ランダムな環境における人口の絶滅の速度について

C. R. Biol. **340（2017）259−263.**
http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002
hal：01522889

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリングユニット
Les Cordeliers、パリ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

概要

マルコフ連鎖によって支配されるランダムな環境に住む人口が絶えず絶滅する速度に関心があります。一人一人が死ぬか、環境に依存する速度で繁殖します。繁殖中、子孫の数は、環境にも依存する特定の確率法則に従うと想定されます。人口が確実に消滅する、いわゆる亜臨界の場合、絶滅率は明確に決定されます。ある意味で、環境の確率論は人口の絶滅を遅らせます。

キーワード：人口動態、人口統計的確率、環境確率

1.はじめに

多数のモデリング研究が、人口動態と環境の確率が人口のダイナミクスに及ぼす影響を研究しています。たとえば（Gaveau et al。、1996; Lebreton et al。、2007）のように、母集団を実数として扱い、拡散近似を使用する（Lande et al。、2003）この絶滅が確実な場合、人口の絶滅率の結果が不正確になります。人口を整数に保つために（Athreya and Karlin、1971）は、定常ランダム環境で離散時間に分岐するプロセスを研究し、どの条件下で人口の絶滅が確実であるかを示しました。定常環境と同様に、3つのケースを区別できます。超臨界、クリティカルおよびサブクリティカル。（Cogburn and Torrez、1981;Bacaërand Ed-Darraz、2014）は、類似したモデルの絶滅状態を連続時間で調べました。つまり、ランダムな環境での誕生と死のプロセスについてです。 。離散時間とランダムな環境の亜臨界の場合（D'Souza and Hambly、1997; Guivarc'h and Liu、2001）は、絶滅率を計算しました。これにより、さらに2つのサブ-スキームが高度および弱く重要でないと認定された。（Bacaër、2017）は、ランダムマルコフ環境における出生と死亡の線形プロセスの絶滅率を連続時間で計算しました。この方法は、（D'Souza and Hambly、1997）の場合に短縮される時間を離散化することで構成されていました。次に、タイムステップを0に近づけるようにします。ただし、このモデルでは、複数の個体を同時に誕生させることはできませんでした。以下の目的は、この制限を解除することです。つまり、ランダム環境で「連続時間分岐プロセス」（Méléard、2016年、§5.4）を研究して、速度を計算することです対応する絶滅と、この速度が（絶対値で）予想よりも遅いことに注意してください。

セクション2では、マルコフ連鎖に従って連続時間でK状態間で振動する環境をモデルに示します。セクション3では、成長率を計算します δ_i 環境内の人口の（正または負） i そして平均比率 u_i 環境が状態iで費やす時間の 。セクション4で、平均成長率が負の場合、つまり $\sum_i u_i\,\delta_i \leq 0$。次に、セクション5で、未臨界のケースで $\sum_i u_i\,\delta_i < 0$、消滅速度 ω 非絶滅の確率が次のように減少するという事実によって定義される人口の $e^{\omega t}$ と $\omega < 0$、式で与えられます

$$\omega = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha\,\Delta),$$

そして

- Q 環境のランダムな遷移を記述する行列です。
- Δ 成長率の対角行列です $(\delta_i)_{1 \leq i \leq K}$ 対角線上;
- $s(Q + \alpha\,\Delta)$ マトリックスのスペクトル境界、つまり最大実部の固有値を示します $Q + \alpha\,\Delta$。

（Bacaër、2017）で得られた、同時出産を考慮しない出生と死亡の線形プロセスの式を一般化したものです。セクション6でそれを示します

$$\sum_i u_i\,\delta_i \leq \omega < 0$$

そして、最初の不等式は、 δ_i すべてが同じというわけではありません。絶滅率は平均成長率よりも（絶対値で）低くなります。したがって、私たちのモデルでは、特定の方法で、環境確率論が人口の絶滅を遅らせると言えます。結論として、ランダムな環境での離散時間での分岐プロセスにも同様の不等式が適用されることに注意してください。これは、（Guivarc'h and Liu、2001）ですでに暗黙的です。

