

QUADRI-INTERFACES (Interfaces 4D en présence de champ électromagnétique)

par

Roger PRUD'HOMME

Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France

CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France.

roger.prud_homme@upmc.fr

MÉTHODE

- On rappelle la **méthode utilisée pour établir les équations de bilan 3D** des fluides en l'absence de champ, d'abord dans le volume, puis à l'interface
- Les règles de la relativité restreinte sont sommairement rappelées et appliquées **bilans dans le quadri-volume, puis à l'interface en l'absence de champs électromagnétiques**
- Les **quadri-tenseurs électromagnétiques** sont ensuite définis, ce qui permet d'établir les équations de Maxwell et les différents **bilans dans les milieux fluides en présence de champs**
- Il restera à déterminer les lois de comportement

1. BILANS 3D DE VOLUME

Forme intégrale du bilan de F dans le volume

F : propriété physique extensive (masse, quantité de mouvement, énergie, etc.) d'un fluide (plus généralement, du milieu continu), de valeur f par unité de masse.

(\mathcal{V}) : volume de contrôle de surface limite $(\partial\mathcal{V})$ ayant \vec{n} pour normale extérieure.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho f d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathcal{J}}_F \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \dot{W}_F d\mathcal{V}$$

$\vec{\mathcal{J}}_F$: flux de F en suivant le mouvement barycentrique de vitesse : $\vec{v}(\vec{x}, t) = \sum_j \rho_j \vec{v}_j$

\dot{W}_F : taux de production de F par unité de volume

Forme locale du bilan de F dans le volume

$$\frac{d(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}}_F = \dot{W}_F$$

avec : $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$, dérivée particulaire.

Relation fondamentale entre les flux

Les champs de vitesse $\vec{V}(x, y, z, t)$ courants sont :

- le repos $\vec{V} = \vec{0}$, qui donne le flux $\vec{J}_{0F} = \vec{J}_F$,
- la vitesse barycentrique locale $\vec{V} = \vec{v}$, qui donne le flux $\vec{J}_{vF} = \vec{J}_F$,
- La vitesse arbitraire \vec{V} , qui donne le flux \vec{J}_{VF} .

Entre ces flux existe la double égalité :

$$\vec{J}_F = \vec{J}_F + \rho f \vec{v} = \vec{J}_{vF} + \rho f \vec{V}$$

On trouve en particulier :

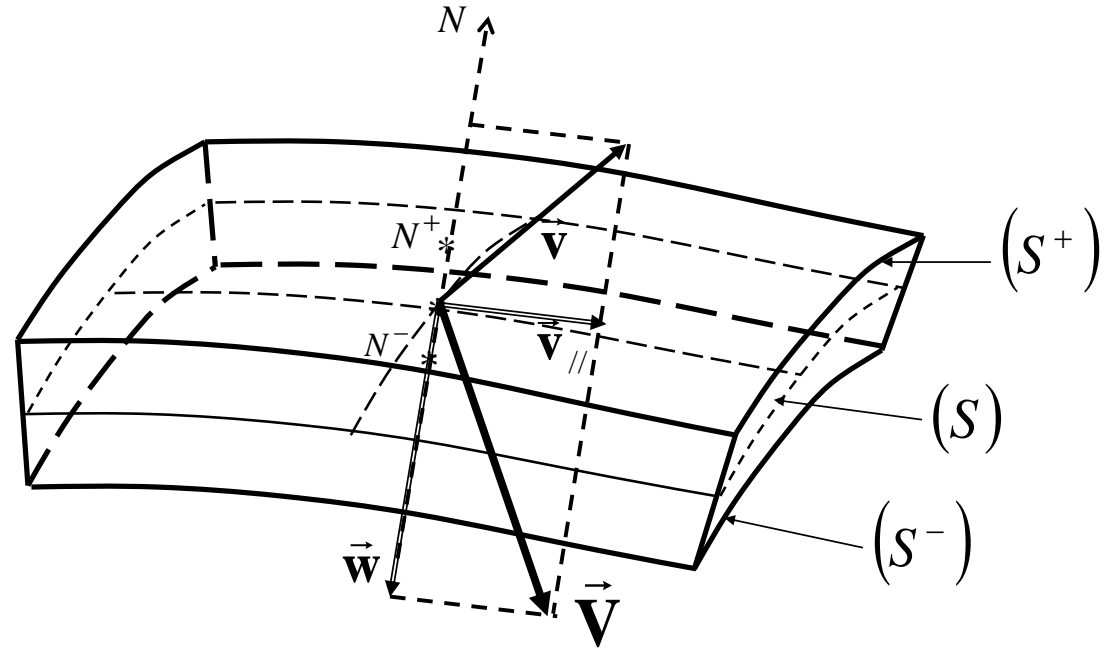
$$\vec{J}_{vF} = \vec{J}_F - \rho f \vec{V} = \vec{J}_F + \rho f (\vec{v} - \vec{V})$$

