Über die Geschwindigkeit des Aussterbens einer Bevölkerung in einer zufälligen Umgebung

C. R. Biol. **340 (2017) 259–263.**
http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002
hal: 01522889

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Mathematische und Computermodellierungseinheit komplexer Systeme
Les Cordeliers, Paris, Frankreich
nicolas.bacaer@ird.fr

Zusammenfassung

Wir sind an der Aussterberate einer Bevölkerung interessiert, die in einer zufälligen Umgebung lebt, die von einer Markov-Kette in kontinuierlicher Zeit beherrscht wird. Jeder Einzelne stirbt oder vermehrt sich mit einer Geschwindigkeit, die von der Umgebung abhängt. Bei der Fortpflanzung wird davon ausgegangen, dass die Anzahl der Nachkommen einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetz folgt, das auch von der Umgebung abhängt. In dem sogenannten unterkritischen Fall, in dem die Bevölkerung mit Sicherheit ausgelöscht ist, wird die Aussterberate explizit bestimmt. In gewisser Weise verlangsamt die Umweltstochastizität das Aussterben der Bevölkerung.

Schlüsselwörter: Bevölkerungsdynamik, demografische Stochastizität, Umweltstochastizität

1. Einleitung

Zahlreiche Modellstudien haben den Einfluss der demografischen und ökologischen Stochastizität auf die Dynamik einer Bevölkerung untersucht. Wie zum Beispiel erwähnt (Gaveau et al., 1996; Lebreton et al., 2007), funktioniert dies, wenn die Population als reelle Zahl behandelt wird und Diffusionsnäherungen verwendet werden (Lande et al., 2003) führen zu ungenauen Ergebnissen für die Aussterberate einer Bevölkerung, wenn diese Auslöschung sicher ist. Um die Bevölkerung in einer ganzen Zahl zu halten, untersuchten (Athreya und Karlin, 1971) die Prozesse der Verzweigung in diskreter Zeit mit einer stationären zufälligen Umgebung und zeigten, unter welchen Bedingungen das Aussterben der Bevölkerung sicher ist. Wie in einer konstanten Umgebung können wir drei Fälle unterscheiden: überkritisch, kritisch und unterkritisch. (Cogburn und Torrez, 1981; Bacaër und Ed-Darraz, 2014) untersuchten die Extinktionsbedingungen für analoge zeitkontinuierliche Modelle, dh für die Geburts- und Todesprozesse in einer zufälligen Umgebung. . Für den unterkritischen Fall mit diskreter Zeit und zufälliger Umgebung (D'Souza und Hambly, 1997; Guivarc'h und Liu, 2001) wurde unter anderem die Extinktionsrate berechnet, was zur Unterscheidung von zwei weiteren Untergebieten führt - Systeme, die als hoch und schwach unterkritisch eingestuft sind. In kontinuierlicher Zeit berechnete (Bacaër, 2017) die Geschwindigkeit des Aussterbens für einen linearen Prozess von Geburt und Tod in einer zufälligen markovschen Umgebung; Die Methode bestand darin, die Zeit zu diskretisieren, die auf den Fall von (D'Souza und Hambly, 1997) reduziert werden sollte. dann, um den Zeitschritt in Richtung 0 zu tendieren. Dieses Modell erlaubte jedoch nicht die gleichzeitige Geburt mehrerer Individuen. Das folgende Ziel besteht darin, diese Einschränkung aufzuheben, dh die „kontinuierlichen zeitlichen Verzweigungsprozesse“ (Méléard, 2016, §5.4) in einer zufälligen Umgebung zu untersuchen, um die Geschwindigkeit von zu berechnen entsprechende Auslöschung und beobachten, dass diese Geschwindigkeit niedriger (in absoluten Wert) ist als die, die man erwartet haben könnte.

