

# 随机环境中种群的灭绝速度

C. R. Biol. 340 (2017) 259–263.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement

复杂系统的数学和计算机建模单位

, 法国

巴黎莱斯科德利耶尔 nicolas.bacaer@ird.fr

## 总结

我们对生活在连续时间由马尔可夫链控制的随机环境中的人口灭绝率感兴趣。每个人的死亡或繁殖速度取决于环境。在繁殖期间，假定后代数量遵循一定的概率定律，该定律也取决于环境。在人口肯定灭绝的所谓亚临界情况下，灭绝速度是明确确定的。从某种意义上说，环境的随机性减慢了人口的灭绝速度。

关键字：人口动态，人口随机性，环境随机性

## 1. 简介

许多建模研究已经研究了人口统计和环境随机性对人口动态的影响。例如，如所述（Gaveau等，1996；Lebreton等，2007），将人口视为实数并使用扩散近似（Lande等，2003）的工作可以当这种灭绝是肯定的时，导致种群灭绝速度的结果不准确。为了使种群保持整数，（Athreya和Karlin，1971）研究了在固定的随机环境下离散时间的分支过程，并显示了在什么条件下种群的灭绝是肯定的。在恒定的环境中，我们可以区分三种情况：超临界，关键和次临界。（Cogburn和Torrez，1981；Bacaër和Ed-Darraz，2014）研究了连续时间内类似模型的灭绝条件，也就是说在随机环境中的生灭过程。对于具有离散时间和随机环境的亚临界情况，（D'Souza和Hambly，1997；Guivarc'h和Liu，2001）等计算了灭绝速率，这导致了对另外两个亚种的区分。-分类为高度和弱次临界的方案。（Bacaër，2017）连续不断地计算出随机马尔可夫环境中线性的出生和死亡过程的灭绝率；该方法包括离散化减少时间（D'Souza and Hambly，1997），然后使时间步长趋向于0。但是该模型不允许多人同时出生。下面的目标是消除此限制，即研究随机环境中的“连续时间分支过程”（Méléard，2016年，第5.4节），以计算速度。相应的消光，并观察到该速度（绝对值）小于人们可能期望的速度。

在第2节中，我们为我们的模型提供了一个环境，该环境根据Markov链在连续时间内在 $K$ 个状态之间振荡。在第3节中，我们计算增长率 $\delta_i$ （正数或负数）环境中的人口 $i$ （ $1 \leq i \leq K$ ）和平均比例 $u_i$ 环境在状态 $i$ 中花费的时间。我们在第4节中指出，如果平均增长率为负，即如果 $\sum_i u_i \delta_i \leq 0$ 。然后我们在第5节中说明，在亚临界情况下， $\sum_i u_i \delta_i < 0$ ，灭绝速度 $\omega$ 人口的数量，由以下事实定义：不灭绝的概率随着 $e^{\omega t}$ 与 $\omega < 0$ ，由公式给出

$$\omega = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha \Delta),$$

其中：

- $Q$  是描述环境随机过渡的矩阵；
- $\Delta$  是增长率的对角矩阵  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq K}$  在对角线上
- $s(Q + \alpha \Delta)$  表示谱界，即矩阵最大实部的特征值  $Q + \alpha \Delta$ 。

它是在 (Bacaër, 2017) 中获得的针对出生和死亡线性过程的公式的推广，该公式不考虑同时生育。我们在第6节中表明

$$\sum_i u_i \delta_i \leq \omega < 0$$

并且如果  $\delta_i$  不尽相同。灭绝率（绝对值）低于平均增长率。因此，我们可以说，在我们的模型中，环境随机性以某种方式减慢了人口的灭绝速度。总之，我们注意到类似的不等式适用于具有随机环境的离散时间中的分支过程：已经在 (Guivarc'h and Liu, 2001) 中隐式地发现了它。

