# على سرعة انقراض السكان في بيئة عشوائية

.263−259 (2017) 340 C. R. Biol.
http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002
hal: 01522889

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة
Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا
nicolas.bacaer@ird.fr

**ملخص**

نحن مهتمون بمعدل انقراض السكان الذين يعيشون في بيئة عشوائية تحكمها سلسلة ماركوف في وقت مستمر. يموت كل فرد أو يتكاثر بمعدل يعتمد على البيئة. أثناء التكاثر ، يفترض أن عدد النسل يتبع قانون احتمالي معين يعتمد أيضًا على البيئة. في ما يسمى بالحالة دون الحرجة حيث يتم إخماد السكان بالتأكيد ، يتم تحديد معدل الانقراض بشكل صريح. بمعنى ما ، فإن العشوائية البيئية تبطئ انقراض السكان.

الكلمات المفتاحية: الديناميات السكانية ، العشوائية الديمغرافية ، العشوائية البيئية

## 1 المقدمة

لقد درست العديد من دراسات النمذجة تأثير العشوائية الديموغرافية والبيئية على ديناميكيات السكان. كما لوحظ على سبيل المثال (Lebreton et al.، 2007 ؛Gaveau et al.، 1996) ، يعمل حيث يعامل السكان كرقم حقيقي والذين يستخدمون تقديرات الانتشار (Lande et al.، 2003) يمكن يؤدي إلى نتائج غير دقيقة لمعدل انقراض السكان عندما يكون هذا الانقراض مؤكدًا. للحفاظ على عدد صحيح من السكان ، (Athreya and Karlin، 1971) درس عمليات التفرع في وقت منفصل مع بيئة عشوائية ثابتة وأظهر تحت أي ظروف انقراض السكان مؤكد. كما هو الحال في بيئة ثابتة ، يمكننا التمييز بين ثلاث حالات: فوق الحرجة ، حرجة وشبه حرجة. (Cogburn and Torrez، 1981 ؛Bacaër and Ed-Darraz، 2014) مهتمان بظروف الانقراض للنماذج المماثلة في الوقت المستمر ، وهذا يعني عمليات الولادة والموت في بيئة عشوائية. . بالنسبة للحالة دون الحرجة ذات الوقت المنفصل والبيئة العشوائية ، (D'Souza and Hambly، 1997؛ Guivarc'h and Liu، 2001) من بين أمور أخرى ، حسب معدل الانقراض ، مما يؤدي إلى مزيد من التمييز بين جزأين فرعيين - المخططات المؤهلة على أنها ناقصة للغاية وضعيفة. في الوقت المستمر ، حسب (باكير ، 2017) معدل الانقراض لعملية خطية للولادة والموت في بيئة ماركوف العشوائية ؛ كانت الطريقة في تحديد الوقت الذي سيختزل فيه إلى قضية (D'Souza and Hambly، 1997) ، ثم لجعل الخطوة الزمنية تميل نحو 0. لكن هذا النموذج لم يسمح بالولادة المتزامنة للعديد من الأفراد. الهدف أدناه هو رفع هذا التقييد ، أي دراسة "العمليات المتفرعة المتفرعة للوقت" (Méléard، 2016، §4.4) في بيئة عشوائية ، لحساب سرعة الانقراض المقابل ولاحظ أن هذه السرعة أقل (في القيمة المطلقة) من تلك التي قد يتوقعها المرء.

في القسم 2 ، نقدم نموذجنا مع بيئة تتأرجح بين حالات $K$ وفقًا لسلسلة ماركوف في وقت مستمر. في القسم 3 ، نحسب معدل النمو $\delta_i$ (إيجابي أو سلبي) للسكان في البيئة $i$ ومتوسط النسبة $u_i$الوقت الذي تقضيه البيئة في الحالة $i$ . نوضح في القسم 4 أن السكان سينقرضون بالتأكيد إذا كان متوسط معدل النمو سلبيًا ، أي إذا$\sum_i u_i\,\delta_i \le 0$ . ثم نظهر في القسم 5 أنه في الحالة دون الحرجة حيث$\sum_i u_i\,\delta_i < 0$ ، سرعة الانقراض $\omega$ من السكان ، التي تحددها حقيقة أن احتمال عدم الانقراض ينخفض كما $e^{\omega t}$ مع $\omega < 0$، تعطى من الصيغة

