О скорости вымирания населения в случайной среде

C. R. Biol. **340 (2017) 259−263.**
http://dx.doi.org/10.1016/j.crvi.2017.04.002
hal: 01522889

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем
Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

резюме

Нас интересует скорость вымирания населения, живущего в случайной среде, управляемой цепью Маркова в непрерывном времени. Каждый человек умирает или размножается со скоростью, которая зависит от окружающей среды. Во время размножения предполагается, что количество потомков следует определенному закону вероятности, который также зависит от окружающей среды. В так называемом докритическом случае, когда население, безусловно, уничтожается, скорость вымирания определяется явно. В некотором смысле экологическая стохастичность замедляет вымирание населения.

Ключевые слова: динамика населения, демографическая стохастичность, экологическая стохастичность

1. Введение

В многочисленных модельных исследованиях изучалось влияние демографической и экологической стохастичности на динамику населения. Как отмечалось, например (Gaveau et al., 1996; Lebreton et al., 2007), работы, в которых популяция рассматривается как действительное число и которые используют диффузионные приближения (Lande et al., 2003), могут приводят к неточным результатам для скорости исчезновения населения, когда это исчезновение точно. Чтобы сохранить целое число населения (Athreya and Karlin, 1971), изучили процессы ветвления в дискретное время со стационарной случайной средой и показали, при каких условиях вымирание населения точно. Как и в постоянной среде, мы можем выделить три случая: сверхкритический, критический и докритический. (Cogburn and Torrez, 1981; Bacaër and Ed-Darraz, 2014) интересуются условиями исчезновения для аналогичных моделей в непрерывном времени, то есть для процессов рождения и смерти в случайной среде. , Для докритического случая с дискретным временем и случайным окружением (D'Souza and Hambly, 1997; Guivarc'h and Liu, 2001) среди других рассчитали скорость вымирания, что приводит к дальнейшему различию двух - схемы, квалифицируемые как высоко и слабо докритические. В непрерывном времени (Bacaër, 2017) рассчитали скорость вымирания для линейного процесса рождения и смерти в случайной марковской среде; метод заключался в том, чтобы сократить время, которое нужно сократить, до случая (D'Souza and Hambly, 1997), затем сделать шаг по времени, стремящийся к 0. Но эта модель не допускала одновременного рождения нескольких особей. Цель ниже состоит в том, чтобы снять это ограничение, то есть изучить «процессы непрерывного ветвления времени» (Méléard, 2016, §5.4) в случайной среде, чтобы вычислить скорость соответствующее исчезновение и заметьте, что эта скорость ниже (в абсолютном значении), чем та, которую можно было ожидать.

В разделе 2 мы представляем нашу модель со средой, которая колеблется между K состояниями в соответствии с цепью Маркова за непрерывное время. В разделе 3 мы рассчитываем темп роста δ_i (положительное или отрицательное) населения в окружающей среде i и средняя пропорция u_i времени, которое окружающая среда проводит в состоянии i . В разделе 4 мы показываем, что население, безусловно, вымирает, если средний темп роста будет отрицательным, т.е. если $\sum_i u_i\,\delta_i \le 0$, Затем мы покажем в разделе 5, что в докритическом случае, когда $\sum_i u_i\,\delta_i < 0$скорость вымирания ω населения, определяется тем, что вероятность не исчезновения уменьшается как $e^{\omega t}$ с $\omega < 0$, дается формулой

$$\omega = \min_{0\le\alpha\le 1} s(Q+\alpha\,\Delta),$$

а также

- Q матрица, описывающая случайные переходы среды;
- Δ диагональная матрица с темпами роста $(\delta_i)_{1\le i\le K}$ по диагонали;
- $s(Q+\alpha\,\Delta)$ обозначает спектральную границу, то есть собственное значение наибольшей действительной части матрицы $Q+\alpha\,\Delta$,

Это обобщение формулы, полученной в (Bacaër, 2017) для линейных процессов рождения и смерти, которые не учитывают одновременные рождения. В разделе 6 мы показываем, что

$$\sum_i u_i\,\delta_i \le \omega < 0$$

и что первое неравенство является строгим, если δ_i не все равны. Скорость вымирания ниже (в абсолютном значении), чем средняя скорость роста. Таким образом, мы можем сказать, что определенная стохастичность окружающей среды замедляет вымирание населения в нашей модели. В заключение отметим, что подобное неравенство применимо к ветвящимся процессам в дискретном времени со случайной средой: оно уже подразумевается в (Guivarc'h and Liu, 2001).

