega = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha \Delta),$$

ここで：

- Q 環境のランダムな遷移を表す行列です。
- Δ 成長率の対角行列です (δ_i) $_{1 \leq i \leq K}$ 対角線上;
- $s(Q + \alpha \Delta)$ 行列のスペクトル境界、つまり最大実部の固有値を示します $Q + \alpha \Delta$ 。

(Bacaër, 2017) で得られた、同時出産を考慮しない出生と死亡の線形プロセスの式を一般化したものです。セクション6でそれを示します

$$\sum_i u_i \delta_i \leq \omega < 0$$

そして、最初の不等式は、 δ_i すべてが同じというわけではありません。絶滅率は平均成長率よりも（絶対値で）低くなります。したがって、私たちのモデルでは、特定の環境で、環境の確率論が人口の絶滅を遅らせると言えます。結論として、ランダムな環境での離散時間の分岐プロセスにも同様の不等式が適用されることに注意してください。これは、(Guivarc'h and Liu, 2001) で暗黙的に既に発見されています。

2.モデル

連続時間のマルコフ連鎖に従って、環境が K 状態間でランダムに振動すると仮定します。つまり、数字があります $Q_{i,j} \geq 0$ 環境が状態 j の場合、確率がある $Q_{i,j} dt$ 環境が状態 i に切り替わる $i \neq j$ 各微小時間間隔の間 dt 。私たちは定義します $Q = (Q_{i,j})$ 対角項を持つ正方行列 $Q_{j,j} = -\sum_{i \neq j} Q_{i,j}$ 。また、行列 Q は既約です。つまり、グラフで j から i へのエッジを持つ K 頂点に向けられています ($i \neq j$) もし $Q_{i,j} > 0$ 、2つのピーク i_1 と i_2 常にパスで到達可能 i_1 に向かって i_2 とのパス i_2 に向かって i_1 。次に、単一のベクトル u が存在します。

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

(セリコラ、2013、p. 152)。コンポーネント u_i 環境が状態 i で費やす時間の平均比率を表します。

この環境で互いに独立して死亡し、生殖する無性または女性の個体群を考えてみましょう。環境が状態 i にある場合、各微小時間間隔の間に、 dt 、各個体は確率で再現します $a_i dt$ ($a_i > 0$) そして確率で死ぬ $b_i dt$ ($b_i > 0$)。個体が生殖する場合、彼が n 個体を出産したと仮定します ($n = 0, 1, 2, \dots$) 確率あり $q_{n,i}$ 、 $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1$ すべてのために i 。

これを確認する別の方法は、環境 i で、各個人が確率でイベントを経験するということです $c_i dt$ (どこ $c_i = a_i + b_i$) 各微小時間間隔中 dt 。イベントが発生した場合、個体は確率で0個体に置き換えられます $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i + b_i}$ そして、 n 人の個人 ($n \geq 1$) 確率あり $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i + b_i} q_{n-1,i}$ 。だから、 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1$ すべてのために i 。したがって、ランダムな環境の場合の連続時間 (Méléard, 2016年、§5.4) での接続プロセスの一般化です。さらに、

$$m_i = \sum_{n \geq 1} n p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

私たちは定義します

$$\delta_i = c_i(m_i - 1)$$

と Δ 、対角行列 $(\delta_i)_{1 \leq i \leq K}$ 対角線上に。

3.成長率 δ_i

このモデルでは、確率 $\pi_{n,i}(t)$ サイズ n の母集団を持つ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 環境 i ($1 \leq i \leq K$) 時間 t はシステムの解です

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n c_i \pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k p_{n+1-k,i} \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j} \pi_{n,j}(t). \quad (1)$$

実際、例えば、環境 i に時刻 t で n 人の個人 がいると仮定します。微小な時間間隔中にイベントが発生しました ($t, t + dt$) の確率で個体数を変更する $n c_i dt$ 。加えて、我々は、で終わることができる M 時点で個体 $T + DT$ から出発して、場合に k 個の個体 ($1 \leq k \leq N + 1$ 時間で) T 、それらのイベントを受けます (確率 $c_i k dt$) そして、 $n + 1 - k$ の新しい個人 (確率 $p_{n+1-k,i}$) なぜなら $k - 1 + (n + 1 - k) = n$ 。最後に、我々は、で終わることができます M 環境での個人 私は一度に $T + DT$ がなかった場合は何の人々が環境 j の時間の トンと環境が状態に切り替えた場合 j は状態 i (確率 $Q_{i,j} dt$)。パラメータあり a_i 、 b_i と $q_{n,i}$ 、システムも書かれています