$$\omega = \min_{0\le\alpha\le 1} s(Q+\alpha\,\Delta),$$

و

- $Q$ هي المصفوفة التي تصف التحولات العشوائية للبيئة ؛
- $\Delta$ هي المصفوفة القطرية بمعدلات النمو $(\delta_i)_{1\le i\le K}$ على القطر.
- $s(Q+\alpha\,\Delta)$ يشير إلى الارتباط الطيفي ، أي القيمة الذاتية لأكبر جزء حقيقي من المصفوفة $Q+\alpha\,\Delta$.

إنه تعميم للصيغة التي تم الحصول عليها في (باكير ، 2017) للعمليات الخطية للولادة والموت ، والتي لا تأخذ في الاعتبار الولادات المتزامنة. نعرض في القسم 6 ذلك

$$\sum_i u_i\,\delta_i \le \omega < 0$$

وأن التفاوت الأول صارم إذا كان $\delta_i$ليست كلها متساوية. معدل الانقراض أقل (بالقيمة المطلقة) من متوسط معدل النمو. لذلك يمكننا القول أنه بطريقة معينة ، فإن العشوائية البيئية تبطئ انقراض السكان في نموذجنا. في الختام ، نلاحظ أن عدم مساواة مماثل ينطبق على عمليات التفرع في وقت منفصل مع بيئة عشوائية: وهو موجود بالفعل ضمنيًا في (Guivarc'h and Liu، 2001).

## 2. النموذج

نفترض أن البيئة تتأرجح بشكل عشوائي بين حالات $K$ وفقًا لسلسلة ماركوف في وقت مستمر. وبعبارة أخرى ، هناك أرقام $Q_{i,j} \ge 0$ بحيث إذا كانت البيئة في الحالة $j$ ، هناك احتمال $Q_{i,j}\,dt$ التي تحولها البيئة إلى الحالة $i$ لـ$i \ne j$ خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر $dt$. نحدد$Q = (Q_{i,j})$ المصفوفة المربعة ذات الحدود القطرية $Q_{j,j} = -\sum_{i\ne j} Q_{i,j}$. من المفترض أيضًا أن المصفوفة $Q$ غير قابلة للاختزال ، مما يعني أنه في الرسم البياني الموجه إلى رؤوس $K$ بحافة من $j$ إلى $i$ $(i \ne j)$ إذا $Q_{i,j} > 0$، قمتين $i_1$ و $i_2$ يمكن الوصول إليه دائمًا عن طريق المسار $i_1$ تجاه $i_2$ وطريق $i_2$ تجاه $i_1$. هناك ثم وجود ناقل واحد $\text{ش}$ مع

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

(سيريكولا ، 2013 ، ص 152). المكون $u_i$ يمثل متوسط نسبة الوقت الذي تقضيه البيئة في الحالة $i$ .

ضع في اعتبارك مجموعة من الأفراد ، لا جنسي أو أنثى ، الذين يموتون ويتكاثرون في هذه البيئة بشكل مستقل عن بعضهم البعض. إذا كانت البيئة في الحالة $i$ ، فإننا نفترض ذلك ، خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر$dt$ ،

- كل فرد يتكاثر باحتمال $a_i\,dt$ مع $a_i > 0$.
- يموت كل فرد باحتمال $b_i\,dt$ مع $b_i > 0$.

إذا تكاثر الفرد ، افترض أنه أنجب عددًا من الأفراد $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ مع الاحتمال $q_{n,i}$مع $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1\ \forall i$.