2. Модель

Предположим, что среда непрерывно колеблется между K состояниями в соответствии с цепью Маркова за непрерывное время. Другими словами, есть цифры $Q_{i,j} \ge 0$ такой, что если среда находится в состоянии j , существует вероятность $Q_{i,j}\,dt$ что среда переходит в состояние *я* для$i \ne j$ в течение каждого бесконечно малого промежутка времени dt, Мы определяем $Q = (Q_{i,j})$ квадратная матрица с диагональными членами $Q_{j,j} = -\sum_{i\ne j} Q_{i,j}$, Далее предполагается, что матрица Q неприводима, что означает, что в графе, ориентированном на K вершин с ребром от j до i ($i \ne j$) если $Q_{i,j} > 0$, два пика i_1 а также i_2 всегда можно добраться по пути i_1 к i_2 и путь i_2 к i_1, Там тогда существует единственный вектор U с

$$Qu = 0, \quad u_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_i u_i = 1$$

(Séricola, 2013, стр. 152). Компонент u_i представляет собой среднюю долю времени, которое среда проводит в состоянии i .

Рассмотрим группу людей, бесполых или женщин, которые умирают и размножаются в этой среде независимо друг от друга. Если среда находится в состоянии i , мы предполагаем, что в течение каждого бесконечно малого промежутка времени dt,

- каждый человек воспроизводит с вероятностью $a_i\, dt$ с $a_i > 0$,
- каждый человек умирает с вероятностью $b_i\, dt$ с $b_i > 0$,

Если индивид размножается, предположим, что он рождает *n* особей ($n = 0, 1, 2 \ldots$с вероятностью $q_{n,i}$, с $\sum_{n=0}^{\infty} q_{n,i} = 1\ \forall i$,

Другой способ увидеть это - сказать, что в среде i каждый человек испытывает событие с вероятностью $c_i\, dt$ с $c_i = a_i + b_i$ в течение каждого бесконечно малого промежутка времени dt, Если событие происходит, человек заменяется на 0 человек с вероятностью $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i + b_i}$ и по *n* лиц ($n \geq 1$с вероятностью $p_{n,i} = \frac{a_i}{a_i + b_i}\, q_{n-1,i}$, У нас есть таким образом $\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} = 1\ \forall i$, Поэтому это обобщение процесса (Méléard, 2016, §5.4) в случае случайной среды. Далее предполагается, что

$$m_i = \sum_{n \geq 1} n\, p_{n,i} < +\infty \quad \forall i.$$

Мы определяем

$$\delta_i = c_i (m_i - 1)$$

а также Δдиагональная матрица с $(\delta_i)_{1 \leq i \leq K}$ по диагонали.

3. Темпы роста δ_i

В этой модели вероятность $\pi_{n,i}(t)$ иметь численность населения n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) в среде *я* ($1 \leq i \leq K$в момент времени t является решением системы

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -n\, c_i\, \pi_{n,i}(t) + c_i \sum_{k=1}^{n+1} k\, p_{n+1-k,i}\, \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\, \pi_{n,j}(t)\,. \tag{1}$$

В самом деле, мы предполагаем, например, что в момент времени *t* в среде i имеется *n* индивидуумов . Событие происходит в течение бесконечно малого промежутка времени $(t, t + dt)$ и изменяет количество особей с вероятностью порядка $n\, c_i\, dt$, Кроме того, мы можем в конечном итоге иметь *n* человек в момент времени *t + dt,* если, начиная с *k* человек (*1≤k ≤ n + 1*) в момент времени t , один из них претерпевает событие (вероятность $c_i\, k\, dt$) и заменяется на *n + 1-k* новых особей (вероятность $p_{n+1-k,i}$), потому что $k - 1 + (n + 1 - k) = n$, Наконец, мы можем в конечном итоге иметь *n* человек в среде i в момент времени *t + dt,* если у нас было *n* людей в среде *j* в момент времени *t* и если среда перешла из состояния j в состоянии *я* (вероятность $Q_{i,j}\, dt$). С параметрами a_i, b_i а также $q_{n,i}$, система тоже написана