2.モデル

環境は、連続時間のマルコフ連鎖に従って、K状態間でランダムに振動すると仮定します。つまり、数字があります $Q_{i,j} \geq 0$ 環境が状態 jの場合、確率がある $Q_{i,j}\,dt$ 環境が状態iに切り替わる $i \neq j$ 各微小時間間隔の間 dt。私たちは定義します $Q = (Q_{i,j})$ 対角項を持つ正方行列 $Q_{j,j} = -\sum_{i \neq j} Q_{i,j}$。さらに、行列$Q$は既約であると仮定されます。つまり、グラフでは、$j$から$i$への エッジを持つ$K$頂点に向けられています（$i \neq j$）もし $Q_{i,j} > 0$、2つのピーク i_1 そして i_2 常にパスで到達可能 i_1 に向かって i_2 とのパス i_2 に向かって i_1。次に、単一のベクトルuが存在 します。

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

（セリコラ、2013、p。152）。コンポーネント u_i 環境が状態iで費やす時間の平均比率を表し ます。

この環境で互いに独立して死亡し、生殖する無性または女性の個体群を考えてみましょう。環境が状態iである場合、 各微小時間間隔中に dt、

- 各個体は確率で繁殖します $a_i\,dt$ と $a_i > 0$。
- 一人一人が確率で死ぬ $b_i\,dt$ と $b_i > 0$。

個体が生殖する場合、彼がn個体を出産したと仮定します（$n = 0, 1, 2 \ldots$）確率あり $q_{n,i}$、$\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1\ \forall i$。

これを確認する別の方法は、環境iで、各個人が確率でイベントを経験すると言うことです $c_i\,dt$ と $c_i = a_i + b_i$ 各微小時間間隔の間 dt。イベントが発生した場合、個体は確率で0個体に置き換えられます $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i+b_i}$ そして、n人の個人（$n \geq 1$）確率あり $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i+b_i}\,q_{n-1,i}$。このように $\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1\ \forall i$ 。したがって、ランダムな環境の場合の（Méléard、2016、§5.4）のプロセスの一般化です。さらに、

$$m_i = \sum_{n\geq 1} n\,p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

私たちは定義します

$$\delta_i = c_i(m_i - 1)$$

そして Δ、対角行列 $(\delta_i)_{1\leq i\leq K}$ 対角線上。

3.成長率 δ_i

このモデルでは、確率 $\pi_{n,i}(t)$ サイズnの母集団を持つ （$n = 0, 1, 2, \ldots$）環境 i（$1 \leq i \leq K$）時間tはシステムの解です

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n\,c_i\,\pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k\,p_{n+1-k,i}\,\pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\,\pi_{n,j}(t)\,. \tag{1}$$

実際、例えば、環境iに時間tでn人の個人 がいると仮定します 。微小な時間間隔中にイベントが発生しました $(t, t + dt)$ の確率で個体数を変更する $n\,c_i\,dt$。加えて、我々は、で終わることができるN時点で個体$T + DT$から出発して、場合にk個の個体（$1 \leq K \leq N + 1$時間で） T、それらのイベントを受けます（確率 $c_i\,k\,dt$）そして、$n + 1$-kの新しい個人（確率 $p_{n+1-k,i}$）、なぜなら $k - 1 + (n + 1 - k) = n$。最後に、我々は、で終わることができ、N環境における個人 私の時間で$T + dt$の私たちが持っていた場合にはn個の環境で個人jは、時間の トンと環境は、状態から切り替わった場合には J状態 i（確率 $Q_{i,j}\,dt$）。パラメータあり a_i、 b_i そして $q_{n,i}$、システムも書かれています

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -\,n\,(a_i + b_i)\,\pi_{n,i}(t) + (n+1)b_i\,\pi_{n+1,i}(t) + a_i \sum_{k=1}^{n} k\,q_{n-k,i}\,\pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\,\pi_{n,j}(t)\,.$$

初期状態とする n_0 人 （$n_0 \geq 1$）環境中 i_0、 そのため $\pi_{n_0,i_0}(0) = 1$ そして $\pi_{n,i}(0) = 0$ もし $(n, i) \neq (n_0, i_0)$。それは確率のためであるべきであるので、次に $\pi_{n,i}(t) \geq 0$ そして

$$\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) = 1, \quad \forall t > 0.$$