هناك طريقة أخرى لمعرفة ذلك وهي أن نقول أنه في البيئة $i$ ، يواجه كل فرد حدثًا مع احتمال$c_i\,dt$ مع $c_i = a_i + b_i$ خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر $dt$. في حالة وقوع الحدث ، يتم استبدال الفرد بـ 0 فرد باحتمالية $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$وبواسطة $n$ من الأفراد $(n \ge 1)$ مع الاحتمال $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}\,q_{n-1,i}$. لقد فعلنا ذلك$\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1\ \forall i$ . لذا فهو تعميم لعملية (Méléard، 2016، §4.4) في حالة البيئة العشوائية. ومن المفترض كذلك

$$m_i = \sum_{n\ge1} n\,p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

نحدد

$$\delta_i = c_i(m_i - 1)$$

و $\Delta$المصفوفة القطرية مع $(\delta_i)_{1\le i\le K}$ على القطر.

## 3. معدلات النمو $\delta_i$

في هذا النموذج ، الاحتمال $\pi_{n,i}(t)$أن يكون عدد سكانها $n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ في البيئة $i$ $(1 \le i \le K)$ في الوقت $t$ هو حل النظام

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n\,c_i\,\pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k\,p_{n+1-k,i}\,\pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\,\pi_{n,j}(t)\,. \tag{1}$$

في الواقع ، نفترض على سبيل المثال أن هناك $n$ أفراد في الوقت $t$ في البيئة $i$ . حدث حدث خلال الفاصل الزمني متناهية الصغر $(t, t + dt)$ ويغير عدد الأفراد الذين لديهم احتمال بترتيب $n\,c_i\,dt$. علاوة على ذلك ، يمكن أن ينتهي بنا الأمر مع $n$ أفراد في الوقت $t + dt$ إذا ، بدءًا من $k$ أفراد ( $k \le n + 1 \ge 1$ ) في الوقت $t$ ، يخضع أحدهم لحدث ( احتمال$c_i\,k\,dt$ ) ويتم استبداله بـ $n + 1 - k$ أفراد جدد (الاحتمال$p_{n+1-k,i}$، لان $k - 1 + (n + 1 - k) = n$. أخيرًا ، يمكن أن ينتهي بنا الأمر مع $n$ أفراد في البيئة $i$ في الوقت $t + dt$ إذا

كان لدينا $n$ أفراد في البيئة $j$ في الوقت $t$ وإذا كانت البيئة قد تحولت من الحالة $j$ في الدولة ط (الاحتمال $Q_{i,j}\,dt$). مع المعلمات $a_i$ ، $b_i$ و $q_{n,i}$، يتم كتابة النظام أيضا

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -\,n\,(a_i+b_i)\,\pi_{n,i}(t) + (n+1)b_i\,\pi_{n+1,i}(t) + a_i\sum_{k=1}^{n} k\,q_{n-k,i}\,\pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\,\pi_{n,j}(t)\,.$$

نأخذ كشرط أولي $n_0$ اشخاص $(n_0 \geq 1)$ في البيئة $i_0$، بحيث $\pi_{n_0,i_0}(0) = 1$ و $\pi_{n,i}(0) = 0$ إذا $(n,i) \neq (n_0,i_0)$. كما يجب أن يكون من أجل الاحتمالات ، عندها $\pi_{n,i}(t) \geq 0$ و

$$\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) = 1, \quad \forall t > 0.$$

نحدد $\pi = (\pi_{0,1},\ldots,\pi_{0,K},\ldots,\pi_{n,1},\ldots,\pi_{n,K},\ldots)$. نحن نرى ذلك $\frac{d\pi}{dt} = M\pi(t)$ . $M$ هي مصفوفة لا نهائية من النموذج

$$\left(\begin{array}{c|cccc} Q & CP_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & Q-C+CP_1 & 2CP_0 & 0 & \cdots \\ 0 & CP_2 & Q-2C+2CP_1 & 3CP_0 & \cdots \\ 0 & CP_3 & 2CP_2 & Q-3C+3CP_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

$C$ هي المصفوفة القطرية $(c_i)_{1\leq i\leq K}$ و $P_n$ المصفوفة القطرية $(p_{n,i})_{1\leq i\leq K}$. في حالة معينة من عمليات الولادة والوفاة الخطي ، المصفوفات فقط $P_0$ و $P_2$ هي غير صفرية: المصفوفة $M$ ثم يكون ثلاثي الأبعاد بواسطة الكتل.