$$\frac{d\pi_{n,i}}{dt} = -\, n\, (a_i + b_i)\, \pi_{n,i}(t) + (n+1) b_i\, \pi_{n+1,i}(t) + a_i \sum_{k=1}^{n} k\, q_{n-k,i}\, \pi_{k,i}(t) + \sum_j Q_{i,j}\, \pi_{n,j}(t)\,.$$

Мы берем в качестве начального условия n_0 люди ($n_0 \geq 1$) в окружающей среде i_0, так что $\pi_{n_0,i_0}(0) = 1$ а также $\pi_{n,i}(0) = 0$ если $(n, i) \neq (n_0, i_0)$, Как и должно быть для вероятностей, тогда мы имеем $\pi_{n,i}(t) \geq 0$ а также

$$\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t) = 1, \quad \forall t > 0.$$

Мы определяем $\pi = (\pi_{0,1}, \ldots, \pi_{0,K}, \ldots, \pi_{n,1}, \ldots, \pi_{n,K}, \ldots)$, Мы видим, что $\frac{d\pi}{dt} = M\pi(t),\ M$ является бесконечной матрицей вида

$$\left(\begin{array}{c|cccc} Q & CP_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & Q - C + CP_1 & 2CP_0 & 0 & \cdots \\ 0 & CP_2 & Q - 2C + 2CP_1 & 3CP_0 & \cdots \\ 0 & CP_3 & 2CP_2 & Q - 3C + 3CP_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

C это диагональная матрица $(c_i)_{1 \leq i \leq K}$ а также P_n диагональная матрица $(p_{n,i})_{1 \leq i \leq K}$, В частном случае линейных процессов рождения и смерти только матрицы P_0 а также P_2 ненулевые: матрица M тогда трехдиагональный по блокам.

Давайте введем производящие функции

$$g_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i}\, x^n\,, \quad f_i(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,i}(t)\, x^n\,.$$

Отметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \pi_{n,i}(t)\, x^n = x\, \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x)$$

а также

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} k\, p_{n+1-k,i}\, \pi_{k,i}(t)\, x^n = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \pi_{k,i}(t) \sum_{n=k-1}^{\infty} p_{n+1-k,i}\, x^n$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, \pi_{k,i}(t)\, x^{k-1} g_i(x) = g_i(x)\, \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x)\,.$$

Поэтому мы выводим из (1) систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = c_i(g_i(x)-x)\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_j Q_{i,j}\, f_j(t,x)\,. \tag{2}$$

В частном случае линейных процессов рождения и смерти мы имеем $g_i(x) = p_{0,i} + p_{2,i}\, x^2$ а также $c_i(g_i(x)-x) = (x-1)(a_i\, x - b_i)$,

Обратите внимание, что ожидания населения

$$e_i(t) = \sum_n n\, \pi_{n,i}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t,1)$$

является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое получается выводом системы (2) по *x* , принятием *x = 1* и отмечением, что $g_i(1) = 1$:

$$\frac{de_i}{dt} = \delta_i\, e_i(t) + \sum_j Q_{i,j}\, e_j(t)\,. \tag{3}$$

Если мы останемся в среде *I* , ожидание населения в момент времени *m* , следовательно , $e^{\delta_i t}$ если мы начнем с одного человека в момент времени *t = 0* .