## 2. 模型

我们假设环境根据连续时间的马尔可夫链在  $K$  个状态之间随机振荡。换句话说，有数字  $Q_{i,j} \geq 0$  这样，如果环境处于状态  $j$ ，则有可能  $Q_{i,j} dt$  该切换环境的状态 我的  $i \neq j$  在每个无限的时间间隔内  $dt$ 。我们定义  $Q = (Q_{i,j})$  带有对角线项的方阵  $Q_{j,j} = -\sum_{i \neq j} Q_{i,j}$ 。我们还假设矩阵  $Q$  是不可约的，这意味着在面向  $K$  个顶点且边从  $j$  到  $i$  ( $i \neq j$ ) 如果  $Q_{i,j} > 0$ ，两个山峰  $i_1$  和  $i_2$  总是可以通过一条路径到达  $i_1$  朝  $i_2$  和一条路  $i_2$  朝  $i_1$ 。那么存在一个独特的载体  $u$  用

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Séricola, 2013年, 第152页)。组件  $u_i$  表示环境在状态  $i$  中花费的平均时间比例。

考虑一个在此环境中彼此独立死亡和繁殖的无性或女性个体。如果环境处于状态  $i$ ，我们假设在每个无穷小时间间隔内  $dt$ ，每个人都有可能复制  $a_i dt$  ( $a_i > 0$ ) 并有可能死亡  $b_i dt$  ( $b_i > 0$ )。如果该个体繁殖，则假设他生下  $n$  个个体 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $q_{n,i}$ ，带有  $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1$  为了一切  $i$ 。

另一种看待这种情况的方式是，在环境  $i$  中，每个人都有可能经历一个事件  $c_i dt$  (其中  $c_i = a_i + b_i$ ) 在每个无限的时间间隔内  $dt$ 。如果事件发生，则该个人被0个人替换为一个概率  $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i + b_i}$  和  $n$  个人 ( $n \geq 1$ )  $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i + b_i} q_{n-1,i}$ 。所以  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1$  为了一切  $i$ 。因此，在随机环境下，它是对连续时间的连接过程的概括 (Méléard, 2016年, 第5.4节)。进一步假设

$$m_i = \sum_{n \geq 1} n p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

我们定义

$$\delta_i = c_i(m_i - 1)$$

和  $\Delta$ ，对角矩阵  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq K}$  在对角线上。

## 3. 增长率 $\delta_i$

在这个模型中，概率  $\pi_{n,i}(t)$  人口为  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 在环境  $i$  ( $1 \leq i \leq K$ ) 在时间  $t$  是系统的解

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n c_i \pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k p_{n+1-k,i} \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j} \pi_{n,j}(t). \quad (1)$$

实际上，我们假设例如在环境  $i$  的时间  $t$  处有  $n$  个人。在无限时间间隔内发生事件  $(t, t + dt)$  并以大约  $n c_i dt$ 。此外，我们还可以与最终  $\tilde{N}$  在时间  $t + DT$  如果，起始  $k$  个体 ( $1 \leq k \leq n + 1$  个在时间) 吨，它们中的一个经历了一个事件 (机率  $c_i k dt$ )，并替换为  $n + 1 - k$  个新个体 (机率  $p_{n+1-k,i}$ ) 因为  $k - 1 + (n + 1 - k) = n$ 。最后，我们可以结束了  $\tilde{n}$  个人在环境  $i$  我在时间  $T + DT$ ，如果有没有环境的人  $j$  在时间  $T$  牛逼，如果环境已经切换状态  $j$  在状态  $i$  (机率  $Q_{i,j} dt$ )。带参数  $a_i$ ， $b_i$  和  $q_{n,i}$ ，系统也写成

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_{n,i}}{dt} = & -n(a_i + b_i) \pi_{n,i}(t) + (n+1)b_i \pi_{n+1,i}(t) + a_i \sum_{k=1}^n k q_{n-k,i} \pi_{k,i}(t) \\ & + \sum_j Q_{i,j} \pi_{n,j}(t). \end{aligned}$$

我们以初始条件  $n_0$  个人 ( $n_0 \geq 1$ ) 在环境中  $i_0$ ，所以  $\pi_{n_0,i_0}(0) = 1$  和  $\pi_{n,i}(0) = 0$  如果  $(n, i) \neq (n_0, i_0)$ 。因为应该是概率，所以我们有  $\pi_{n,i}(t) \geq 0$  和  $\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) = 1$  为  $t > 0$ 。