私たちは定義します $\pi = (\pi_{0,1}, \ldots, \pi_{0,K}, \ldots, \pi_{n,1}, \ldots, \pi_{n,K}, \ldots)$。私たちはそれを見る $\frac{d\pi}{dt} = M\pi(t)$。$M$ 次の形式の無限行列です

$$\left(\begin{array}{c|cccc} Q & CP_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & Q-C+CP_1 & 2CP_0 & 0 & \cdots \\ 0 & CP_2 & Q-2C+2CP_1 & 3CP_0 & \cdots \\ 0 & CP_3 & 2CP_2 & Q-3C+3CP_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

C 対角行列です $(c_i)_{1\le i\le K}$ そして P_n 対角行列 $(p_{n,i})_{1\le i\le K}$。線形の誕生と死のプロセスの特定のケースでは、行列のみ P_0 そして P_2 ゼロ以外：行列 M 次に、ブロックごとに三重対角になります。

生成関数を紹介しましょう

$$g_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i}\,x^n\,,\quad f_i(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{n,i}(t)\,x^n\,.$$

私たちはそれに注意します

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\pi_{n,i}(t)\,x^n = x\,\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)$$

そして

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} k\,p_{n+1-k,i}\,\pi_{k,i}(t)\,x^n &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_{k,i}(t)\sum_{n=k-1}^{\infty} p_{n+1-k,i}\,x^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\pi_{k,i}(t)\,x^{k-1} g_i(x) = g_i(x)\,\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)\,.\end{aligned}$$

したがって、（1）から偏微分方程式系を推定します。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x)-x)\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j}\,f_j(t,x)\,. \tag{2}$$

出生と死亡の線形過程の特定のケースでは、 $g_i(x)=p_{0,i}+p_{2,i}\,x^2$ そして $c_i(g_i(x)-x)=(x-1)(a_i\,x-b_i)$。

人口の期待に注意してください

$$e_i(t)=\sum_n n\,\pi_{n,i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,1)$$

システム（2）を導出することにより得られた常微分方程式の系の解であるXがとることにより、$X=1$とすることを注目することによって $g_i(1)=1$ ：

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i\,e_i(t) + \sum_j Q_{i,j}\,e_j(t)\,. \tag{3}$$

したがって 、環境iにいる場合 、時間tでの人口予測 は次のようになります。 $e^{\delta_i t}$ 時間$t=0$で単一の個体から開始する場合。

システム（3）はマトリックスを含みます $Q+\Delta$。ただし、セクション5では、個体群の絶滅率が固有値によって常に与えられるとは限らないことを確認します。 $s(Q+\Delta)$。

4.人口の絶滅

モデルが人口の特定の絶滅につながる条件を見てみましょう。このために、離散時間のマルコフ連鎖を考えます。各時間ステップは、環境内の2つのホップ間の期間です。このチェーンは、状態空間を持っています $\{1,2,\ldots,K\}\times[0,+\infty[$。最初のコンポーネント i 環境を表します。2番目のコンポーネントtは、別の環境に切り替える前の時間を表します。だから、環境は状態にあると言う代わりに i_0 一定期間 t_0 その後、状態で i_1 一定期間 t_1、私たちは移行しています $(i_0,t_0)\to(i_1,t_1)$、など（Bacaërand Ed-Darraz、2014、§2.1）ですでに定義しました。

$$Q_i=-Q_{i,i}\quad\forall i,$$

このマルコフ連鎖の定常分布は

$$w_{i,t}=\frac{Q_i\,u_i}{\sum_j Q_j\,u_j}\,Q_i\,e^{-Q_i t}\,.$$

したがって、マルコフ環境での分岐プロセスに関連する（Athreya and Karlin、1971）の結果を適用できます。人口が絶滅するのは、

$$\sum_i\int_0^\infty w_{i,t}\log(e^{\delta_i t})\,dt\le 0\,,$$

それは与えるので、 $\int_0^\infty t\,e^{-Q_i\,t}dt=(1/Q_i)^2$、状態

$$\sum_i u_i\,\delta_i\le 0.$$

なぜなら $\delta_i=c_i(m_i-1)$、これは次の形式でも記述できます $\sum_i\theta_i\,m_i\le 1$、 $\theta_i=c_iu_i/(\sum_j c_ju_j)$。つまり、生成された子孫の「平均」数は1未満であり、各環境の重みはθ_i。