Система (3) включает в себя матрицу $Q+\Delta$, Однако в разделе 5 мы увидим, что скорость вымирания населения не всегда определяется собственным значением. $s(Q+\Delta)$,

4. Вымирание населения

Давайте посмотрим, в каком состоянии модель приводит к определенному вымиранию населения. Для этого рассмотрим цепочку Маркова в дискретном времени, каждый временной шаг которого является продолжительностью между двумя скачками в среде. Эта цепочка имеет для пространства государств $\{1,2,\ldots,K\}\times[0,+\infty[$, Первый компонент *i* представляет окружающую среду. Второй компонент *t* представляет время до переключения в другую среду. Таким образом, вместо того, чтобы сказать, что среда находится в состоянии i_0 на период t_0 потом в состоянии i_1 на период t_1у нас есть переход $(i_0,t_0)\to(i_1,t_1)$, так далее. Мы уже видели в (Bacaër and Ed-Darraz, 2014, §2.1), что если мы определим

$$Q_i = -Q_{i,i} \quad \forall i,$$

тогда стационарное распределение этой цепи Маркова

$$w_{i,t} = \frac{Q_i\, u_i}{\sum_j Q_j\, u_j}\, Q_i\, e^{-Q_i t}\,.$$

Поэтому мы можем применить результаты (Athreya и Karlin, 1971), которые относятся к ветвящимся процессам в марковской среде: население почти наверняка исчезнет, если и только если

$$\sum_i \int_0^{\infty} w_{i,t} \log(e^{\delta_i t})\, dt \le 0\,,$$

который дает, потому что $\int_0^{\infty} t\, e^{-Q_i\, t} dt = (1/Q_i)^2$, условие

$$\sum_i u_i\, \delta_i \le 0.$$

Потому что $\delta_i = c_i(m_i-1)$это также можно записать в виде $\sum_i \theta_i\, m_i \le 1$, с $\theta_i = c_i u_i/(\sum_j c_j u_j)$, Другими словами, «среднее» количество произведенных потомков составляет менее 1, при этом весовые коэффициенты для каждой среды определяются θ_i,

5. Скорость вымирания

Нас сейчас интересует докритический случай, когда $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$, В таком случае,

$$\pi_{0,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u_i, \quad \pi_{n,i}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall n \ge 1.$$

Мы пытаемся определить темпы вымирания населения:

$$\omega = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}(t)\,, \quad n\ge 1,\ 1\le i\le K.$$

Этот предел существует и не зависит от *n* (при условии, что *n≥1*), *i* или начальных условий (n_0,i_0) (Collet et al., 2013, раздел 4.5). С нашей записью мы имеем $\omega<0$ и вероятность не исчезновения $1-\sum_i \pi_{0,i}(t) = \sum_i \sum_{n\ge1} \pi_{n,i}(t)$ также экспоненциально уменьшается к 0 со скоростью ω.

Как и в (Васаёг, 2017, §2.1), для расчета ω используется дискретизация времени, формула (D'Souza and Hambly, 1997) для скорости затухания ветвящихся процессов в дискретном времени в марковской среде и переход к пределу, который стремится к временному шагу в

направлении 0.

Итак, давайте дискретизируем время с небольшим регулярным шагом $\tau > 0$, Представьте себе, что среда остается постоянной внутри каждого маленького временного шага и что переходы следуют за цепью Маркова в дискретном времени в пространстве состояний $\{1, 2, \ldots, K\}$ с переходной матрицей $e^{\tau Q^\mathsf{T}}$, Q^Tтранспонированная матрица матрицы Q . Цепочка Маркова с непрерывным временем, которая описывает среду в нашей модели, является пределом процесса, описанного выше, если $\tau \to 0$,

В течение каждого небольшого временного интервала длины τ, где среда находится в состоянии i, мы предполагаем, что население следует процессу в непрерывном времени и постоянной среде с параметрами c_i а также $(p_{n,i})$ из раздела 2. Примечание $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t)$ вероятность того, что большая популяция n в окружающей среде i в момент времени t в этой модифицированной модели с постоянной средой в каждом временном интервале длины τ. У нас есть $\forall t > 0, \forall n \geq 0, \forall i\ (1 \leq i \leq K)$, $\pi_{n,i}^{[\tau]}(t) \to \pi_{n,i}(t)$ если $\tau \to 0$,

Если изменение границы является законным,

$$\omega = \lim_{t \to +\infty} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) = \lim_{\tau \to 0} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(t) := \lim_{\tau \to 0} \omega^{[\tau]},$$