دعنا نقدم وظائف التوليد

$$g_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i}\,x^n\,, \quad f_i(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t)\,x^n\,.$$

نلاحظ أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\pi_{n,i}(t)\,x^n = x\,\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)$$

و

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} k\,p_{n+1-k,i}\,\pi_{k,i}(t)\,x^n &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_{k,i}(t)\sum_{n=k-1}^{\infty} p_{n+1-k,i}\,x^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_{k,i}(t)\,x^{k-1}g_i(x) = g_i(x)\,\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)\,.\end{aligned}$$

لذلك نستنتج من (1) نظام المعادلات التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x)-x)\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j}\,f_j(t,x)\,. \tag{2}$$

في الحالة الخاصة للعمليات الخطية للولادة والموت ، لدينا $g_i(x) = p_{0,i} + p_{2,i}\,x^2$ و $c_i(g_i(x)-x) = (x-1)(a_i\,x - b_i)$ .

لاحظ أن توقعات السكان

$$e_i(t) = \sum_n n\,\pi_{n,i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,1)$$

هو حل لنظام المعادلات التفاضلية العادية ، والذي يتم الحصول عليه عن طريق اشتقاق النظام (2) فيما يتعلق بـ $x$ ، بأخذ $x = 1$ وتلاحظ أن $g_i(1) = 1$ :

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i\, e_i(t) + \sum_j Q_{i,j}\, e_j(t)\,. \tag{3}$$

إذا بقينا في بيئة $i$ ، فإن توقع السكان في الوقت $t$ يكون $e^{\delta_i t}$ إذا بدأنا من فرد واحد في الوقت $t = 0$ .

يتضمن النظام (3) المصفوفة $Q + \Delta$. ومع ذلك ، سنرى في القسم 5 أن معدل الانقراض السكاني لا يعطى دائمًا من خلال القيمة الذاتية $s(Q + \Delta)$ .

## 4. انقراض السكان

دعونا نلقي نظرة على الحالة التي يؤدي بها النموذج إلى انقراض معين للسكان. لهذا ، ضع في اعتبارك سلسلة ماركوف في وقت منفصل ، كل خطوة زمنية هي المدة بين قفزتين في البيئة. هذه السلسلة لفضاء الدول $\{1, 2, \ldots, K\} \times [0, +\infty[$. المكون الأول $i$ يمثل البيئة. يمثل المكون الثاني $t$ الوقت قبل التحول إلى بيئة أخرى. لذا بدلاً من القول إن البيئة في الدولة $i_0$ لفترة من الوقت $t_0$ ثم في الدولة $i_1$ لفترة من الوقت $t_1$، لدينا الانتقال $(i_0, t_0) \to (i_1, t_1)$ ، إلخ. لقد رأينا بالفعل في (Bacaër and Ed-Darraz، 2014، §2.1) أنه إذا عرفنا

$$Q_i = -Q_{i,i} \quad \forall i,$$

ثم التوزيع الثابت لسلسلة ماركوف هو

$$w_{i,t} = \frac{Q_i\, u_i}{\sum_j Q_j\, u_j}\, Q_i\, e^{-Q_i t}\,.$$

لذلك يمكننا تطبيق نتائج (Athreya and Karlin، 1971) التي تتعلق بعمليات التفرع في بيئة ماركوف: من شبه المؤكد أن السكان سينقرضون إذا وفقط إذا

$$\sum_i \int_0^\infty w_{i,t} \log(e^{\delta_i t})\, dt \le 0\,,$$

الذي يعطي ، لأن $\int_0^\infty t\, e^{-Q_i\, t} dt = (1/Q_i)^2$، الحالة

$$\sum_i u_i\, \delta_i \le 0.$$

لان $\delta_i = c_i(m_i - 1)$، يمكن كتابة هذا أيضًا في النموذج $\sum_i \theta_i\, m_i \le 1$ مع $\theta_i = c_i u_i / (\sum_j c_j u_j)$. وبعبارة أخرى ، فإن متوسط "عدد" النسل الناتج هو أقل من 1 ، مع إعطاء أوزان لكل بيئة بواسطة $\theta_i$ .