我们定义  $\pi = (\pi_{0,1}, \dots, \pi_{0,K}, \dots, \pi_{n,1}, \dots, \pi_{n,K}, \dots)$ 。我们看到  $\frac{d\pi}{dt} = M\pi(t)$ ，在哪里  $M$  是形式的无限矩阵

$$\left( \begin{array}{c|cccc} Q & CP_0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & Q - C + CP_1 & 2CP_0 & 0 & \dots \\ 0 & CP_2 & Q - 2C + 2CP_1 & 3CP_0 & \dots \\ 0 & CP_3 & 2CP_2 & Q - 3C + 3CP_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array} \right),$$

在哪里  $C$  是对角矩阵  $(c_i)_{1 \leq i \leq K}$  和  $P_n$  对角矩阵  $(p_{n,i})_{1 \leq i \leq K}$ 。在线性生死过程的特定情况下，仅矩阵  $P_0$  和  $P_2$  不为零：矩阵  $M$  然后按块对角线。

让我们介绍一下生成函数

$$g_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} x^n, \quad f_i(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) x^n.$$

我们注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \pi_{n,i}(t) x^n = x \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x)$$

和

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} k p_{n+1-k,i} \pi_{k,i}(t) x^n &= \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_{k,i}(t) \sum_{n=k-1}^{\infty} p_{n+1-k,i} x^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_{k,i}(t) x^{k-1} g_i(x) = g_i(x) \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x). \end{aligned}$$

因此，我们从 (1) 推导偏微分方程组

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x) - x) \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j} f_j(t, x). \quad (2)$$

在特定的出生和死亡线性过程中，我们有  $g_i(x) = p_{0,i} + p_{2,i} x^2$ ， $c_i(g_i(x) - x) = (x - 1)(a_i x - b_i)$ 。

注意人口的期望

$$e_i(t) = \sum_n n \pi_{n,i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 1)$$

是一个常微分方程组的解，通过对  $x$  推导系统 (2)，使  $x = 1$  并注意到  $g_i(1) = 1$ ：

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i e_i(t) + \sum_j Q_{i,j} e_j(t). \quad (3)$$

如果我们住在环境  $i$  中，那么在时间  $t$  的人口期望值 就是  $e^{\delta_i t}$  如果我们在时间  $t = 0$  从一个人开始。

系统 (3) 涉及矩阵  $Q + \Delta$ 。但是，我们将在第5节中看到，人口灭绝率并非总是由特征值给出  $s(Q + \Delta)$ 。

## 4. 终止条件

让我们看看该模型导致人口某种程度灭绝的条件。为此，请考虑离散时间的马尔可夫链，其每个时间步长是环境中两跳之间的持续时间。这条链具有情侣状态空间  $(i, t)$  总的来说  $\{1, 2, \dots, K\} \times [0, +\infty[$ ，其中第一个组件  $i$  代表环境和第二部分  $t$  切换到另一个环境之前的时间。因此，与其说环境处于状态，不如说  $i_0$  一段时间  $t_0$  然后在状态  $i_1$  一段时间  $t_1$ ，我们说我们从  $(i_0, t_0)$  在  $(i_1, t_1)$  等 我们已经在 (Bacaër和Ed-Darraz, 2014年, §2.1) 中看到，如果我们定义

$$Q_i = -Q_{i,i} \quad \forall i,$$

那么这个马尔可夫链的平稳分布是

$$w_{i,t} = \frac{Q_i u_i}{\sum_j Q_j u_j} Q_i e^{-Q_i t}.$$

因此，我们可以应用 (Athreya and Karlin, 1971) 的结果，该结果与马尔可夫环境中的分支过程有关：几乎可以肯定的是，当且仅当

$$\sum_i \int_0^\infty w_{i,t} \log(e^{\delta_i t}) dt \leq 0,$$

这给了，因为  $\int_0^\infty t e^{-Q_i t} dt = (1/Q_i)^2$ ，条件

$$\sum_i u_i \delta_i \leq 0.$$

因为  $\delta_i = c_i(m_i - 1)$ ，也可以用以下形式写  $\sum_i \theta_i m_i \leq 1$ ，带有  $\theta_i = c_i u_i / (\sum_j c_j u_j)$ 。换句话说，所产生的后代的“平均”数量少于1，每种环境的权重由  $\theta_i$ 。