возвращаются к вычислению скорости исчезновения ветвящегося процесса в дискретное время в марковской среде, потому что (с N целым числом)

$$\omega^{[\tau]} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N\tau} \log \pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau) = \frac{1}{\tau} \log \left(\lim_{N \to +\infty} [\pi_{n,i}^{[\tau]}(N\tau)]^{1/N} \right) := \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau)\,.$$

Ожидание населения увеличивается или уменьшается в разы $e^{\delta_i \tau}$в течение временного шага τ, когда среда блокируется в состоянии i . Обратите внимание, что u^T является стационарным распределением цепи, потому что $Qu = 0$ данный $u^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} = 0$ а также $u^\mathsf{T} e^{\tau Q^\mathsf{T}} = u^\mathsf{T}(I + \tau Q^\mathsf{T} + \frac{1}{2}(\tau Q^\mathsf{T})^2 + \cdots) = u^\mathsf{T}$, Эта цепь всегда является докритической, согласно (Athreya и Karlin, 1971), потому что

$$\sum_i u_i \log(e^{\delta_i \tau}) = \tau \sum_i u_i \delta_i < 0\,.$$

Итак (D'Souza and Hambly, 1997) и (Васаёг, 2017, §2.1) показывают, что геометрическая скорость исчезновения населения определяется

$$\Omega(\tau) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho(e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha \tau \Delta})\,.$$

$\rho(\cdot)$ обозначает спектральный радиус матрицы. Пусть значение *τ является* обратным целому числу. У нас есть

$$\omega^{[\tau]} = \frac{1}{\tau} \log \Omega(\tau) = \log[\Omega(\tau)^{1/\tau}] = \log \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho([e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}).$$

Матрица $[e^{\tau Q^\mathsf{T}} e^{\alpha \tau \Delta}]^{1/\tau}$ сходится к $e^{Q^\mathsf{T} + \alpha \Delta}$ если $\tau \to 0$ (так называемая формула Ли-Троттера-Като). Как и в (Васаёг, 2017, §2.1), мы выводим, что экспоненциальная скорость вымирания в непрерывном времени равна

$$\omega = \lim_{\tau \to 0} \omega^{[\tau]} = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} s(Q + \alpha \Delta)\,. \tag{4}$$

$s(Q + \alpha \Delta)$ является спектральной границей матрицы $Q + \alpha \Delta$, Таким образом, изменяется только выражение диагональной матрицы Δ по сравнению с (Васаёг, 2017).

Напомним, что все элементы вне диагонали матрицы $Q + \alpha \Delta$ находятся ≥ 0, В этом случае спектральная граница $s(Q + \alpha \Delta)$ является реальным собственным значением этой матрицы. Это собственное значение с наибольшей действительной частью.

Формула (4) для ω является обобщением формулы , полученной в случае линейных процессов рождения и смерти (Васаёг, 2017). Для этого каждый человек рождает одного нового человека (для бактерий, каждый делится на два) с вероятностью $a_i\, dt$ и умирает с вероятностью $b_i\, dt$ в течение каждого бесконечно малого промежутка времени dt в окружающей среде i, Это соответствует $q_{1,i} = 1$ а также $q_{n,i} = 0$ если $n \neq 1$, У нас тогда $c_i = a_i + b_i$, $p_{0,i} = \frac{b_i}{a_i + b_i}$, $p_{2,i} = \frac{a_i}{a_i + b_i}$, $p_{n,i} = 0$ если $n = 1$ или $n > 2$, а также $\delta_i = a_i - b_i$,

Интуитивно, формула для скорости исчезновения ω связана с тем, что если мы ищем решение $f_i(t, x)$ системы (2), которая ведет себя как $e^{\omega t}(1 - x)^\alpha \phi_i$ в окрестностях $x = 1$ с $x < 1$мы получаем уравнение

$$\omega\, \phi_i = \alpha\, \delta_i\, \phi_i + \sum_j Q_{i,j}\, \phi_j,$$

что говорит о том, что ω является собственным значением матрицы $Q + \alpha\, \Delta$, Однако это не позволяет понять, какое значение α подходит. Как мы уже видели, это тот, который минимизирует $s(Q + \alpha \Delta)$ с $\alpha \in [0, 1]$,

6. Неравенство

(Васаёг, 2017, §2.2) уже заметил, что

- $\alpha \mapsto s(Q + \alpha \Delta)$ функция равна $s(Q) = 0$ если α = 0
- эта функция является выпуклой, если Δ является диагональной матрицей
- эта функция даже строго выпуклая, если δ_i не все равны.