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_{n,i}}{dt} = & -n(a_i + b_i) \pi_{n,i}(t) + (n+1)b_i \pi_{n+1,i}(t) + a_i \sum_{k=1}^n k q_{n-k,i} \pi_{k,i}(t) \\ & + \sum_j Q_{i,j} \pi_{n,j}(t). \end{aligned}$$

初期状態とする n_0 個人 ($n_0 \geq 1$) 環境中 i_0 なので、 $\pi_{n_0, i_0}(0) = 1$ と $\pi_{n,i}(0) = 0$ もし $(n, i) \neq (n_0, i_0)$ 。確率のためであるべきなので、次に $\pi_{n,i}(t) \geq 0$ と $\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) = 1$ のために $t > 0$ 。

私たちは定義します $\pi = (\pi_{0,1}, \dots, \pi_{0,K}, \dots, \pi_{n,1}, \dots, \pi_{n,K}, \dots)$ 。私たちはそれを見る $\frac{d\pi}{dt} = M\pi(t)$ 、どこ M 次の形式の無限行列です

$$\left(\begin{array}{c|cccc} Q & CP_0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & Q - C + CP_1 & 2CP_0 & 0 & \dots \\ 0 & CP_2 & Q - 2C + 2CP_1 & 3CP_0 & \dots \\ 0 & CP_3 & 2CP_2 & Q - 3C + 3CP_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array} \right),$$

どこに C 対角行列です $(c_i)_{1 \leq i \leq K}$ と P_n 対角行列 $(p_{n,i})_{1 \leq i \leq K}$ 。線形の誕生と死のプロセスの特定のケースでは、行列のみ P_0 と P_2 ゼロ以外：行列 M 次に、ブロックごとに三重対角になります。

生成関数を紹介しましょう

$$g_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} x^n, \quad f_i(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) x^n.$$

私たちはそれに気づきます

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \pi_{n,i}(t) x^n = x \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x)$$

と

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} k p_{n+1-k,i} \pi_{k,i}(t) x^n &= \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_{k,i}(t) \sum_{n=k-1}^{\infty} p_{n+1-k,i} x^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_{k,i}(t) x^{k-1} g_i(x) = g_i(x) \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x). \end{aligned}$$

したがって、(1) から偏微分方程式系を推定します。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x) - x) \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j} f_j(t, x). \quad (2)$$

誕生と死の線形プロセスの特定のケースでは、 $g_i(x) = p_{0,i} + p_{2,i} x^2$ を与える
 $c_i(g_i(x) - x) = (x - 1)(a_i x - b_i)$ 。

人口の期待に注意してください

$$e_i(t) = \sum_n n \pi_{n,i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 1)$$

溶液がに関してシステム (2) を導出することにより得られた常微分方程式のシステムである X 、撮
 影 $X = 1$ とすることを気付か $g_i(1) = 1$:

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i e_i(t) + \sum_j Q_{i,j} e_j(t). \quad (3)$$

したがって、環境 i にいる場合、時間 t での人口予測 は次のようになります。 $e^{\delta_i t}$ 時間 $t = 0$ で単一の
 個体から開始する場合。

システム (3) はマトリックスを含みます $Q + \Delta$ 。ただし、セクション5では、個体群の消滅率が
 常に固有値で与えられるとは限らないことを確認します。 $s(Q + \Delta)$ 。

4. 終了条件

モデルが人口の特定の絶滅につながる条件を見てみましょう。これを行うには、各時間ステップ
 が環境内の2つのホップ間の期間である離散時間のマルコフチェーンを考えます。このチェーンは、
 カップルの状態空間を持っています (i, t) 全体的に $\{1, 2, \dots, K\} \times [0, +\infty[$ 、最初のコンポーネント i
 環境と2番目のコンポーネントを表します t 別の環境に切り替える前の時間。だから、環境が状態に
 あると言う代わりに i_0 一定期間 t_0 その後、状態で i_1 一定期間 t_1 、私たちはから行くと言います
 (i_0, t_0) で (i_1, t_1) 、など (Bacaërand Ed-Darraz, 2014, §2.1) ですすでに定義しました。