In Abschnitt 2 präsentieren wir unser Modell mit einer Umgebung, die in kontinuierlicher Zeit zwischen *K*- Zuständen gemäß einer Markov-Kette oszilliert . In Abschnitt 3 berechnen wir die Wachstumsrate δ_i (positiv oder negativ) der Bevölkerung in der Umwelt i und der durchschnittliche Anteil u_i der Zeit verbringt die Umwelt im Zustand i . Wir zeigen in Abschnitt 4, dass die Bevölkerung mit Sicherheit aussterben wird, wenn die durchschnittliche Wachstumsrate negativ ist, d. H. Wenn $\sum_i u_i\,\delta_i \le 0$. Dann zeigen wir in Abschnitt 5, dass im unterkritischen Fall wo $\sum_i u_i\,\delta_i < 0$, die Extinktionsgeschwindigkeit ω der Bevölkerung, definiert durch die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit des Nichtsterbens abnimmt als $e^{\omega t}$ mit $\omega < 0$ist durch die Formel gegeben

$$\omega = \min_{0\le\alpha\le 1} s(Q+\alpha\,\Delta),$$

und

- Q ist die Matrix, die die zufälligen Übergänge der Umgebung beschreibt;
- Δ ist die Diagonalmatrix mit den Wachstumsraten $(\delta_i)_{1\le i\le K}$ auf der Diagonale;
- $s(Q+\alpha\,\Delta)$ bezeichnet die spektrale Grenze, dh den Eigenwert des größten Realteils der Matrix $Q+\alpha\,\Delta$.

Es ist eine Verallgemeinerung der in (Bacaër, 2017) erhaltenen Formel für die linearen Prozesse von Geburt und Tod, die gleichzeitige Geburten nicht berücksichtigen. Wir zeigen in Abschnitt 6, dass

$$\sum_i u_i\,\delta_i \le \omega < 0$$

und dass die erste Ungleichung streng ist, wenn die δ_i sind nicht alle gleich. Die Extinktionsrate ist niedriger (in absoluten Werten) als die durchschnittliche Wachstumsrate. Wir können daher sagen, dass die Umweltstochastizität in gewisser Weise das Aussterben der Bevölkerung in unserem Modell verlangsamt. Zusammenfassend stellen wir fest, dass eine ähnliche Ungleichung für die Verzweigungsprozesse in diskreter Zeit mit einer zufälligen Umgebung gilt: Sie ist bereits implizit in (Guivarc'h und Liu, 2001).

2. Das Modell

Wir nehmen an, dass die Umgebung zufällig zwischen *K* Zuständen gemäß einer Markov-Kette in kontinuierlicher Zeit schwingt . Mit anderen Worten, es gibt Zahlen $Q_{i,j} \ge 0$ so dass, wenn sich die Umgebung im Zustand j befindet, eine Wahrscheinlichkeit besteht $Q_{i,j}\,dt$ dass die Umgebung in den Zustand i für wechselt$i \ne j$ während jedes infinitesimalen Zeitintervalls dt. Wir definieren $Q = (Q_{i,j})$ die quadratische Matrix mit den diagonalen Termen $Q_{j,j} = -\sum_{i\ne j} Q_{i,j}$. Es wird ferner angenommen, dass die Matrix *Q nicht* reduzierbar ist, was bedeutet, dass in dem Diagramm, das an *K* Eckpunkten mit einer Kante von *j* bis *i ausgerichtet ist* ($i \ne j$) wenn $Q_{i,j} > 0$zwei Spitzen i_1 und i_2 kann immer über einen Weg erreicht werden i_1 gegenüber i_2 und ein Weg von i_2 gegenüber i_1. Es existiert dann ein einzelner Vektor u mit

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Séricola, 2013, S. 152). Die Komponente u_i stellt den durchschnittlichen Zeitanteil dar, den die Umgebung im Zustand *i* verbringt .

Stellen Sie sich eine Population von Personen vor, die asexuell oder weiblich sind und in dieser Umgebung unabhängig voneinander sterben und sich fortpflanzen. Wenn sich die Umgebung im Zustand *i befindet* , nehmen wir an, dass während jedes infinitesimalen Zeitintervalls dt,

- Jedes Individuum reproduziert mit einer Wahrscheinlichkeit $a_i\, dt$ mit $a_i > 0$.
- Jeder Einzelne stirbt mit einer Wahrscheinlichkeit $b_i\, dt$ mit $b_i > 0$.