## 5. 灭绝速度

我们现在对亚临界情况感兴趣  $\sum_i u_i \delta_i < 0$ 。在这种情况下，

$$\pi_{0,i}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_i, \quad \pi_{n,i}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall n \geq 1.$$

我们正在尝试确定人口灭绝的速度：

$$\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}(t), \quad n \geq 1, 1 \leq i \leq K.$$

此限制确实存在，并且不依赖于  $n$ （假设  $n \geq 1$ ）， $i$  或初始条件  $(n_0, i_0)$ （Collet 等人，2013 年，第 4.5 节）。用我们的符号，我们有  $\omega < 0$  和不灭绝的可能性  $1 - \sum_i \pi_{0,i}(t) = \sum_i \sum_{n \geq 1} \pi_{n,i}(t)$  也以速率  $\omega$  指数向 0 减小。

如（Bacaër, 2017, §2.1）中所述， $\omega$  使用时间离散化，（D'Souza and Hambly, 1997）的公式表示在马尔可夫环境下离散时间中分支过程的灭绝速度，并传递到使时间步长趋向于极限的极限 0。

因此，让我们以较小的常规时间步长来离散时间  $\tau > 0$ 。想象一下，环境在每个小时时间步长内保持恒定，并且过渡在状态空间中离散时间遵循马尔可夫链  $\{1, 2, \dots, K\}$  与过渡矩阵  $e^{\tau Q^T}$ ，在哪里  $Q^T$  是的转置矩阵  $Q$ 。如果我们的模型中描述环境的连续时间马尔可夫链是上述过程的极限， $\tau \rightarrow 0$ 。

在每个较小的时间间隔内  $\tau$  比方说环境在哪里  $i$ ，我们假设人口在连续时间和恒定环境中遵循以下连接过程： $c_i$  和  $(p_{n,i})$  从第 2 节开始  $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t)$  人口众多的可能性  $n$  在环境中  $i$  当时  $t$  在此修改后的模型中，每个长度时间间隔中的环境都恒定  $\tau$ 。为了一切  $t > 0$ ， $n \geq 0$  和  $1 \leq i \leq K$ ，我们有  $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t) \rightarrow \pi_{n,i}(t)$  如果  $\tau \rightarrow 0$ 。

如果边界反转是合法的，

$$\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega^{[\tau]},$$

在马尔可夫环境中，离散时间中的连接过程的消失速度的计算重新回到了计算的起点，因为（具有  $N$  整数）

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} [\pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau).$$

人口期望增加或减少一个因素  $e^{\delta_i \tau}$  一段时间  $\tau$  环境在状态  $i$  中处于阻塞状态。注意  $u^T$  是链的固定分布，因为  $Qu = 0$  暗示  $u^T Q^T = 0$  和  $u^T e^{\tau Q^T} = u^T (I + \tau Q^T + \frac{1}{2}(\tau Q^T)^2 + \dots) = u^T$ 。根据（Athreya 和 Karlin, 1971）的说法，该链始终是次临界的，因为

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0.$$

因此（D'Souza and Hambly, 1997）和（Bacaër, 2017, §2.1）表明几何速率  $\Omega(\tau)$  人口灭绝是由

$$\Omega(\tau) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(e^{\tau Q^T} e^{\alpha \tau \Delta}),$$

在哪里  $\rho(\cdot)$  表示矩阵的光谱半径。令  $\tau$  的值为整数的倒数。我们有

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log [\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho([e^{\tau Q^T} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}).$$

矩阵  $[e^{\tau Q^T} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}$  收敛到  $e^{Q^T + \alpha \Delta}$  如果  $\tau \rightarrow 0$  (所谓的Lie-Trotter-Kato公式)。我们推论出 (Bacaër, 2017, §2.1), 连续时间的灭绝指数速度为

$$\omega = \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha \Delta), \quad (4)$$

在哪里  $s(Q + \alpha \Delta)$  是矩阵的光谱范围  $Q + \alpha \Delta$ 。因此, 与 (Bacaër, 2017) 相比, 仅对角矩阵  $\Delta$  的表达式发生了变化。