$$Q_i = -Q_{i,i} \quad \forall i,$$

このマルコフ連鎖の定常分布は

$$w_{i,t} = \frac{Q_i u_i}{\sum_j Q_j u_j} Q_i e^{-Q_i t}.$$

したがって、マルコフ環境での分岐プロセスに関連する (Athreya and Karlin, 1971) の結果を適用できます。

$$\sum_i \int_0^\infty w_{i,t} \log(e^{\delta_i t}) dt \leq 0,$$

それは与える $\int_0^\infty t e^{-Q_i t} dt = (1/Q_i)^2$ 、状態

$$\sum_i u_i \delta_i \leq 0.$$

なぜなら $\delta_i = c_i(m_i - 1)$ 、これは次の形式でも記述できます $\sum_i \theta_i m_i \leq 1$ 、 $\theta_i = c_i u_i / (\sum_j c_j u_j)$ 。言い換えると、生成される子孫の「平均」数は1未満であり、各環境の重みは θ_i 。

5.消滅速度

今、私たちは以下の臨界前のケースに興味があります $\sum_i u_i \delta_i < 0$ 。この場合、

$$\pi_{0,i}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_i, \quad \pi_{n,i}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall n \geq 1.$$

私たちは人口絶滅率を決定しようとしています：

$$\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}(t), \quad n \geq 1, 1 \leq i \leq K.$$

この制限は存在し、 n ($n \geq 1$ の場合)、 i 、または初期条件には依存しません (n_0, i_0) (コレットら、2013、セクション4.5)。私たちの表記では、 $\omega < 0$ そして、絶滅しない確率 $1 - \sum_i \pi_{0,i}(t) = \sum_i \sum_{n \geq 1} \pi_{n,i}(t)$ また、レート ω で0に向かって指数関数的に減少します。

(Bacaër, 2017, §2.1) のように、 ω は、時間の離散化、(D'Souza and Hambly, 1997) の式を使用して、マルコフ環境での離散時間における分岐プロセスの消滅の速度、および時間ステップが0。

それで、小さな規則的な時間ステップで時間を離散化しましょう $\tau > 0$ 。環境が各小さなタイムステップ内で一定のままであり、遷移が状態空間上の離散時間でマルコフ連鎖に従うと想像してください。 $\{1, 2, \dots, K\}$ 遷移行列 $e^{\tau Q^\tau}$ 、どこ Q^τ は転置行列 Q 。モデルの環境を記述する連続時間マルコフ連鎖は、次の場合に上記のプロセスの制限になります。 $\tau \rightarrow 0$ 。

各短い時間間隔の間 τ 環境はどこにあるとしましょう i 、母集団は、パラメータを使用して、連続時間および一定の環境で接続プロセスに従うと仮定します c_i と $(p_{n,i})$ セクション2から。 $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t)$ 人口が多い確率 n 環境で i 当時 t この変更されたモデルでは、各長さの時間間隔で環境が一定です τ 。すべてのために $t > 0$ 、 $n \geq 0$ と $1 \leq i \leq K$ 、私たちは持っています $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t) \rightarrow \pi_{n,i}(t)$ もし $\tau \rightarrow 0$ 。

境界の反転が正当な場合、

$$\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega^{[\tau]},$$

マルコフ環境における離散時間での接続プロセスの消滅速度の計算に戻ります (N 整数を使用)

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} [\pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau).$$

人口期待は、要因によって増減します $e^{\delta_i \tau}$ タイムステップ τ 環境が状態 i でブロックされている場所。注意してください u^\top チェーンの定常分布です。 $Qu = 0$ 意味する $u^\top Q^\top = 0$ と $u^\top e^{\tau Q^\top} = u^\top (I + \tau Q^\top + \frac{1}{2}(\tau Q^\top)^2 + \dots) = u^\top$ 。(Athreya and Karlin、1971) によると、このチェーンは常にサブクリティカルです。

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0.$$

したがって、(D'Souza and Hambly、1997) と (Bacaër、2017、§2.1) は、幾何学率が $\Omega(\tau)$ 人口絶滅は

$$\Omega(\tau) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(e^{\tau Q^\top} e^{\alpha \tau \Delta}),$$

どこに $\rho(\cdot)$ マトリックスのスペクトル半径を示します。 τ の値を整数の逆数とする。私たちは持っています

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log[\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho([e^{\tau Q^\top} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}).$$