Wenn sich das Individuum fortpflanzt, nehmen wir an, dass es *n* Individuen zur Welt bringt ($n = 0, 1, 2 \ldots$) mit Wahrscheinlichkeit $q_{n,i}$mit $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1\ \forall i$.

Eine andere Möglichkeit, dies zu sehen, besteht darin, zu sagen, dass in der Umgebung *i* jeder Einzelne ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit erlebt $c_i\, dt$ mit $c_i = a_i + b_i$ während jedes infinitesimalen Zeitintervalls dt. Wenn das Ereignis eintritt, wird die Person mit einer Wahrscheinlichkeit durch 0 Person ersetzt $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$ und von *n* Personen ($n \geq 1$) mit Wahrscheinlichkeit $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}\, q_{n-1,i}$. Wir haben also $\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1\ \forall i$. Es ist daher eine Verallgemeinerung des Prozesses von (Méléard, 2016, §5.4) im Fall einer zufälligen Umgebung. Es wird weiterhin angenommen, dass

$$m_i = \sum_{n\geq 1} n\, p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

Wir definieren

$$\delta_i = c_i(m_i - 1)$$

und Δ, die Diagonalmatrix mit $(\delta_i)_{1\leq i\leq K}$ auf der Diagonale.

3. Wachstumsraten δ_i

In diesem Modell ist die Wahrscheinlichkeit $\pi_{n,i}(t)$ eine Bevölkerung der Größe *n haben* ($n = 0, 1, 2, \ldots$) in der Umwelt *i* ($1 \leq i \leq K$) zum Zeitpunkt *t* ist die Lösung des Systems

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n\, c_i\, \pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k\, p_{n+1-k,i}\, \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\, \pi_{n,j}(t)\,. \tag{1}$$

In der Tat nehmen wir zum Beispiel an, dass es zum Zeitpunkt *t n* Individuen in der Umgebung *i gibt* . Ein Ereignis tritt während des infinitesimalen Zeitintervalls auf $(t, t + dt)$ und ändert die Anzahl der Personen mit einer Wahrscheinlichkeit in der Größenordnung von $n\, c_i\, dt$. Außerdem können wir zum Zeitpunkt *t* + *dt n* Individuen haben, wenn ausgehend von *k* Individuen (*1* ≤ *k* ≤ *n* + *1*) zum Zeitpunkt *t* eines von ihnen ein Ereignis durchläuft (Wahrscheinlichkeit $c_i\, k\, dt$) und wird durch *n* + *1*-*k* neue Individuen ersetzt (Wahrscheinlichkeit $p_{n+1-k,i}$), weil $k - 1 + (n + 1 - k) = n$. Schließlich können wir am Ende mit *n* Personen in Umgebung *i* zum Zeitpunkt *t* + *dt* , wenn wir hatten *n* Personen in Umgebung *j* zum Zeitpunkt *t* und wenn die Umgebung wird von Zustand geschaltet *j* im Zustand *i* (Wahrscheinlichkeit $Q_{i,j}\, dt$). Mit Parametern a_i, b_i und $q_{n,i}$ist das System auch geschrieben

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -\, n\,(a_i + b_i)\, \pi_{n,i}(t) + (n+1) b_i\, \pi_{n+1,i}(t) + a_i \sum_{k=1}^{n} k\, q_{n-k,i}\, \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\, \pi_{n,j}(t)\,.$$

Wir nehmen als Ausgangsbedingung n_0 Menschen ($n_0 \geq 1$) in der Umwelt i_0, damit $\pi_{n_0,i_0}(0) = 1$ und $\pi_{n,i}(0) = 0$ wenn $(n, i) \neq (n_0, i_0)$. Wie es für Wahrscheinlichkeiten sein sollte, haben wir dann $\pi_{n,i}(t) \geq 0$ und

$$\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) = 1, \quad \forall t > 0.$$

Wir definieren $\pi = (\pi_{0,1}, \ldots, \pi_{0,K}, \ldots, \pi_{n,1}, \ldots, \pi_{n,K}, \ldots)$. Wir sehen das $\frac{d\pi}{dt} = M\pi(t)$. M ist eine unendliche Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|cccc} Q & CP_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & Q - C + CP_1 & 2CP_0 & 0 & \cdots \\ 0 & CP_2 & Q - 2C + 2CP_1 & 3CP_0 & \cdots \\ 0 & CP_3 & 2CP_2 & Q - 3C + 3CP_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