## 5. سرعة الانقراض

نحن مهتمون الآن في الحالة دون الحرجة حيث $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$. في هذه الحالة،

$$\pi_{0,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_i, \quad \pi_{n,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall n \ge 1.$$

نحاول تحديد معدل انقراض السكان:

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}(t)\,, \quad n \ge 1,\ 1 \le i \le K.$$

هذا الحد موجود ولا يعتمد على $n$ (شريطة أن رقم 1 ) أو $i$ أو الشروط الأولية $(n_0, i_0)$ (كوليت وآخرون ، 2013 ، القسم 4.5). مع تدويننا ، لدينا $\omega < 0$ واحتمال عدم الانقراض $1 - \sum_i \pi_{0,i}(t) = \sum_i \sum_{n\ge1} \pi_{n,i}(t)$ ينخفض أيضًا بشكل كبير نحو 0 مع المعدل ω.

كما هو الحال في (Bacaër، 2017، §2.1) ، يستخدم حساب ω تقديرًا للوقت ، صيغة (D'Souza and Hambly، 1997) لسرعة انقراض عمليات التفرع في وقت منفصل مع بيئة Markovian ، وممر إلى الحد الذي يميل الخطوة الزمنية نحو 0.

لذا دعنا نميِّز الوقت بخطوة زمنية منتظمة صغيرة $\tau > 0$. تخيل أن البيئة لا تزال ثابتة داخل كل خطوة زمنية صغيرة وأن التحولات تتبع سلسلة ماركوف في وقت منفصل على مساحة الدولة$\{1, 2, \ldots, K\}$ مع مصفوفة الانتقال $e^{\tau Q^\mathsf{T}}$. $Q^\mathsf{T}$ هي مصفوفة منقولة من المصفوفة $Q$ . سلسلة ماركوف المستمرة التي تصف البيئة في نموذجنا هي حد العملية الموصوفة أعلاه إذا$\tau \to 0$ .

خلال كل فاصل زمني صغير من الطول τ ، حيث تقول البيئة في الدولة $i$نفترض أن السكان يتبعون العملية في وقت مستمر وبيئة ثابتة مع المعلمات $c_i$ و $(p_{n,i})$ من القسم 2. ملاحظة $\pi^{[\tau]}_{n,i}(t)$ احتمال وجود عدد كبير من السكان $n$ في البيئة $i$في الوقت $t$ في هذا النموذج المعدل مع بيئة ثابتة في كل فترة زمنية من الطول τ. نملك $\forall t > 0$ ، $\forall n \geq 0$ ، $\forall i$ $(1 \leq i \leq K)$ ، $\pi^{[\tau]}_{n,i}(t) \to \pi_{n,i}(t)$ إذا $\tau \to 0$.

إذا كان عكس الحدود شرعيًا ،

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{t} \log \pi^{[\tau]}_{n,i}(t) = \lim_{\tau\to 0} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi^{[\tau]}_{n,i}(t) := \lim_{\tau\to 0} \omega^{[\tau]},$$

يتم إرجاع المرء إلى حساب سرعة انقراض عملية التفرع في وقت منفصل في بيئة ماركوف لأنه (مع عدد صحيح $N$ )

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi^{[\tau]}_{n,i}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log \left( \lim_{N\to+\infty} [\pi^{[\tau]}_{n,i}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau)\,.$$