マトリックス $[e^{\tau Q^\top} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}$ に収束する $e^{Q^\top + \alpha \Delta}$ もし $\tau \rightarrow 0$ (いわゆるLie-Trotter-Kato式)。(Bacaër、2017、§2.1) のように、連続時間における指数関数的な消滅速度は

$$\omega = \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha \Delta), \quad (4)$$

どこに $s(Q + \alpha \Delta)$ 行列のスペクトル境界です $Q + \alpha \Delta$ 。したがって、対角行列 Δ の式のみが (Bacaër、2017) と比較して変化します。

行列の対角線の外側にあるすべての要素を思い出してください $Q + \alpha \Delta$ は ≥ 0 。この場合、スペクトル境界 $s(Q + \alpha \Delta)$ この行列の実際の固有値です。これは、実部が最大の固有値です。

ω の式 (4) は、生と死の線形過程の場合に得られるものを一般化したものです (Bacaër、2017)。これらの場合、各個体は確率で1人の新しい個体 (細菌の場合、それぞれが2つに分かれます) を出産します $a_i dt$ そして確率で死ぬ $b_i dt$ 各微小時間間隔の間 dt 環境で i 。これは $q_{1,i} = 1$ と $q_{n,i} = 0$ もし $n \neq 1$ 。その後、 $c_i = a_i + b_i$ 、 $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i + b_i}$ 、 $p_{2,i} = \frac{a_i}{a_i + b_i}$ 、 $p_{n,i} = 0$ もし $n = 1$ どこに $n > 2$ 、および $\delta_i = a_i - b_i$ 。

直感的に、絶滅の速度の式 ω 解決策を探しているなら $f_i(t, x)$ として動作するシステム (2) の $e^{\omega t} (1-x)^\alpha \phi_i$ の近くで $x = 1$ と $x < 1$ 、方程式を得る

$$\omega \phi_i = \alpha \delta_i \phi_i + \sum_j Q_{i,j} \phi_j,$$

それを示唆している ω 行列の固有値です $Q + \alpha \Delta$ 。しかしながら、これは、 α のどの値が適切であるかを理解することを可能にしない。これまで見てきたように、これは最小化するものです $s(Q + \alpha \Delta)$ のために $\alpha \in [0, 1]$ 。

6. 不平等

(バカエル、2017、§2.2) はすでにそれを観察していた

- 機能 $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ 値がある $s(Q) = 0$ もし $\alpha = 0$;
- この関数は、 Δ 対角行列です。
- この関数は、 δ_i すべてが同じというわけではありません。

さらに、その派生物 $\alpha = 0$ 正確に $\sum_i u_i \delta_i$ 、それは < 0 。機能 $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ したがって、その接線の上にあります $\alpha = 0$ 。だから

$$\alpha \sum_i u_i \delta_i \leq s(Q + \alpha\Delta) \quad \forall \alpha.$$

したがって、これらの関数の最小値について、区間にわたって $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_i u_i \delta_i \leq \omega < 0 \tag{5}$$

最初の不等式が厳密な不等式の場合、 δ_i すべてが同じというわけではありません。

数値の例として、たとえば、次の2つの環境の場合を考えます。 $Q_{1,2} = Q_{2,1} = 1$ なので、 $u_1 = u_2 = 1/2$: 環境はこれらの各州で平均半分の時間を費やしています。両方の環境での成長率が $\delta_1 = -1$ と $\delta_2 = -2$ 、次に関数 $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ したがって、減少しています $\omega = s(Q + \Delta) \simeq -1,38$ ながら、 $\sum_i u_i \delta_i = -1,5$ 。

不等式 (5) は次のように解釈できます。人口統計的確率はないが、環境確率がモデルに最も近い人口モデルは、間違いなく、人口が $p(t)$ 当時 t 方程式に従う $\frac{dp}{dt} = \delta_{\theta(t)} p(t)$ 、ランダム関数 $\theta(t)$ 値が $\{1, 2, \dots, K\}$ 環境の進化を表しています。だから $p(t) = p(0) \exp(\int_0^t \delta_{\theta(z)} dz)$ 。エルゴードの定理は、ほぼ確実に、 $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\theta(z)} dz \rightarrow \sum_i u_i \delta_i$ もし $t \rightarrow +\infty$ 。だから $\frac{1}{t} \log p(t) \rightarrow \sum_i u_i \delta_i$ もし $t \rightarrow +\infty$ 。だから $\sum_i u_i \delta_i$ たとえ人口統計学的確率なしのモデルの絶滅率のようなものです $p(t)$ 自分自身をキャンセルしません。人口は私たちのモデルよりも早く消滅します。