C ist die diagonale Matrix $(c_i)_{1\leq i\leq K}$ und P_n die diagonale Matrix $(p_{n,i})_{1\leq i\leq K}$. Im speziellen Fall von linearen Geburts- und Todesprozessen nur die Matrizen P_0 und P_2 sind ungleich Null: die Matrix M ist dann tridiagonal durch Blöcke.

Lassen Sie uns die Generierungsfunktionen vorstellen

$$g_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i}\, x^n\,, \quad f_i(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t)\, x^n\,.$$

Wir notieren das

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \pi_{n,i}(t)\, x^n = x\, \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x)$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} k\, p_{n+1-k,i}\, \pi_{k,i}(t)\, x^n = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \pi_{k,i}(t) \sum_{n=k-1}^{\infty} p_{n+1-k,i}\, x^n$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, \pi_{k,i}(t)\, x^{k-1} g_i(x) = g_i(x)\, \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)\,.$$

Wir leiten daher aus (1) das System der partiellen Differentialgleichungen ab

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x)-x)\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j}\, f_j(t,x)\,. \tag{2}$$

Im besonderen Fall der linearen Prozesse von Geburt und Tod haben wir $g_i(x) = p_{0,i} + p_{2,i}\, x^2$ und $c_i(g_i(x)-x) = (x-1)(a_i\, x - b_i)$.

Beachten Sie, dass die Erwartung der Bevölkerung

$$e_i(t) = \sum_n n\, \pi_{n,i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,1)$$

ist eine Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, die erhalten wird, indem das System (2) in Bezug auf *x abgeleitet wird* , indem *x = 1 genommen wird* und dies notiert wird $g_i(1) = 1$ ::

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i\, e_i(t) + \sum_j Q_{i,j}\, e_j(t)\,. \tag{3}$$

Wenn wir in der Umgebung *i* bleiben , ist die Bevölkerungserwartung zum Zeitpunkt *t* daher $e^{\delta_i t}$ wenn wir zum Zeitpunkt *t = 0* von einer einzelnen Person ausgehen .

Das System (3) beinhaltet die Matrix $Q + \Delta$. Wir werden jedoch in Abschnitt 5 sehen, dass die Rate des Aussterbens der Bevölkerung nicht immer durch den Eigenwert gegeben ist $s(Q+\Delta)$.

4. Aussterben der Bevölkerung

Schauen wir uns an, unter welchen Bedingungen das Modell zum sicheren Aussterben der Bevölkerung führt. Betrachten Sie dazu die Markov-Kette in diskreter Zeit, wobei jeder Zeitschritt die Dauer zwischen zwei Sprüngen in der Umgebung ist. Diese Kette hat für den Raum der Staaten $\{1,2,\ldots,K\} \times [0,+\infty[$. Die erste Komponente *i* repräsentiert die Umwelt. Die zweite Komponente *t* repräsentiert die Zeit vor dem Wechsel in eine andere Umgebung. Also anstatt zu sagen, dass die Umwelt im Zustand ist i_0 für eine Zeit t_0 dann im Zustand i_1 für eine Zeit t_1Wir haben den Übergang $(i_0,t_0) \to (i_1,t_1)$, usw. Wir haben bereits in (Bacaër und Ed-Darraz, 2014, §2.1) gesehen, dass, wenn wir definieren

$$Q_i = -Q_{i,i} \quad \forall i,$$

dann ist die stationäre Verteilung dieser Markov-Kette

$$w_{i,t} = \frac{Q_i\, u_i}{\sum_j Q_j\, u_j}\, Q_i\, e^{-Q_i t}\,.$$

Wir können daher die Ergebnisse von (Athreya und Karlin, 1971) anwenden, die sich auf Verzweigungsprozesse in einer Markov-Umgebung beziehen: Die Bevölkerung wird mit ziemlicher Sicherheit genau dann aussterben, wenn