2. BILANS 3D D'INTERFACE

Définitions des grandeurs interfaciales

La normale unitaire étant \vec{N} , on introduit les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_a = \int_{N^-}^{N^+} \rho dN \\ \rho_a f_S = \int_{N^-}^{N^+} \rho f dN \\ \vec{J}_{vFa} = \int_{N^-}^{N^+} \vec{J}_{vF} dN \\ \dot{W}_{Fa} = \int_{N^-}^{N^+} \dot{W}_F dN \end{array} \right.$$



Les expressions de d_v/dt et de \vec{J}_{vF} dépendent du champ de vitesse $\vec{V}(x, y, z, t)$.

On choisit $\vec{V} = \vec{v}_{//} + \vec{w}$, somme de la composante tangentielle de la vitesse particulière et de la vitesse normale d'avancement de l'interface géométrique.

Forme locale du bilan de volume dans la zone interfaciale

Dans *la zone interfaciale*, on met les bilans dans le volume sous la forme :

$$\frac{d_{\mathbf{V}}(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{V}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{VF}} = \dot{W}_F$$

où : $\frac{d_{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\nabla}$, $\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{VF}} = \vec{\mathbf{J}}_F + \rho f (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}})$, $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{v}}_{//} + \vec{\mathbf{w}}$

et $\nabla_{//} = \left(\vec{\mathbf{1}} - \vec{\mathbf{N}} \otimes \vec{\mathbf{N}} \right) \cdot \vec{\nabla}$, ou encore, **en supposant que $\vec{\mathbf{V}}$ et $\vec{\nabla}_{//}$ se conservent entre N^- et N^+ - donc $\partial \vec{\mathbf{V}} / \partial N \cong \vec{\mathbf{0}}$ - :**

$$d_{\mathbf{V}}(\rho f)/dt + \rho f \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\mathbf{V}} + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{VF}} + \partial \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{VF}} / \partial N = \dot{W}_F$$

Gatignol R. & Prud'homme R. : Mechanical and Thermodynamical modeling of fluid interfaces, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences –Vol. 58, World Scientific, 2001.

Définition intrinsèque des surfaces (S) : $G(x,t) = Cte$, $\vec{w} = d\vec{x}/dt$,
 $\vec{\nabla}G \cdot d\vec{x} + \partial G/\partial t dt = 0$, $\vec{N} = \vec{\nabla}G/|\vec{\nabla}G|$, $w = \vec{N} \cdot \vec{w} = -(\partial G/\partial t)/|\vec{\nabla}G|$

Forme locale du bilan d'interface

Par intégration au travers de la zone interfaciale et en posant :

$$\vec{V} = \vec{V}_S, \quad \vec{\nabla}_{//} = \vec{\nabla}_S, \quad d_S/dt = \partial/\partial t + \vec{V}_S \cdot \vec{\nabla}, \quad \varphi_{\perp} = \vec{\varphi} \cdot \vec{N}, \quad [\varphi]_{-}^{+} = \varphi_{+} - \varphi_{-},$$

$$\varphi_{\perp} = \vec{\varphi} \cdot \vec{N}, \quad [\varphi]_{-}^{+} = \varphi_{+} - \varphi_{-}, \quad \text{on trouve la **forme locale du bilan d'interface** :$$

$$d_S(\rho_a f_S)/dt + \rho_a f_S \vec{\nabla}_S \cdot \vec{V}_S + \vec{\nabla}_S \cdot \vec{J}_{\text{vFa}} + [J_{\text{vF}\perp}]_{-}^{+} = \dot{W}_{Fa}$$

Rappelons la relation entre les flux dans le volume, qui se traduit ici en projection

$$\text{sur la normale par : } \vec{J}_{F\perp} = \vec{j}_{F\perp} + \rho f \vec{v}_{\perp} = \vec{J}_{\text{vF}\perp} + \rho f \vec{V}_{\perp}$$