逆に、人口統計的確率はあるが、環境確率がモデルに最も近い人口モデルは、間違いなく、平均成長率（またはむしろ消滅）の連続時間接続（Méléard、2016、§5.4）のプロセスです。 $\delta = \sum_i u_i \delta_i$ 。人口は私たちのモデルよりも早く消滅します。

したがって、人口統計学および環境的確率論は、ある意味で、人口の絶滅を遅らせます。

(Tirard et al.、2016、p. 211) はまた、「環境的確率論は人口減少を救うことができる」とも述べています。一方、(Primack et al.、2012、p. 159) は、次のように述べています。人口の減少と絶滅の可能性の高さ」。私たちのモデルでは逆のことが起こります。

7.まとめ

実際、離散時間およびランダム環境での分岐プロセスの場合にも、同様の不等式があります。たとえば、環境が有限数の状態から独立して同じように分散して選択されているとします。 $v_i > 0$ 環境が各タイムステップで状態 i になる確率であり、 $\sum_i v_i = 1$ 。環境がその状態にある場合 i 、各個体は確率で n 個の個体に置き換えられます $p_{n,i} \geq 0$ なので、 $\sum_{n \geq 0} p_{n,i} = 1$ 。私たちは $m_i = \sum_{n \geq 1} n p_{n,i} < +\infty$ 。亜臨界の場合 $\sum_i v_i \log m_i < 0$ 、非消滅の確率の減少の幾何学的速度 Ω は、

$$1 > \Omega = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \left(\sum_i v_i m_i^\alpha \right) \geq \exp \left(\sum_i v_i \log m_i \right) = \prod_i m_i^{v_i} \quad (6)$$

(Guivarc'h and Liu, 2001, theorem 1)。右側の最後の項は、人口統計学的確率のないモデルの幾何学的成長率（ここでは減少）です

$$p(t+1) = m_{\theta_t} p(t),$$

どこに θ_t 環境の状態であり、 $p(t)$ 当時の人口 $t = 0, 1, 2, \dots$ 。それはまた、平均の一定の環境（したがって、環境の確率論がない）での分岐プロセスにおける非消滅の確率の幾何学的減少率でもあります。 $m = \prod_i m_i^{v_i}$ 。

もし $m_i < 1$ すべてのために i 、不等式 (6) が書き込まれます

$$1 > \Omega = \sum_i v_i m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}.$$

これは、対数関数の凹面を変換します。 $\log(\sum_i v_i m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$ 。

より一般的に

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

(6) の不等式は、セクション6のように、それ自体を少し示します。

$$h(\alpha) = \log \left(\sum_i v_i m_i^\alpha \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

いくつかの計算はそれを示しています

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i m_i^\alpha \log m_i}{\sum_i v_i m_i^\alpha}, \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i < j} v_i v_j m_i^\alpha m_j^\alpha (\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i m_i^\alpha)^2}.$$

だから

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \geq 0$$

間隔で $[0, 1]$ 。機能 $h(\alpha)$ したがって、凸状であり、その接線より上 $\alpha = 0$: $h(\alpha) \geq \alpha h'(0)$ と

$$\min\{h(\alpha); 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq h'(0).$$

だから

$$\min\{e^{h(\alpha)}; 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq e^{h'(0)}.$$

不等式 (6) です。

その結果、モデルが離散時間であるか連続時間であるかに関係なく、人口統計と環境の両方の確率論がある場合、消滅は遅くなります。

参考文献

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett. Math. Phys.* 37, 285–292.
- J.-D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. *Écoscience* 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.-E. Sæther (2003)
Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford University Press.
- K.B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. *Ann. Math. Stat.* 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W.C. Torrez (1981)
Birth and death processes with random environments in continuous time.
J. Appl. Probab. 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed-Darraz (2014)
On linear birth– and– death processes in a random environment, *J. Math. Biol.* 69, 73–90.
- J.C. D’Souza, B.M. Hambly (1997)
On the survival probability of a branching process in a random environment,
Adv. Appl. Probab. 29, 38–55.
- Y. Guivarc’h, Q. Liu (2001)
Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire,
C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017)
Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous– critiques dans un environnement aléatoire,
J. Math. Biol. , <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*, Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martínez, J. San Martín (2013) *Quasi–stationary Distributions*, Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) *Écologie*, Dunod, Paris.
- R.B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) *Biologie de la conservation*, Dunod, Paris.