回想一下矩阵对角线之外的所有元素  $Q + \alpha \Delta$  是  $\geq 0$ 。在这种情况下, 光谱范围  $s(Q + \alpha \Delta)$  是此矩阵的真实特征值。它是具有最大实部的特征值。

$\omega$  的公式 (4) 是在生与死的线性过程中获得的公式的推广 (Bacaër, 2017)。为此, 每个人都会生出一个新的个体 (对于细菌, 每个个体分为两个)  $a_i dt$  并有可能死亡  $b_i dt$  在每个无限的时间间隔内  $dt$  在环境中  $i$ 。这对应于  $q_{1,i} = 1$  和  $q_{n,i} = 0$  如果  $n \neq 1$ 。然后我们有  $c_i = a_i + b_i$ ,  $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i + b_i}$ ,  $p_{2,i} = \frac{a_i}{a_i + b_i}$ ,  $p_{n,i} = 0$  如果  $n = 1$  在哪里  $n > 2$  和  $\delta_i = a_i - b_i$ 。

直观地讲, 灭绝速度的公式  $\omega$  与以下事实有关: 如果我们正在寻找解决方案  $f_i(t, x)$  系统 (2) 的行为  $e^{\omega t} (1-x)^\alpha \phi_i$  在附近  $x = 1$  与  $x < 1$ , 我们得到方程

$$\omega \phi_i = \alpha \delta_i \phi_i + \sum_j Q_{i,j} \phi_j,$$

暗示  $\omega$  是矩阵的特征值  $Q + \alpha \Delta$ 。但是, 这不能理解哪个  $\alpha$  值合适。如我们所见, 这是最小化  $s(Q + \alpha \Delta)$  为  $\alpha \in [0, 1]$ 。

## 6. 不平等

(Bacaër, 2017, §2.2) 已经观察到

- 功能  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha \Delta)$  值得  $s(Q) = 0$  如果  $\alpha = 0$ ;
- 如果该函数是凸的  $\Delta$  是对角矩阵;
- 如果  $\delta_i$  不尽相同。

此外, 其派生于  $\alpha = 0$  正是  $\sum_i u_i \delta_i$ , 这是  $< 0$ 。功能  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha \Delta)$  因此在  $\alpha = 0$ 。所以

$$\alpha \sum_i u_i \delta_i \leq s(Q + \alpha \Delta) \quad \forall \alpha.$$

因此, 在一定间隔内, 这些函数的最小值  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_i u_i \delta_i \leq \omega < 0 \quad (5)$$

如果第一个不等式具有严格的不等式  $\delta_i$  不尽相同。

作为一个数值示例, 例如考虑两个环境的情况  $Q_{1,2} = Q_{2,1} = 1$ , 所以  $u_1 = u_2 = 1/2$ : 在每个州中, 环境平均花费一半的时间。如果两种环境下的增长率都是  $\delta_1 = -1$  和  $\delta_2 = -2$ , 然后是函数  $\alpha \mapsto s(Q + \alpha \Delta)$  在减少, 因此  $\omega = s(Q + \Delta) \simeq -1,38$ , 而  $\sum_i u_i \delta_i = -1,5$ 。

不等式 (5) 可以解释如下。没有人口随机性但环境随机性最接近我们模型的人口模型无疑是人口模型  $p(t)$  当时  $t$  服从方程  $\frac{dp}{dt} = \delta_{\theta(t)} p(t)$ , 其中随机函数  $\theta(t)$  与中的价值  $\{1, 2, \dots, K\}$  并代表环境的演变。所以  $p(t) = p(0) \exp(\int_0^t \delta_{\theta(z)} dz)$ 。遍历定理几乎可以确保  $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\theta(z)} dz \rightarrow \sum_i u_i \delta_i$  如果  $t \rightarrow +\infty$ 。所以  $\frac{1}{t} \log p(t) \rightarrow \sum_i u_i \delta_i$  如果  $t \rightarrow +\infty$ 。所以  $\sum_i u_i \delta_i$  是没有人口统计随机性的模型消失率, 即使  $p(t)$  不会取消自身。人口将比我们的模型更快地消亡。