5.消滅速度

今、私たちは以下のような臨界前のケースに興味があります $\sum_i u_i\,\delta_i<0$。その場合、

$$\pi_{0,i}(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}u_i,\quad \pi_{n,i}(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\forall n\ge 1.$$

私たちは人口絶滅率を決定しようとしています：

$$\omega=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\pi_{n,i}(t)\,,\quad n\ge 1,\ 1\le i\le K.$$

この制限は存在し、n（$n\ge1$の場合）、i、または初期条件には依存しません (n_0,i_0)（コレットら、2013、セクション4.5）。私たちの表記では、 $\omega<0$ そして、絶滅しない確率 $1-\sum_i\pi_{0,i}(t)=\sum_i\sum_{n\ge1}\pi_{n,i}(t)$ また、レートωで0に向かって指数関数的に減少します。

（Bacaër、2017、§2.1）のように、ωの計算では、時間の離散化を使用します。これは、（D'Souza and Hambly、1997）の式で、マルコフ環境の離散時間における分岐プロセスの消滅速度を表します。、およびタイムステップが0に近づく傾向がある制限への移行。

それで、小さな規則的な時間ステップで時間を離散化しましょう $\tau > 0$。環境が各小さなタイムステップ内で一定のままであり、遷移が状態空間上の離散時間でマルコフ連鎖に従うと想像してください。 $\{1, 2, \ldots, K\}$ 遷移行列 $e^{\tau Q^\mathsf{T}}$。 Q^Tは、行列Qの転置行列です。モデルの環境を記述する連続時間マルコフチェーンは、次の場合に上記のプロセスの制限になります。 $\tau \to 0$。

長さτの各小さな時間間隔の間、環境は状態であると言われます i、母集団は、パラメータを使用して、連続時間および一定の環境でプロセスに従うと仮定します c_i そして $(p_{n,i})$ セクション2から。 $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t)$ 人口が多い確率 n 環境で i 長さτの各時間間隔で一定の環境を持つこの修正モデルの時間tで。我々は持っています $\forall t > 0$、 $\forall n \geq 0$、 $\forall i\ (1 \leq i \leq K)$、 $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t) \to \pi_{n,i}(t)$ もし $\tau \to 0$。

境界の反転が正当な場合、

$$\omega = \lim_{t \to +\infty} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) = \lim_{\tau \to 0} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) := \lim_{\tau \to 0} \omega^{[\tau]},$$

マルコフ環境では、離散時間での分岐プロセスの消滅速度の計算に戻ります（N整数の場合）。

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log \left(\lim_{N \to +\infty} [\pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau)\,.$$

人口期待は、要因によって増減します $e^{\delta_i \tau}$タイムステップτの間、環境は状態iでブロックされます。ご了承ください u^T チェーンの定常分布です。 $Qu = 0$ 与えられた $u^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} = 0$ そして $u^\mathsf{T} e^{\tau Q^\mathsf{T}} = u^\mathsf{T}(I + \tau Q^\mathsf{T} + \frac{1}{2}(\tau Q^\mathsf{T})^2 + \cdots) = u^\mathsf{T}$。（Athreya and Karlin、1971）によると、このチェーンは常にサブクリティカルです。

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0\,.$$

したがって、（D'Souza and Hambly、1997）と（Bacaër、2017、§2.1）は、人口絶滅の幾何学的比率は、

$$\Omega(\tau) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha \tau \Delta})\,.$$

$\rho(\cdot)$ マトリックスのスペクトル半径を示します。τの値を整数の逆数とする。我々は持っています

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log[\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho([e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}).$$

マトリックス $[e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}$ に収束する $e^{Q^\mathsf{T} + \alpha \Delta}$ もし $\tau \to 0$（いわゆるLie-Trotter-Kato式）。（Bacaër、2017、§2.1）のように、連続時間での指数関数的消滅率は

$$\omega = \lim_{\tau \to 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha \Delta)\,. \tag{4}$$

$s(Q + \alpha \Delta)$ 行列のスペクトル境界です $Q + \alpha \Delta$。したがって、対角行列Δの式のみが（Bacaër、2017）と比較して変化します。