Entre les flux interfaciaux existe de plus la double égalité :

$$\vec{J}_{Fa} = \vec{j}_{Fa} + \rho_a f_S \vec{v}_S = \vec{J}_{\text{vFa}} + \rho_a f_S \vec{V}_S$$

Autres formes locales du bilan d'interface

D'autres formes se déduisent en utilisant le bilan de masse totale :

$$\frac{d_s \rho_a}{dt} + \rho_a \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{V}}_S + \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{J}}_{VMa} + [J_{VM\perp}]_{-}^{+} = \dot{W}_{Fa}$$

que l'on multiplie par f_S Par soustraction on déduit :

$$\rho_a \frac{d_s f_S}{dt} + \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{J}}_{Fa} + \left[\vec{\mathbf{J}}_F + \rho(f - f_S)(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}_S) \right]_{-}^{+} \cdot \vec{\mathbf{N}} = \dot{W}_{Fa}$$

Conditions de cohérence :

$$\vec{\mathbf{J}}_{Fa} \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0$$

Remarque sur le terme en $\vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{V}}_S$:

Ce terme se décompose en la somme d'un terme d'étirement et d'un terme

de courbure : $\vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{V}}_S = \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{v}}_S + w \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{N}}$, avec : $\vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. BILANS DANS L'ESPACE DE MINKOWSKI

3.1. Rappels sur la relativité et la transformation de Lorentz

En présence de champs électromagnétiques, on a intérêt à exprimer les bilans dans l'**espace-temps de Minkowski**. On se limitera ici à la relativité restreinte et aux vitesses faibles devant la vitesse de la lumière.

La **transformation de Lorentz** gouverne alors les changements de référentiels et permet d'établir les expressions des flux dans le volume et aux interfaces.

Principe de relativité : toutes les lois de la nature sont identiques dans tous les référentiels galiléens ; il s'en suit que l'équation d'une loi garde sa forme en fonction du temps et de l'espace lorsque l'on change de référentiel d'inertie. La vitesse de propagation des interactions est la même dans tous les référentiels d'inertie.

Principe de relativité de Galilée : la vitesse de propagation des interactions est infinie.

Principe de relativité d'Einstein : la vitesse de propagation des interactions est constante et égale à la vitesse de la lumière

Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, vol. 17, p. 891-921, 1905

Soit dl la *distance élémentaire* telle que : $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$,
En mécanique classique, les changements de référentiels d'inertie conservent les *distances*.

Dans l'espace-temps, l'*intervalle élémentaire* entre événements est défini par $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$. *En mécanique relativiste*, ce sont les intervalles qui se conservent lors des changements de référentiels d'inertie. On utilise la transformation de Lorentz pour ces changements de référentiels. Il s'agit en fait de rotations dans l'espace-temps.

Lorsque l'on introduit une grandeur physique tensorielle, il faut s'assurer que son expression obéit à la transformation de Lorentz lors des changements de référentiels d'inertie.

Dans un premier temps, traduisons les résultats des parties 1 et 2 dans l'espace-temps. Ces résultats ont été établis en l'absence de champ électromagnétique.

3.2. Bilans 4D en l'absence de champ

Bilans 4D d'une grandeur F dans le volume

$$4\vec{\nabla}_{\mathbf{V}} \cdot 4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} + \rho f 4\vec{\nabla}_{\mathbf{V}} \cdot 4\vec{\mathbf{V}} = 4\dot{W}_F$$

$$4\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{V}}/\alpha \\ ic/\alpha \end{bmatrix} : \text{quadri vecteur vitesse, } \alpha = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{V}|^2}{c^2}}$$

$$4\vec{\nabla}_{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} \\ (1/ic)d_{\mathbf{V}}/dt \end{bmatrix} : \text{quadri gradient, } 4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{V}F}/c \\ i\rho f \end{bmatrix} : \text{quadri flux,}$$

$$4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} = 4\vec{\mathbf{J}}_F + (\alpha/c)\rho f (4\vec{\mathbf{V}} - 4\vec{\mathbf{V}}) , \text{ traduction 4D de la relation fondamentale}$$

entre les flux 3D (en situation non relativiste, on néglige $|\vec{\mathbf{V}}|^2/c^2 \Rightarrow \alpha \cong 1$).