相反, 具有人口随机性但没有环境随机性的人口模型最接近我们的模型, 无疑是持续时间联系的过程 (Méléard, 2016年, 第5.4节), 其平均增长率 (甚至是灭绝)  $\delta = \sum_i u_i \delta_i$ 。人口将比我们的模型更快地消亡。

因此, 人口和环境的随机性在某种意义上减缓了人口的灭绝。(Tirard等人, 2016年, 第211页) 还指出“环境随机性可以节省人口的下降”。另一方面, (Primack等人, 2012年, 第159页) 指出: “总的来说, 在人口动态模型中引入环境随机性会导致现实增长, 人口减少, 灭绝的可能性更高”。在我们的模型中则相反。

## 7. 结论

实际上, 在离散时间和随机环境中的分支过程中, 我们也有类似的不等式。例如, 假设环境是从有限数量的状态中独立选择且分布均匀的:  $v_i > 0$  是环境在每个时间步入状态  $i$  的概率, 我们有  $\sum_i v_i = 1$ 。如果环境处于状态  $i$ , 每个个体被  $n$  个个体替换, 概率为  $p_{n,i} \geq 0$ , 所以  $\sum_{n \geq 0} p_{n,i} = 1$ 。我们假设  $m_i = \sum_{n \geq 1} n p_{n,i} < +\infty$ 。在亚临界情况下  $\sum_i v_i \log m_i < 0$ , 灭绝概率降低的几何速率  $\Omega$  使得

$$1 > \Omega = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \left( \sum_i v_i m_i^\alpha \right) \geq \exp \left( \sum_i v_i \log m_i \right) = \prod_i m_i^{v_i} \quad (6)$$

(Guivarc'h和Liu, 2001, 定理1)。右边的最后一项是没有人口统计随机性的模型的几何增长率 (此处为降低)

$$p(t+1) = m_{\theta_t} p(t),$$

在哪里  $\theta_t$  是环境的状态  $p(t)$  当时的人口  $t = 0, 1, 2 \dots$  它也是在恒定环境 (因此没有环境随机性) 下, 平均变化过程中分支过程中非灭绝概率降低的几何速率。  $m = \prod_i m_i^{v_i}$ 。

如果  $m_i < 1$  为了一切  $i$ , 不等式 (6) 被写成

$$1 > \Omega = \sum_i v_i m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}.$$

这可以转换对数函数的凹度:  $\log(\sum_i v_i m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$ 。

如果更普遍

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

(6) 中的不等式本身类似于第6节。我们定义

$$h(\alpha) = \log \left( \sum_i v_i m_i^\alpha \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

所以一些计算表明

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i m_i^\alpha \log m_i}{\sum_i v_i m_i^\alpha}, \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i < j} v_i v_j m_i^\alpha m_j^\alpha (\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i m_i^\alpha)^2}.$$

所以

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \geq 0$$

在间隔  $[0, 1]$ 。功能  $h(\alpha)$  因此是凸的并且在切线之上  $\alpha = 0$  :  $h(\alpha) \geq \alpha h'(0)$  和

$$\min\{h(\alpha); 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq h'(0).$$

所以

$$\min\{e^{h(\alpha)}; 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq e^{h'(0)}.$$

这是不平等 (6) 。

因此, 当我们同时具有人口统计和环境随机性时, 无论模型是离散时间还是连续时间, 灭绝速度都较慢。

## 参考文献

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictions between discrete and continuous models. *Lett. Math. Phys.* 37, 285–292.
- J.-D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. *Écoscience* 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.-E. Sæther (2003) *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*, Oxford University Press.
- K. B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. *Ann. Math. Stat.* 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W. C. Torrez (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. *J. Appl. Probab.* 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed-Darraz (2014) On linear birth- and- death processes in a random environment, *J. Math. Biol.* 69, 73–90.
- J. C. D'Souza, B. M. Hambly (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment, *Adv. Appl. Probab.* 29, 38–55.
- Y. Guivarc'h, Q. Liu (2001) Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire, *J. Math. Biol.*, <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0>.
- S. Méléard (2016) *Modèles aléatoires en écologie et évolution*, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) *Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications*, Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martínez, J. San Martín (2013) *Quasi-stationary Distributions*, Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) *Écologie*, Dunod, Paris.
- R. B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) *Biologie de la conservation*, Dunod, Paris.