$$\sum_i \int_0^{\infty} w_{i,t} \log(e^{\delta_i t})\, dt \le 0\,,$$

was gibt, weil $\int_0^{\infty} t\, e^{-Q_i\, t} dt = (1/Q_i)^2$, die Bedingung

$$\sum_i u_i\, \delta_i \le 0.$$

weil $\delta_i = c_i(m_i - 1)$Dies kann auch in der Form geschrieben werden $\sum_i \theta_i\, m_i \le 1$mit $\theta_i = c_i u_i / (\sum_j c_j u_j)$. Mit anderen Worten, die "durchschnittliche" Anzahl der erzeugten Nachkommen beträgt weniger als 1, wobei die Gewichte für jede Umgebung durch die angegeben werden θ_i.

5. Die Extinktionsgeschwindigkeit

Wir interessieren uns jetzt für den unterkritischen Fall, in dem $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$. In diesem Fall,

$$\pi_{0,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_i, \quad \pi_{n,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall n \ge 1.$$

Wir versuchen, die Rate des Aussterbens der Bevölkerung zu bestimmen:

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}(t)\,, \quad n \ge 1,\ 1 \le i \le K.$$

Diese Grenze existiert und hängt nicht von *n* (vorausgesetzt, *n ≥ 1*), *i* oder den Anfangsbedingungen ab (n_0, i_0) (Collet et al., 2013, Abschnitt 4.5). Mit unserer Notation haben wir $\omega < 0$ und die Wahrscheinlichkeit des Nichtsterbens $1 - \sum_i \pi_{0,i}(t) = \sum_i \sum_{n\ge1} \pi_{n,i}(t)$ nimmt auch exponentiell gegen 0 mit der Rate ω ab.

Wie in (Bacaër, 2017, §2.1) verwendet die Berechnung von ω eine Diskretisierung der Zeit, eine Formel von (D'Souza und Hambly, 1997) für die Geschwindigkeit des Aussterbens von Verzweigungsprozessen in diskreter Zeit mit einer markovschen Umgebung und eine Passage bis zur Grenze, die den Zeitschritt in Richtung 0 tendiert.

Lassen Sie uns also die Zeit mit einem kleinen regulären Zeitschritt diskretisieren $\tau > 0$. Stellen Sie sich vor, dass die Umgebung in jedem kleinen Zeitschritt konstant bleibt und dass die Übergänge der Markov-Kette in diskreter Zeit über den Zustandsraum folgen $\{1,2,\ldots,K\}$ mit der Übergangsmatrix

$e^{\tau Q^\mathsf{T}}$. Q^Tist die transponierte Matrix der Matrix Q . Die zeitkontinuierliche Markov-Kette, die die Umgebung in unserem Modell beschreibt, ist die Grenze des oben beschriebenen Prozesses, wenn $\tau \to 0$.

Während jedes kleinen Zeitintervalls der Länge τ, in dem sich die Umgebung im Zustand befindet iWir gehen davon aus, dass die Population den Prozess in kontinuierlicher Zeit und konstanter Umgebung mit den Parametern verfolgt c_i und $(p_{n,i})$ ab Abschnitt 2. Hinweis $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t)$ die Wahrscheinlichkeit einer großen Bevölkerung n in der Umwelt i zum Zeitpunkt t in diesem modifizierten Modell mit einer konstanten Umgebung in jedem Zeitintervall der Länge τ. Wir haben $\forall t > 0, \forall n \geq 0, \forall i\ (1 \leq i \leq K), \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) \to \pi_{n,i}(t)$ wenn $\tau \to 0$.