توقع السكان يزيد أو ينقص بعامل $e^{\delta_i \tau}$خلال خطوة زمنية τ حيث يتم حظر البيئة في الحالة $i$ . لاحظ أن$u^\mathsf{T}$ هو التوزيع الثابت للسلسلة ، لأن $Qu = 0$ معطى $u^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} = 0$ و $u^\mathsf{T} e^{\tau Q^\mathsf{T}} = u^\mathsf{T}(I + \tau Q^\mathsf{T} + \frac{1}{2}(\tau Q^\mathsf{T})^2 + \cdots) = u^\mathsf{T}$. هذه السلسلة هي دون الحرجة دائمًا ، وفقًا لـ (Athreya and Karlin ، 1971) ، لأن

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0\,.$$

إذًا (D'Souza and Hambly، 1997) و (Bacaër، 2017، §2.1) يوضحان أن المعدل الهندسي لانقراض السكان يُعطى بواسطة

$$\Omega(\tau) = \min_{0\leq\alpha\leq 1} \rho(e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha\tau\Delta})\,.$$

$\rho(\cdot)$يدل على نصف القطر الطيفي لمصفوفة. دع قيمة $\tau$ تكون معكوس عدد صحيح. نملك

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log[\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0\leq\alpha\leq 1} \rho([e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha\tau\Delta}]^{1/\tau}).$$

المصفوفة $[e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha\tau\Delta}]^{1/\tau}$ يتلاقى ل $e^{Q^\mathsf{T}+\alpha\Delta}$ إذا $\tau \to 0$(ما يسمى بصيغة Lie-Trotter-Kato). نستنتج كما في (Bacaër، 2017، §2.1) أن السرعة الهائلة للانقراض في الوقت المستمر هي

$$\omega = \lim_{\tau\to 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0\leq\alpha\leq 1} s(Q + \alpha\Delta)\,. \tag{4}$$

$s(Q + \alpha\Delta)$ هو الحد الطيفي للمصفوفة $Q + \alpha\Delta$. وهكذا ، فقط التعبير عن المصفوفة القطرية Δ يتغير مقارنة مع (Bacaër، 2017).

تذكر أن جميع العناصر خارج قطر المصفوفة $Q + \alpha\Delta$ هم $\geq 0$. في هذه الحالة ، يرتبط الطيف $s(Q + \alpha\Delta)$ هي قيمة ذاتية حقيقية لهذه المصفوفة. إنها القيمة الذاتية مع الجزء الأكبر الحقيقي.

الصيغة (4) لـ $\omega$ هي تعميم لتلك التي تم الحصول عليها في حالة العمليات الخطية للولادة والموت (Bacaër، 2017). لهذه ، يولد كل فرد فردًا جديدًا واحدًا (للبكتيريا ، ينقسم كل منها إلى قسمين) مع احتمال$a_i\, dt$ ويموت باحتمال $b_i\, dt$ خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر $dt$ في البيئة $i$. هذا يتوافق مع$q_{1,i} = 1$ و $q_{n,i} = 0$ إذا $n \neq 1$. لدينا بعد ذلك $c_i = a_i + b_i$، $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$، $p_{2,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}$، $p_{n,i} = 0$ إذا $n = 1$ أو $n > 2$ و$\delta_i = a_i - b_i$.

بشكل حدسي ، ترتبط صيغة سرعة الانقراض fact بحقيقة أننا إذا بحثنا عن حل $f_i(t, x)$ من النظام (2) الذي يتصرف على النحو $e^{\omega t}(1 - x)^\alpha \phi_i$ في حي $x = 1$ مع $x < 1$، نحصل على المعادلة

$$\omega\, \phi_i = \alpha\, \delta_i\, \phi_i + \sum_j Q_{i,j}\, \phi_j,$$

مما يشير إلى أن ω هي قيمة ذاتية للمصفوفة $Q + \alpha\,\Delta$. ومع ذلك ، فإن هذا لا يجعل من الممكن فهم قيمة α المناسبة. كما رأينا ، هذا هو الذي يقلل$s(Q + \alpha\Delta)$ مع $\alpha \in [0, 1]$.

## 6. عدم المساواة

(Bacaër، 2017، §2.2) قد لاحظوا ذلك بالفعل

- $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ هي دالة مساوية لـ $s(Q) = 0$ إذا كانت α = 0
- هذه الوظيفة محدبة إذا كانت Δ مصفوفة قطرية
- هذه الوظيفة حتى محدبة بصرامة إذا $\delta_i$ ليست كلها متساوية.