$$4\dot{W}_F = \dot{W}_F/c : \text{quadri-production}$$

Bilans 4D d'une grandeur F à l'interface

$$\frac{d_s(\rho_a f_s)}{dt} + \rho_a f_s \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{V}}_S + \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}Fa} + [J_{\mathbf{v}F\perp}]_-^+ = \dot{W}_{Fa} \quad \text{devient :}$$

$$4\vec{\nabla}_S \cdot 4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}Fa} + \rho_a f_s 4\vec{\nabla}_S \cdot 4\vec{\mathbf{V}}_S + [4\mathbf{J}_{\mathbf{v}F\perp}]_-^+ = 4\dot{W}_{Fa}$$

$$\underline{4\mathbf{J}_{\mathbf{v}F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}F}/c \\ i\rho f \end{bmatrix}, \underline{4\mathbf{J}_{\mathbf{v}Fa}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}Fa}/c \\ i\rho_a f_s \end{bmatrix} \underline{4\vec{\nabla}_S} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla}_S \\ (1/ic)d_s/dt \end{bmatrix}, \underline{4\mathbf{J}_{\mathbf{v}F\perp}} = \underline{4\mathbf{J}_{\mathbf{v}F}} \cdot \underline{4\mathbf{N}}$$

$$\underline{4\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ i\vec{\mathbf{V}}_S \cdot \vec{\mathbf{N}}/c \end{bmatrix}, \quad 4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}Fa} = 4\vec{\mathbf{J}}_{Fa} + (\alpha/c)\rho f (4\vec{\mathbf{v}}_S - 4\vec{\mathbf{V}}_S),$$

Conditions de cohérence :

$$4\vec{\mathbf{J}}_{Fa} \cdot 4\vec{\mathbf{N}} = 0$$

Quadri tenseur d'impulsion - énergie, dans le volume

$$\underline{\underline{{}^4\mathcal{P}^m}} = \begin{bmatrix} \rho \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{P}} & i c \rho \vec{\mathbf{v}} \\ \frac{i}{c} \left[\vec{\mathbf{q}} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \rho(e + k) \vec{\mathbf{v}} \right] & -\rho(e + k) \end{bmatrix}$$

Quadri tenseur d'impulsion - énergie, à l'interface

$$\underline{\underline{{}^4\mathcal{P}_a^m}} = \begin{bmatrix} \rho_a \vec{\mathbf{v}}_S \otimes \vec{\mathbf{v}}_S + \vec{\mathbf{P}}_a & i c \rho_a \vec{\mathbf{v}}_S \\ \frac{i}{c} \left[\vec{\mathbf{q}}_a + \vec{\mathbf{P}}_a \cdot \vec{\mathbf{v}}_S + \rho_a(e_S + k_S) \vec{\mathbf{v}}_S \right] & -\rho_a(e_S + k_S) \end{bmatrix}$$

3.3. Bilans 4D en présence de champ

Quadri tenseurs du champ dans le volume

$$\underline{\underline{4\mathcal{F}}} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{4\mathcal{F}^*}} = \begin{bmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & B_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & B_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{bmatrix}$$

Équations de Maxwell

$$\underline{\underline{4\mathcal{H}}} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$4\vec{\nabla} \cdot 4\vec{\mathcal{H}} = 4\vec{I}, \quad 4\vec{\nabla} \cdot 4\vec{\mathcal{F}}^* = \vec{0}$$

avec : $4\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \vec{I}/c \\ i\tilde{\rho} \end{bmatrix}$

Quadri tenseur d'impulsion - énergie dû au champ champ dans le volume

$$\underline{\underline{{}^4\mathcal{P}^{ch}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}^{ch}}} & i \underline{\underline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}} \\ (i/c) \underline{\underline{\mathbf{J}_E^{ch}}} & -E^{ch} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}}$: vecteur de Poynting

Pour le fluide en mouvement à la vitesse barycentrique $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{P}}^{ch} = \left(\frac{|\vec{\mathbf{E}}|^2 + |\vec{\mathbf{B}}|^2}{2} - \vec{\mathbf{M}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \right) \vec{\mathbf{1}} - \vec{\mathbf{D}} \otimes \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{B}} \otimes \vec{\mathbf{H}} - \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \otimes (\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{E}})$$

$$\vec{\mathbf{J}}_E^{ch} = c (\underline{\underline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}}) - (\vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{M}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \vec{\mathbf{v}}, \quad E^{ch} = \frac{|\vec{\mathbf{E}}|^2 + |\vec{\mathbf{B}}|^2}{2} - \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \cdot (\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{E}})$$

les champs et déplacements étant ici mesurés dans le référentiel au repos (d'après de Groot & Mazur) et dans le cas non relativiste. Mais il y a une différence avec le cas en l'absence de champ, car cette fois la transformation de Lorentz intervient dans les expressions des grandeurs considérées.