Кроме того, его производная в $\alpha = 0$ был точно $\sum_i u_i\, \delta_i < 0$, $\alpha \mapsto s(Q + \alpha \Delta)$ поэтому является функцией выше ее тангенса при α = 0. У нас есть таким образом

$$\alpha \sum_i u_i\, \delta_i \leq s(Q + \alpha \Delta) \quad \forall \alpha.$$

Поэтому мы имеем для минимумов этих функций на интервале $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_i u_i\, \delta_i \leq \omega < 0 \tag{5}$$

со строгим неравенством в первом неравенстве, если δ_i не все равны.

В качестве числового примера рассмотрим, например, случай двух сред с $Q_{1,2} = Q_{2,1} = 1$, так что $u_1 = u_2 = 1/2$Окружающая среда тратит в среднем половину времени в каждом из этих состояний. Если темпы роста в обеих средах $\delta_1 = -1$ а также $\delta_2 = -2$тогда функция $\alpha \mapsto s(Q + \alpha\Delta)$ уменьшается, поэтому $\omega = s(Q + \Delta) \simeq -1{,}38$, пока $\sum_i u_i\, \delta_i = -1{,}5$,

Неравенство (5) можно интерпретировать следующим образом. Модель населения без демографической стохастичности, но с экологической стохастичностью, наиболее близкой к нашей модели, несомненно, та, где население $p(t)$в момент времени *t* подчиняется уравнению $\frac{dp}{dt} = \delta_{\theta(t)}\, p(t)$где случайная функция $\theta(t)$ со значениями в $\{1, 2, \ldots, K\}$ и представляет эволюцию окружающей среды. У нас есть

$$p(t) = p(0)\, \exp(\int_0^t \delta_{\theta(z)}\, dz).$$

Эргодическая теорема гарантирует, что почти наверняка

$$\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\theta(z)}\, dz \to \sum_i u_i\, \delta_i, \quad t \to +\infty.$$

Итак, мы имеем

$$\frac{1}{t} \log p(t) \to \sum_i u_i\, \delta_i, \quad t \to +\infty.$$

$\sum_i u_i\, \delta_i$ Таким образом, скорость исчезновения модели без демографической стохастичности, даже если $p(t)$ никогда не отменяет Население вымрет быстрее, чем в нашей модели.

И наоборот, популяционная модель с демографической стохастичностью, но без стохастичности среды, наиболее близкая к нашей модели, несомненно, представляет собой процесс связи в непрерывном времени (Méléard, 2016, §5.4) со средней скоростью роста (или, скорее, вымиранием) $\delta = \sum_i u_i\, \delta_i$, Население вымрет быстрее, чем в нашей модели.

Таким образом, демографическая и экологическая стохастичность в некотором смысле замедляет вымирание населения. (Tirard et al., 2016, p. 211) также отмечает, что «стохастичность среды может спасти сокращающееся население». С другой стороны, (Primack et al., 2012, p. 159) отмечает, что «в целом введение стохастичности окружающей среды в моделирование динамики численности населения ведет к реалистичности, к темпам роста и чем меньше численность населения и тем выше вероятность вымирания ». Противоположное происходит в нашей модели.

7. Заключение

Фактически мы имеем аналогичное неравенство в случае ветвящихся процессов в дискретном времени и случайной среде. Предположим, например, что среды выбираются из конечного числа состояний независимо и одинаково распределенными: $v_i > 0$ вероятность того, что среда находится в состоянии *я* на каждом шаге по времени, и мы имеем $\sum_i v_i = 1$, Если среда находится в состоянии iкаждый индивид заменяется *n* индивидами с вероятностью $p_{n,i} \geq 0$, так что $\sum_{n \geq 0} p_{n,i} = 1$, Мы предполагаем, что $m_i = \sum_{n \geq 1} n\, p_{n,i} < +\infty$, В докритическом случае, когда $\sum_i v_i \log m_i < 0$геометрическая скорость Ω уменьшения вероятности не исчезновения такова, что

$$1 > \Omega = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \Big(\sum_i v_i\, m_i^{\alpha} \Big) \geq \exp\Big(\sum_i v_i \log m_i \Big) = \prod_i m_i^{v_i} \tag{6}$$