Wenn die Grenzumkehr legitim ist,

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) = \lim_{\tau\to 0} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) := \lim_{\tau\to 0} \omega^{[\tau]},$$

Wir werden auf die Berechnung der Extinktionsgeschwindigkeit eines Verzweigungsprozesses in diskreter Zeit in einer Markovschen Umgebung zurückgeführt, weil (mit *N* Ganzzahl)

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log\left(\lim_{N\to+\infty} [\pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau)\,.$$

Die Bevölkerungserwartung steigt oder sinkt um einen Faktor $e^{\delta_i \tau}$während eines Zeitschritts τ, in dem die Umgebung im Zustand *i* blockiert ist . Beachten Sie, dass u^T ist die stationäre Verteilung der Kette, weil $Qu = 0$ gegeben $u^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} = 0$ und $u^\mathsf{T} e^{\tau Q^\mathsf{T}} = u^\mathsf{T}(I + \tau Q^\mathsf{T} + \frac{1}{2}(\tau Q^\mathsf{T})^2 + \cdots) = u^\mathsf{T}$. Diese Kette ist laut (Athreya und Karlin, 1971) immer unterkritisch, weil

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0\,.$$

So zeigen (D'Souza und Hambly, 1997) und (Bacaër, 2017, §2.1), dass die geometrische Rate des Aussterbens der Bevölkerung gegeben ist durch

$$\Omega(\tau) = \min_{0\leq\alpha\leq 1} \rho(e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha\tau\Delta})\,.$$

$\rho(\cdot)$ bezeichnet den Spektralradius einer Matrix. Der Wert von *τ sei* die Umkehrung einer ganzen Zahl. Wir haben

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log[\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0\leq\alpha\leq 1} \rho([e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha\tau\Delta}]^{1/\tau}).$$

Die Matrix $[e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha\tau\Delta}]^{1/\tau}$ konvergiert zu $e^{Q^\mathsf{T}+\alpha\Delta}$ wenn $\tau \to 0$ (sogenannte Lie-Trotter-Kato-Formel). Wir schließen wie in (Bacaër, 2017, §2.1), dass die exponentielle Geschwindigkeit des Aussterbens in kontinuierlicher Zeit ist

$$\omega = \lim_{\tau\to 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0\leq\alpha\leq 1} s(Q + \alpha\Delta)\,. \tag{4}$$

$s(Q + \alpha\Delta)$ ist die spektrale Grenze der Matrix $Q + \alpha\Delta$. Somit ändert sich nur der Ausdruck der Diagonalmatrix Δ im Vergleich zu (Bacaër, 2017).

Denken Sie daran, dass alle Elemente außerhalb der Diagonale der Matrix $Q + \alpha\Delta$ sind ≥ 0. In diesem Fall ist die Spektralgrenze $s(Q + \alpha\Delta)$ ist ein reeller Eigenwert dieser Matrix. Es ist der Eigenwert mit dem größten Realteil.

Die Formel (4) für ω ist eine Verallgemeinerung derjenigen, die bei linearen Prozessen von Geburt und Tod erhalten wurde (Bacaër, 2017). Für diese bringt jedes Individuum mit einer Wahrscheinlichkeit ein einzelnes neues Individuum zur Welt (bei Bakterien teilt sich jedes in zwei) $a_i\, dt$ und stirbt mit Wahrscheinlichkeit $b_i\, dt$ während jedes infinitesimalen Zeitintervalls dt in der Umwelt i. Dies entspricht $q_{1,i} = 1$ und $q_{n,i} = 0$ wenn $n \neq 1$. Wir haben dann $c_i = a_i + b_i$, $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$, $p_{2,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}$, $p_{n,i} = 0$ wenn $n = 1$ oder $n > 2$, und $\delta_i = a_i - b_i$.

Intuitiv ist die Formel für die Extinktionsgeschwindigkeit ω mit der Tatsache verbunden, dass wir nach einer Lösung suchen $f_i(t, x)$ des Systems (2), das sich wie verhält $e^{\omega t}(1 - x)^\alpha \phi_i$ in der Nachbarschaft von $x = 1$ mit $x < 1$Wir bekommen die Gleichung

$$\omega\, \phi_i = \alpha\, \delta_i\, \phi_i + \sum_j Q_{i,j}\, \phi_j,$$

was darauf hindeutet, dass ω ein Eigenwert der Matrix ist $Q + \alpha\,\Delta$. Dies macht es jedoch nicht möglich zu verstehen, welcher Wert von α geeignet ist. Wie wir gesehen haben, ist dies derjenige, der minimiert $s(Q + \alpha\Delta)$ mit $\alpha \in [0, 1]$.