De Groot S.R. & Mazur P., *Non equilibrium thermodynamics*, Dover Publications, INC., New York, 1984.

Bilan 4D d'impulsion-énergie totale dans le volume

$${}_4\vec{\nabla} \cdot \left({}_4\vec{\mathcal{P}}^{ch} + {}_4\vec{\mathcal{P}}^m \right) = {}_4\vec{\Phi}$$

${}_4\vec{\Phi}$, quadri-vecteur des forces extérieures:

$${}_4\vec{\Phi} = \sum_k {}_4\vec{\Phi}_k \quad {}_4\vec{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \rho_k \vec{f}_k \\ \frac{i}{c} \rho_k \vec{f}_k \cdot \vec{v}_k \end{bmatrix}$$

Landau L., Lifschitz E., *Physique théorique, vol. 2 : Théorie des champs*, Éd. MIR, Moscow, 1982.

Dudeck M., « Études thermodynamiques de phénomènes électromagnétiques interfaciaux », Thèse de doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1^{er} juillet 1982.

Quadri-tenseurs de Maxwell à l'interface

$$\underset{=}{\underset{=}{4\mathcal{F}}}_a = \begin{bmatrix} 0 & B_{az} & -B_{ay} & -iE_{ax} \\ -B_{az} & 0 & B_{ax} & -iE_{ay} \\ B_{ay} & -B_{ax} & 0 & -iE_{az} \\ iE_{ax} & iE_{ay} & iE_{az} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{=}{\underset{=}{4\mathcal{F}}}_a^* = \begin{bmatrix} 0 & -iE_{az} & iE_{ay} & B_{ax} \\ iE_{az} & 0 & -iE_{ax} & B_{ay} \\ -iE_{ay} & iE_{ax} & 0 & B_{az} \\ -B_{ax} & -B_{ay} & -B_{az} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{=}{\underset{=}{4\mathcal{H}}}_a = \begin{bmatrix} 0 & H_{az} & -H_{ay} & -iD_{ax} \\ -H_{az} & 0 & H_{ax} & -iD_{ay} \\ H_{ay} & -H_{ax} & 0 & -iD_{az} \\ iD_{ax} & iD_{ay} & iD_{az} & 0 \end{bmatrix}$$

Équations de Maxwell à l'interface :

$${}_4\vec{\nabla} \cdot {}_4\vec{\mathcal{H}}_a = {}_4\vec{\mathbf{I}}_a, \quad {}_4\vec{\nabla} \cdot {}_4\vec{\mathcal{F}}_a^* = \vec{\mathbf{0}}$$

Conditions de cohérence :

$${}_4\vec{\mathcal{H}}_a \cdot \vec{\mathbf{N}} = {}_4\vec{\mathcal{F}}_a^* \cdot \vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad {}_4\vec{\mathbf{I}}_a \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0$$

Quadri-tenseurs d'impulsion-énergie à l'interface

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathcal{P}}}_a^m &= \begin{bmatrix} \rho_a \vec{\mathbf{v}}_S \otimes \vec{\mathbf{v}}_S + \vec{\mathbf{P}}_a & i c \rho_a \vec{\mathbf{v}}_S \\ \frac{i}{c} \left[\vec{\mathbf{q}}_a + \vec{\mathbf{P}}_a \cdot \vec{\mathbf{v}}_S + \rho_a (e_S + k_S) \vec{\mathbf{v}}_S \right] & - \rho_a (e_S + k_S) \end{bmatrix} \\
 \underline{\underline{\mathcal{P}}}_a^{ch} &= \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{P}}_a^{ch} & ic \left(\rho_a \vec{\mathbf{v}}_S + \frac{1}{c} \vec{\mathbf{E}}_a \times \vec{\mathbf{H}}_a \right) \\ (i/c) \vec{\mathbf{J}}_{Ea}^{ch} & - E_a^{ch} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Conditions de cohérence :

$$\begin{cases} {}_4\vec{\mathcal{P}}_a^m \cdot {}_4\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}, \\ {}_4\vec{\mathcal{P}}_a^{ch} \cdot {}_4\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}} \end{cases}$$