بالإضافة إلى ذلك ، مشتقها في $\alpha = 0$ كان بالضبط $\sum_i u_i\,\delta_i < 0$. $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ وبالتالي هي دالة فوق ظلها عند α = 0. لقد فعلنا ذلك

$$\alpha \sum_i u_i\,\delta_i \leq s(Q + \alpha\Delta) \quad \forall \alpha.$$

لذلك لدينا الحد الأدنى من هذه الوظائف خلال الفاصل الزمني $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_i u_i\,\delta_i \leq \omega < 0 \tag{5}$$

مع عدم المساواة الصارمة في عدم المساواة الأولى إذا $\delta_i$ ليست كلها متساوية.

كمثال رقمي ، ضع في اعتبارك على سبيل المثال حالة بيئتين مع $Q_{1,2} = Q_{2,1} = 1$، بحيث $u_1 = u_2 = 1/2$: تنفق البيئة في المتوسط نصف الوقت في كل من هذه الحالات. إذا كانت معدلات النمو في كلا البيئتين$\delta_1 = -1$ و $\delta_2 = -2$ثم الوظيفة $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ يتناقص ، لذلك $\omega = s(Q + \Delta) \simeq -1{,}38$، في حين $\sum_i u_i\,\delta_i = -1{,}5$.

يمكن تفسير عدم المساواة (5) على النحو التالي. النموذج السكاني بدون العشوائية الديموغرافية ولكن مع التقارب العشوائي البيئي الأقرب إلى نموذجنا هو بلا شك النموذج حيث السكان$p(t)$ في وقت ر يطيع المعادلة $\frac{dp}{dt} = \delta_{\theta(t)}\,p(t)$ حيث الوظيفة العشوائية $\theta(t)$ مع القيم في $\{1, 2, \ldots, K\}$ويمثل تطور البيئة. نملك

$$p(t) = p(0)\exp(\int_0^t \delta_{\theta(z)}\,dz).$$

تضمن نظرية ergodic ، من المؤكد تقريبا ،

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\theta(z)}\,dz \to \sum_i u_i\,\delta_i, \quad t \to +\infty.$$

اذا لدينا

$$\frac{1}{t}\log p(t) \to \sum_i u_i\,\delta_i, \quad t \to +\infty.$$

$\sum_i u_i\,\delta_i$ وبالتالي هو معدل انقراض النموذج دون العشوائية الديموغرافية ، حتى لو $p(t)$لا تلغي أبدا. سيموت السكان بشكل أسرع من نموذجنا.

على العكس من ذلك ، فإن النموذج السكاني مع العشوائية الديموغرافية ولكن بدون العشوائية البيئية الأقرب إلى نموذجنا هو بلا شك عملية الاتصال الزمني المستمر (Méléard، 2016، §4.4) بمتوسط معدل نمو (أو بالأحرى انقراض) $\delta = \sum_i u_i\,\delta_i$. سيموت السكان بشكل أسرع من نموذجنا.

وبالتالي ، فإن العشوائية الديموغرافية والبيئية تبطئ إلى حد ما انقراض السكان. (تيرارد وآخرون ، 2016 ، ص 211) يشير أيضًا إلى أن "العشوائية البيئية يمكن أن تنقذ السكان المتناقصين". من ناحية أخرى ، يشير (بريماك وآخرون ، 2012 ، ص 159) إلى أنه "بشكل عام ، فإن إدخال العشوائية البيئية في نمذجة الديناميكيات السكانية يؤدي ، من أجل الواقعية ، إلى معدلات النمو و أعداد أقل من السكان واحتمالات أعلى للانقراض ". يحدث العكس في نموذجنا.