6. Ungleichheit

(Bacaër, 2017, §2.2) hatte dies bereits beobachtet

- $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ ist eine Funktion gleich $s(Q) = 0$ wenn α = 0
- Diese Funktion ist konvex, wenn Δ eine Diagonalmatrix ist
- Diese Funktion ist sogar streng konvex, wenn die δ_i sind nicht alle gleich.

Darüber hinaus ist seine Ableitung in $\alpha = 0$ war genau $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$. $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ ist daher eine Funktion über ihrer Tangente bei α = 0. Wir haben also

$$\alpha \sum_i u_i\, \delta_i \leq s(Q + \alpha\Delta) \quad \forall\alpha.$$

Wir haben daher für die Minima dieser Funktionen über das Intervall $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_i u_i\, \delta_i \leq \omega < 0 \tag{5}$$

mit strikter Ungleichung in der ersten Ungleichung, wenn die δ_i sind nicht alle gleich.

Betrachten Sie als numerisches Beispiel beispielsweise den Fall zweier Umgebungen mit $Q_{1,2} = Q_{2,1} = 1$, damit $u_1 = u_2 = 1/2$: Die Umwelt verbringt in jedem dieser Staaten durchschnittlich die Hälfte der Zeit. Wenn die Wachstumsraten in beiden Umgebungen sind $\delta_1 = -1$ und $\delta_2 = -2$, dann die Funktion

$\alpha \mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ nimmt daher ab $\omega = s(Q+\Delta) \simeq -1{,}38$während $\sum_i u_i\,\delta_i = -1{,}5$.

Die Ungleichung (5) kann wie folgt interpretiert werden. Das Bevölkerungsmodell ohne demografische Stochastizität, aber mit einer Umweltstochastizität, die unserem Modell am nächsten kommt, ist zweifellos dasjenige, in dem die Bevölkerung lebt $p(t)$zum Zeitpunkt *t* gehorcht *t* der Gleichung $\frac{dp}{dt} = \delta_{\theta(t)}\,p(t)$, wo die Zufallsfunktion $\theta(t)$ ist mit Werten in $\{1,2,\dots,K\}$ und repräsentiert die Entwicklung der Umwelt. Wir haben

$$p(t) = p(0)\exp(\int_0^t \delta_{\theta(z)}\,dz).$$

Der ergodische Satz stellt sicher, dass mit ziemlicher Sicherheit

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\theta(z)}\,dz \to \sum_i u_i\,\delta_i, \quad t\to+\infty.$$

Also haben wir

$$\frac{1}{t}\log p(t) \to \sum_i u_i\,\delta_i, \quad t\to+\infty.$$

$\sum_i u_i\,\delta_i$ ist daher die Extinktionsrate des Modells ohne demografische Stochastizität, auch wenn $p(t)$ bricht nie ab. Die Bevölkerung wird schneller aussterben als in unserem Modell.

Umgekehrt ist das Bevölkerungsmodell mit demografischer Stochastizität, aber ohne Umweltstochastizität, das unserem Modell am nächsten kommt, zweifellos der Prozess der kontinuierlichen Zeitverbindung (Méléard, 2016, §5.4) mit einer durchschnittlichen Wachstumsrate (oder eher Aussterben). $\delta = \sum_i u_i\,\delta_i$. Die Bevölkerung wird schneller aussterben als in unserem Modell.

Demografische und ökologische Stochastizität verlangsamt somit in gewissem Sinne das Aussterben der Bevölkerung. (Tirard et al., 2016, S. 211) stellt außerdem fest, dass "Umweltstochastizität rückläufige Populationen retten kann". Andererseits (Primack et al., 2012, S. 159) stellt fest, dass „im Allgemeinen die Einführung der Umweltstochastizität bei der Modellierung der Bevölkerungsdynamik aus Gründen des Realismus zu Wachstumsraten und Wachstumsraten führt geringere Bevölkerungszahl und höhere Wahrscheinlichkeit des Aussterbens “. Das Gegenteil tritt in unserem Modell auf.