(Guivarc'h and Liu, 2001, теорема 1). Последний член справа - геометрическая скорость роста (здесь уменьшение) модели без демографической стохастичности

$$p(t+1) = m_{\theta_t}\, p(t).$$

θ_t это состояние окружающей среды и $p(t)$ население в то время $t = 0, 1, 2 \ldots$ Это также геометрическая скорость уменьшения вероятности не исчезновения ветвящихся процессов в постоянной среде (следовательно, без стохастичности среды) среднего $m = \prod_i m_i^{v_i}$,

В случае $m_i < 1\ \forall i$, неравенство (6) записано

$$1 > \Omega = \sum_i v_i\, m_i \geq \prod_i m_i^{v_i}\ .$$

Это переводит вогнутость логарифмической функции: $\log(\sum_i v_i\, m_i) \geq \sum_i v_i \log m_i$,

Если в целом

$$\sum_i v_i \log m_i < 0,$$

неравенство в (6) немного похоже на раздел 6. Определим

$$h(\alpha) = \log\left(\sum_i v_i\, m_i^{\alpha} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Итак, некоторые расчеты показывают, что

$$h'(\alpha) = \frac{\sum_i v_i\, m_i^\alpha \log m_i}{\sum_i v_i\, m_i^\alpha}\,, \quad h''(\alpha) = \frac{\sum_{i<j} v_i\, v_j\, m_i^\alpha\, m_j^\alpha (\log m_i - \log m_j)^2}{(\sum_i v_i\, m_i^\alpha)^2}\,.$$

У нас есть таким образом

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \sum_i v_i \log m_i < 0, \quad h''(\alpha) \geq 0$$

на интервале $[0,1]$, $h(\alpha)$ следовательно, является выпуклой функцией над своей касательной при α = 0: $h(\alpha) \geq \alpha\, h'(0)$ а также

$$\min\{h(\alpha);\, 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq h'(0).$$

Итак, мы имеем

$$\min\{e^{h(\alpha)};\, 0 \leq \alpha \leq 1\} \geq e^{h'(0)}.$$

Это неравенство (6).

Следовательно, вымирание происходит медленнее, когда мы имеем как демографическую, так и стохастическую среду, будь то модель в дискретном или непрерывном времени.

Библиографические ссылки

- B. Gaveau, M. Moreau, J. Toth (1996) Decay of the metastable state in a chemical system : different predictionsbetween discrete and continuous models. Lett. Math. Phys. 37, 285–292.
- J.–D. Lebreton, F. Gosselin, C. Niel (2007) Extinction and viability of populations : paradigms and concepts of extinction models. Écoscience 14, 472–481.
- R. Lande, S. Engen, B.–E. Sæther (2003) Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford University Press.
- K.B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I Extinction probabilities. Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- R. Cogburn, W.C. Torrez (1981) Birth and death processes with random environments in continuous time. J. Appl. Probab. 18, 19–30.
- N. Bacaër, A. Ed–Darraz (2014) On linear birth–and–death processes in a random environment, J. Math. Biol. 69, 73–90.
- J.C. D′Souza, B.M. Hambly (1997) On the survival probability of a branching process in a random environment, Adv. Appl. Probab. 29, 38–55.
- Y. Guivarc′h, Q. Liu (2001) Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 332, 339–344.
- N. Bacaër (2017) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous–critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. , http://dx.doi.org/10.1007/s00285-016-1079-0 .
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer, Berlin.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi–stationary Distributions, Springer, Berlin.
- C. Tirard, L. Abbadie, D. Laloi, Ph. Koubbi (2016) Écologie, Dunod, Paris.
- R.B. Primack, F. Sarrazin, J. Lecomte (2012) Biologie de la conservation, Dunod, Paris.