## 7. الخاتمة

في الواقع ، لدينا عدم مساواة مماثل في حالة عمليات التفرع في وقت منفصل وبيئة عشوائية. لنفترض على سبيل المثال أن البيئات يتم اختيارها من عدد محدود من الحالات بشكل مستقل وموزع بشكل متماثل: $v_i > 0$ هو احتمال أن تكون البيئة في حالة $i$ في كل خطوة زمنية ولدينا $\sum_i v_i = 1$ . إذا كانت البيئة في الدولة $i$ ، يتم استبدال كل فرد بـ $n$ أفراد باحتمال $p_{n,i} \geq 0$ ، بحيث $\sum_{n\geq 0} p_{n,i} = 1$. نحن نفترض ذلك $m_i = \sum_{n\geq 1} n\, p_{n,i} < +\infty$. في الحالة دون الحرجة حيث $\sum_i v_i \log m_i < 0$ ، فإن المعدل الهندسي $\Omega$ للانخفاض في احتمال عدم الانقراض هو مثل ذلك

$$1 > \Omega = \min_{0\leq\alpha\leq 1}\Big(\sum_i v_i\, m_i^{\alpha}\Big) \geq \exp\Big(\sum_i v_i \log m_i\Big) = \prod_i m_i^{v_i} \tag{6}$$

(Guivarc'h and Liu، 2001، theorem 1). المصطلح الأخير على اليمين هو معدل النمو الهندسي (هنا من الانخفاض) للنموذج بدون العشوائية الديموغرافية

$$p(t+1) = m_{\theta_t}\, p(t).$$

$\theta_t$ هي حالة البيئة و $p(t)$ السكان في ذلك الوقت $t = 0, 1, 2 \ldots$ وهو أيضًا المعدل الهندسي لانخفاض احتمالية عدم الانقراض في عمليات التفرع في بيئة ثابتة (وبالتالي بدون العشوائية البيئية) في المتوسط $m = \prod_i m_i^{v_i}$.

في الحالة $m_i < 1\ \forall i$، مكتوب اللامساواة (6)

$$1 > \Omega = \sum_i v_i\, m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}\ .$$

هذا يترجم تقعر دالة اللوغاريتم: $\log(\sum_i v_i\, m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$.

إذا كان أكثر عمومية

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

يظهر عدم المساواة في (6) قليلاً كما هو الحال في القسم 6. نحدد

$$h(\alpha) = \log\left(\sum_i v_i\, m_i^{\alpha}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

لذلك تظهر بعض الحسابات ذلك

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i\, m_i^{\alpha} \log m_i}{\sum_i v_i\, m_i^{\alpha}}\ , \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i<j} v_i\, v_j\, m_i^{\alpha}\, m_j^{\alpha} (\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i\, m_i^{\alpha})^2}\ .$$

لقد فعلنا ذلك

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \geq 0$$

على الفاصل الزمني $[0, 1]$. $h(\alpha)$ هي بالتالي دالة محدبة فوق ظلها عند α = 0: $h(\alpha) \geq \alpha\, h'(0)$ و

$$\min\{h(\alpha);\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq h'(0).$$

اذا لدينا

$$\min\{e^{h(\alpha)};\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq e^{h'(0)}.$$

إنه عدم مساواة (6).

وبالتالي ، فإن الانقراض يكون أبطأ عندما يكون لدينا استوكاستك ديموغرافي وبيئي ، سواء كان النموذج في وقت منفصل أو في وقت مستمر.

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictionsbetween discrete and continuous models. Lett. Math. Phys. 37, 285–292.
- J.–D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. Écoscience 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.–E. Sؤther (2003) Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford University Press.
- K.B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W.C. Torrez (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J. Appl. Probab. 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed–Darraz (2014) On linear birth–and–death processes in a random environment, J. Math. Biol. 69, 73–90.
- J.C. D′Souza, B.M. Hambly (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment, Adv. Appl. Probab. 29, 38–55.
- Y. Guivarc′h, Q. Liu (2001) Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous–critiques dans un environnement aléatoi J. Math. Biol. , http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0 .
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi–stationary Distributions, Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) Écologie, Dunod, Paris.
- R.B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) Biologie de la conservation, Dunod, Paris.