7. Fazit

Tatsächlich haben wir eine ähnliche Ungleichung bei Verzweigungsprozessen in zeitdiskreter und zufälliger Umgebung. Angenommen, die Umgebungen werden aus einer endlichen Anzahl von Zuständen unabhängig und identisch verteilt ausgewählt: $v_i > 0$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Umgebung zu jedem Zeitschritt im Zustand *i befindet* und wir haben $\sum_i v_i = 1$. Wenn sich die Umgebung im Zustand befindet $i$wird jedes Individuum mit einer Wahrscheinlichkeit durch *n* Individuen ersetzt $p_{n,i} \geq 0$, damit $\sum_{n\geq 0} p_{n,i} = 1$. Wir nehmen das an $m_i = \sum_{n\geq 1} n\,p_{n,i} < +\infty$. Im unterkritischen Fall wo $\sum_i v_i \log m_i < 0$ist die geometrische Rate Ω der Abnahme der Wahrscheinlichkeit der Nichtauslöschung derart, dass

$$1 > \Omega = \min_{0\leq\alpha\leq 1}\Big(\sum_i v_i\,m_i^\alpha\Big) \geq \exp\Big(\sum_i v_i \log m_i\Big) = \prod_i m_i^{v_i} \tag{6}$$

(Guivarc'h und Liu, 2001, Satz 1). Der letzte Term rechts ist die geometrische Wachstumsrate (hier der Abnahme) des Modells ohne demografische Stochastizität

$$p(t+1) = m_{\theta_t}\,p(t).$$

θ_t ist der Zustand der Umwelt und $p(t)$ die Bevölkerung zu der Zeit $t = 0,1,2\dots$ Es ist auch die geometrische Abnahmerate der Wahrscheinlichkeit der Nichtauslöschung in den Verzweigungsprozessen in konstanter Umgebung (daher ohne Umweltstochastizität) im Durchschnitt $m = \prod_i m_i^{v_i}$.

Im Falle $m_i < 1\ \forall i$wird die Ungleichung (6) geschrieben

$$1 > \Omega = \sum_i v_i\,m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}\ .$$

Dies übersetzt die Konkavität der Logarithmusfunktion: $\log(\sum_i v_i\,m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$.

Wenn allgemeiner

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

Die Ungleichung in (6) wird ein wenig wie in Abschnitt 6 gezeigt. Wir definieren

$$h(\alpha) = \log\left(\sum_i v_i\,m_i^\alpha\right), \quad 0\leq\alpha\leq 1.$$

Einige Berechnungen zeigen das also

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i\,m_i^\alpha \log m_i}{\sum_i v_i\,m_i^\alpha}\,, \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i<j} v_i\,v_j\,m_i^\alpha\,m_j^\alpha(\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i\,m_i^\alpha)^2}\ .$$

Wir haben also

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \geq 0$$

auf das Intervall $[0,1]$. $h(\alpha)$ ist daher eine konvexe Funktion über ihrer Tangente bei α = 0: $h(\alpha) \geq \alpha\,h'(0)$ und

$$\min\{h(\alpha);\ 0\leq\alpha\leq 1\} \geq h'(0).$$

Also haben wir

$$\min\{e^{h(\alpha)};\, 0 \le \alpha \le 1\} \ge e^{h'(0)}.$$

Es ist Ungleichung (6).

Folglich ist die Auslöschung langsamer, wenn wir sowohl eine demografische als auch eine umweltbedingte Stochastizität haben, unabhängig davon, ob sich das Modell in diskreter Zeit oder in kontinuierlicher Zeit befindet.

Literaturhinweise

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictionsbetween discrete and continuous models. Lett. Math. Phys. 37, 285–292.
- J.–D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. Écoscience 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.–E. Sæther (2003) Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford University Press.
- K.B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W.C. Torrez (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J. Appl. Probab. 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed–Darraz (2014) On linear birth–and–death processes in a random environment, J. Math. Biol. 69, 73–90.
- J.C. D′Souza, B.M. Hambly (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment, Adv. Appl. Probab. 29, 38–55.
- Y. Guivarc′h, Q. Liu (2001) Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous–critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. , http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0 .
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi–stationary Distributions, Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) Écologie, Dunod, Paris.
- R.B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) Biologie de la conservation, Dunod, Paris.