行列の対角の外側にあるすべての要素を思い出してください $Q + \alpha \Delta$ は ≥ 0。この場合、スペクトル境界 $s(Q + \alpha \Delta)$ この行列の実際の固有値です。これは、実部が最大の固有値です。

ω　の式（4）は、生と死の線形過程の場合に得られるものの一般化です（Bacaër、2017）。これらの場合、各個体は確率で1人の新しい個体（バクテリアの場合、それぞれ2つに分かれます）を出産

します $a_i\,dt$ そして確率で死ぬ $b_i\,dt$ 各微小時間間隔の間 dt 環境で i。これは $q_{1,i}=1$ そして $q_{n,i}=0$ もし $n\neq 1$。私たちは $c_i=a_i+b_i$、 $p_{0,i}=\frac{b_i}{a_i+b_i}$、 $p_{2,i}=\frac{a_i}{a_i+b_i}$、 $p_{n,i}=0$ もし $n=1$ または $n>2$、および $\delta_i=a_i-b_i$。

直感的に、消滅速度ωの式は、解を求めると $f_i(t,x)$ として動作するシステム（2）の $e^{\omega t}(1-x)^{\alpha}\phi_i$ 近所で $x=1$ と $x<1$、方程式を得る

$$\omega\,\phi_i=\alpha\,\delta_i\,\phi_i+\sum_j Q_{i,j}\,\phi_j,$$

これは、ωが行列の固有値であることを示唆しています。 $Q+\alpha\,\Delta$。しかしながら、これは、αのどの値が適切であるかを理解することを可能にしない。これまで見てきたように、これは最小化するものです $s(Q+\alpha\Delta)$ と $\alpha\in[0,1]$。

6.不平等

（バカエル、2017、§2.2）はすでにそれを観察していました

- $\alpha\mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ 等しい関数です $s(Q)=0$ α= 0の場合
- Δが対角行列の場合、この関数は凸です。
- この関数は、 δ_i すべてが同じというわけではありません。

さらに、その派生物 $\alpha=0$ 正確に $\sum_i u_i\,\delta_i<0$。 $\alpha\mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ したがって、α= 0での正接を超える関数です。このように

$$\alpha\sum_i u_i\,\delta_i\leq s(Q+\alpha\Delta)\quad\forall\alpha.$$

したがって、これらの関数の最小値について、区間にわたって $0\leq\alpha\leq 1$

$$\sum_i u_i\,\delta_i\leq\omega<0 \tag{5}$$

最初の不等式が厳密な不等式の場合、 δ_i すべてが同じというわけではありません。

数値の例として、たとえば、次の2つの環境の場合を考えます。 $Q_{1,2}=Q_{2,1}=1$、 そのため $u_1=u_2=1/2$：環境はこれらの各州で平均半分の時間を費やしています。両方の環境の成長率が $\delta_1=-1$ そして $\delta_2=-2$、次に関数 $\alpha\mapsto s(Q+\alpha\Delta)$ したがって、減少しています $\omega=s(Q+\Delta)\simeq-1{,}38$、 $\sum_i u_i\,\delta_i=-1{,}5$。

不等式（5）は次のように解釈できます。人口統計的確率はないが、環境確率がモデルに最も近い人口モデルは、間違いなく、人口が $p(t)$時間tで次の方程式に従います $\frac{dp}{dt}=\delta_{\theta(t)}\,p(t)$、ランダム関数 $\theta(t)$ に値があります $\{1,2,\ldots,K\}$ 環境の進化を表しています。我々は持っています

$$p(t)=p(0)\exp(\int_0^t\delta_{\theta(z)}\,dz).$$

エルゴードの定理は、ほぼ確実に、

$$\frac{1}{t}\int_0^t\delta_{\theta(z)}\,dz\to\sum_i u_i\,\delta_i,\quad t\to+\infty.$$

だから私たちは

$$\frac{1}{t}\log p(t) \to \sum_i u_i\,\delta_i, \quad t \to +\infty.$$

$\sum_i u_i\,\delta_i$ したがって、たとえ人口統計的確率なしのモデルの消滅率 $p(t)$ キャンセルすることはありません。人口は私たちのモデルよりも早く消滅します。