Bilan 4D d'impulsion-énergie totale à l'interface

$$\begin{aligned}
 & {}_4\vec{\nabla}_S \cdot \left({}_4\vec{\mathcal{P}}_a^{ch} + {}_4\vec{\mathcal{P}}_a^m \right) + \rho_a \vec{\mathbf{v}}_S \cdot {}_4\vec{\nabla}_S \cdot {}_4\vec{\mathbf{V}}_S \\
 & + \left[{}_4\vec{\mathcal{P}}_a^{ch} + {}_4\vec{\mathcal{P}}_a^m + (1/c) \rho (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_S) \otimes (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}) \right]_{-}^{+} \cdot \vec{\mathbf{N}} = {}_4\vec{\Phi}_a
 \end{aligned}$$

Prud'homme, R.: Flows and Chemical Reactions in an Electromagnetic Field, *Fluid Mechanics series*, ISTE – Wiley, 2014. ISBN 978-1-84821-78-7

ρf

$$\rho_a f_S = \int_{N^-}^{N^+} \rho f dN$$

$$4\vec{\nabla}_S \cdot \left(4\vec{\mathcal{P}}_a^{ch} + 4\vec{\mathcal{P}}_a^m \right)$$

$$+ \rho_a \vec{v}_S 4\vec{\nabla}_S \cdot 4\vec{V}_S$$

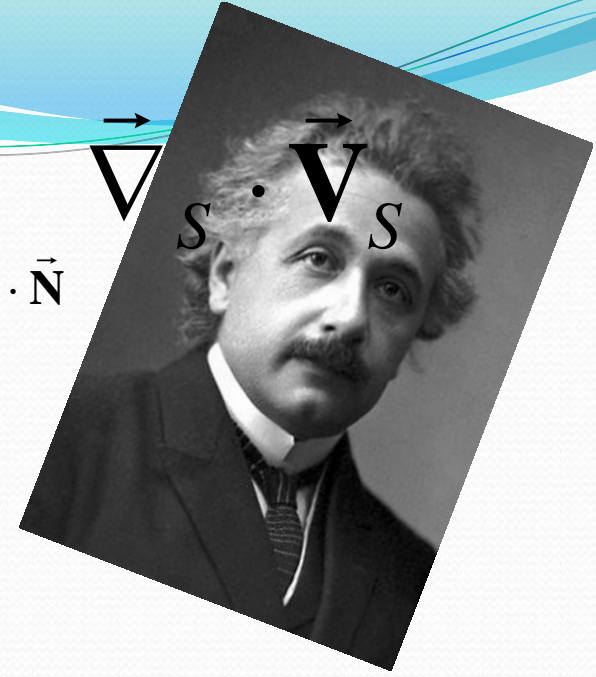
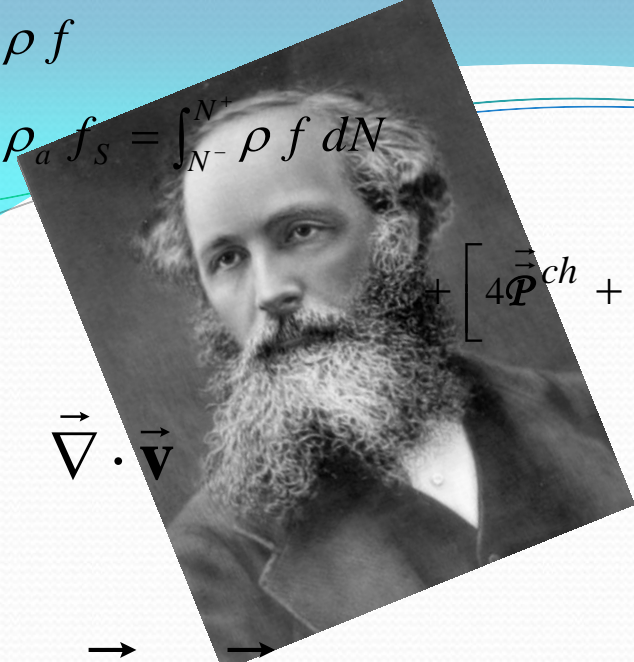
$$+ \left[4\vec{\mathcal{P}}^{ch} + 4\vec{\mathcal{P}}^m + (1/c)\rho (\vec{v} - \vec{v}_S) \otimes (\vec{v} - \vec{v}_S) \right] \cdot \vec{N}$$

$$= 4\vec{\Phi}_a$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{N}$$

$$\vec{\nabla}_S \cdot \vec{V}_S$$



Merci



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

$$4\vec{\nabla}_S \cdot 4\vec{V}_S$$