逆に、人口統計的確率はあるが、環境確率がモデルに最も近い人口モデルは、平均成長率（またはむしろ消滅）で連続時間（Méléard、2016、§5.4）で接続されるプロセスであることは間違いありません。 $\delta = \sum_i u_i\,\delta_i$。人口は私たちのモデルよりも早く消滅します。

したがって、人口統計学的および環境的確率論は、ある意味で、人口の絶滅を遅らせます。（Tirard et al。、2016、p。211）は、「環境の確率論は人口減少を救うことができる」とも述べています。一方、（Primack et al。、2012、p。159）は、次のように述べています。人口の減少と絶滅の可能性の増加」。私たちのモデルでは逆のことが起こります。

7.まとめ

実際、離散時間およびランダム環境での分岐プロセスの場合にも、同様の不等式があります。たとえば、環境が有限数の状態から独立して同じように分散して選択されているとします。 $v_i > 0$ 環境が各タイムステップで状態iである確率であり、 $\sum_i v_i = 1$。環境がその状態にある場合 i、各個体は確率でn個の個体に置き換えられます $p_{n,i} \geq 0$、 そのため $\sum_{n\geq 0} p_{n,i} = 1$。と思う $m_i = \sum_{n\geq 1} n\,p_{n,i} < +\infty$。亜臨界の場合 $\sum_i v_i \log m_i < 0$、非消滅の確率の減少の幾何学的速度Ωは、

$$1 > \Omega = \min_{0\leq\alpha\leq 1}\Big(\sum_i v_i\,m_i^{\alpha}\Big) \geq \exp\Big(\sum_i v_i \log m_i\Big) = \prod_i m_i^{v_i} \tag{6}$$

（Guivarc'h and Liu、2001、theorem 1）。右側の最後の項は、人口統計学的確率のないモデルの幾何学的成長率（ここでは減少）です

$$p(t+1) = m_{\theta_t}\,p(t).$$

θ_t 環境の状態であり、 $p(t)$ 当時の人口 $t = 0, 1, 2\ldots$ それはまた、平均の一定の環境（したがって、環境の確率論がない）での分岐プロセスにおける非消滅の確率の幾何学的減少率でもあります。 $m = \prod_i m_i^{v_i}$。

その場合 $m_i < 1\ \forall i$、不等式（6）が書き込まれます

$$1 > \Omega = \sum_i v_i\,m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}\ .$$

これは、対数関数の凹面を変換します。 $\log(\sum_i v_i\,m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$。

より一般的に

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

（6）の不等式は、セクション6と少し似ています。

$$h(\alpha) = \log\left(\sum_i v_i\, m_i^\alpha\right), \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

だからいくつかの計算はそれを示しています

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i\, m_i^\alpha \log m_i}{\sum_i v_i\, m_i^\alpha}\,, \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i<j} v_i\, v_j\, m_i^\alpha\, m_j^\alpha (\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i\, m_i^\alpha)^2}\,.$$

このように

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \ge 0$$

間隔で $[0,1]$。 $h(\alpha)$ したがって、α= 0での正接を超える凸関数です。 $h(\alpha) \ge \alpha\, h'(0)$ そして

$$\min\{h(\alpha);\, 0 \le \alpha \le 1\} \ge h'(0).$$

だから私たちは

$$\min\{e^{h(\alpha)};\, 0 \le \alpha \le 1\} \ge e^{h'(0)}.$$

不等式（6）です。

その結果、モデルが離散時間であるか連続時間であるかに関係なく、人口統計学と環境確率の両方がある場合、消滅は遅くなります。

参考文献

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictionsbetween discrete and continuous models. Lett. Math. Phys. 37, 285–292.
- J.–D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. Écoscience 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.–E. Sæther (2003) Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford University Press.
- K.B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W.C. Torrez (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J. Appl. Probab. 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed–Darraz (2014) On linear birth–and–death processes in a random environment, J. Math. Biol. 69, 73–90.
- J.C. D′Souza, B.M. Hambly (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment, Adv. Appl. Probab. 29, 38–55.
- Y. Guivarc′h, Q. Liu (2001) Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous–critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. , http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0。
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi–stationary Distributions, Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) Écologie, Dunod, Paris.
- R.B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) Biologie de la conservation, Dunod, Paris.