Quadri-Interfaces

Roger Prud'Homme

QUADRI INTERFACES par Roger Prud'homme[1, 2]

[1] Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France
[2] CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France. roger.prud_homme@upmc.fr

Les équations macroscopiques de bilan des interfaces fluides ont été établies en considérant deux échelles de longueur et moyennant quelques approximations, telles que la conservation du vecteur vitesse mixte $\vec{\mathbf{V}}$ et du gradient parallèle $\vec{\nabla}_{//}$ à la traversée de la zone interfaciale. Nous généralisons cette méthode au cas des quadri interfaces en présence de champs électromagnétiques. Le passage à l'espace-temps [1, 2] est en effet un moyen d'obtenir une présentation homogène des bilans.

1. Rappel concernant les interfaces 3D

La vitesse mixte considérée à la traversée de la zone interfaciale, limitée par les surfaces S^- et S^+, est $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{v}}_{//} + \vec{\mathbf{w}}$, où $\vec{\mathbf{v}}_{//}$ est la composante du vecteur vitesse barycentrique du fluide parallèle à l'interface et $\vec{\mathbf{w}}$ la vitesse normale de déplacement de l'interface [3].

Il est intéressant d'écrire les *équations de bilan dans le volume* en suivant le mouvement ayant cette vitesse. Pour toute grandeur *F* (*f* par unité de masse) nous écrirons donc localement :

$$\frac{d_{\mathbf{V}}(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{V}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} = \dot{W}_F \qquad [1]$$

avec les définitions suivantes de la dérivée en suivant le mouvement mixte et du vecteur flux : $\frac{d_{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\nabla}$, $\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} = \vec{\jmath}_F + \rho f \left(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}\right)$, le flux $\vec{\jmath}_F$ étant celui du mouvement barycentrique, et $\dot{W}_F$ étant le taux de production.

Le *bilan local d'interface* s'obtient par intégration entre *N*´ et *N*⁺ de l'équation [1] écrite sous la forme : $\frac{d_{\mathbf{V}}(\rho f)}{dt} + \rho f \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\mathbf{V}} + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} + \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F}}{\partial N} = \dot{W}_F$, en supposant la conservation de $\vec{\mathbf{V}}$ et de $\vec{\nabla}_{//}$. On pose : $\rho_a = \int_{N^-}^{N^+} \rho \, dN$, $\rho_a f_S = \int_{N^-}^{N^+} \rho f \, dN$, $\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}Fa} = \int_{N^-}^{N^+} \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} \, dN$, $\dot{W}_{Fa} = \int_{N^-}^{N^+} \dot{W}_F \, dN$ et l'on obtient:

$$\frac{d_S(\rho_a f_S)}{dt} + \rho_a f_S \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{V}}_S + \vec{\nabla}_S \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}Fa} + \left[J_{\mathbf{V}F\perp}\right]_-^+ = \dot{W}_{Fa} \qquad [2]$$

avec : $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_S$, $\vec{\nabla}_{//} = \vec{\nabla}_S$, $d_S/dt = \partial/\partial t + \vec{\mathbf{V}}_S \cdot \vec{\nabla}$, $\varphi_\perp = \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{N}}$, $[\varphi]_-^+ = \varphi_+ - \varphi_-$, $\vec{\mathbf{N}}$ étant la normale unitaire à l'interface. On doit aussi écrire des conditions de cohérence Indiquant que les composantes normales des tenseurs d'interface sont nulles. Ainsi : $\vec{\jmath}_{\mathbf{F}a} \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0$.

2. Bilans dans l'espace-temps de Minkowski

En matière de relativité, nous nous limiterons à la relativité restreinte[1] et aux référentiels galiléens de vitesses *V* faibles, telles que $V/c \ll 1$. L'utilisation des coordonnées d'espace-temps[2] et de la transformation de Lorentz sont de rigueur [4].

---

[1] *Principe de relativité d'Einstein* : la vitesse de propagation des interactions est constante et égale à la vitesse de la lumière.

[2] *L'intervalle* élémentaire entre événements: $ds = \sqrt{c^2\, dt^2 - dl^2}$, se conserve au cours des transformations galiléennes (en mécanique classique c'est la *distance* élémentaire : $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ qui se conserve) .

Pour les grandeurs matérielles de type « masse », les équations de bilan obtenues seront équivalentes aux équations classiques. Pour les grandeurs électromagnétiques on introduira des quadri tenseurs électromagnétiques qui vérifieront les équations de Maxwell.

Le quadri vecteur vitesse $4\vec{\mathbf{V}}$ est définie par la matrice colonne : $\underline{4\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{V}}/\alpha \\ ic/\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{V}|^2}{c^2}}$. De même, on définit le quadri gradient comme suit : $\underline{4\nabla} = \begin{bmatrix} \nabla \\ (1/ic)(\partial/\partial t) \end{bmatrix}$. Le bilan local de quadri-volume s'écrit alors :

$$4\vec{\nabla}_{\mathbf{V}} \cdot 4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} + \rho\, f\, 4\vec{\nabla}_{\mathbf{V}} \cdot 4\vec{\mathbf{V}} = 4\dot{W}_F \qquad [3]$$

Et le bilan local de quadri- interface devient :

$$4\vec{\nabla}_S \cdot 4\vec{\mathbf{J}}_{VFa} + \rho_a f_S\, 4\vec{\nabla}_S \cdot 4\vec{\mathbf{V}}_S + \left[4\mathbf{J}_{VF\perp}\right]_-^+ = 4\dot{W}_{Fa} \qquad [4]$$

avec : $\underline{4\mathbf{J}_{\mathbf{V}F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{V}F}/c \\ i\rho\, f \end{bmatrix}$, $\underline{4\mathbf{J}_{\mathbf{V}Fa}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{V}Fa}/c \\ i\rho_a\, f_S \end{bmatrix}$, $\underline{4\nabla_S} = \begin{bmatrix} \nabla_S \\ (1/ic)d_S/dt \end{bmatrix}$, $4\mathbf{J}_{\mathbf{V}F\perp} = 4\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}F} \cdot 4\vec{\mathbf{N}}$, $\underline{4\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ i\vec{\mathbf{V}}_S \cdot \vec{\mathbf{N}}/c \end{bmatrix}$ et $4\dot{W}_F = \dot{W}_F/c$, respectivement pour les quadri flux, quadri gradients et quadri productions.

Il faut ajouter des conditions de cohérence telles que : $4\mathcal{J}_{\mathbf{F}a} \cdot 4\vec{\mathbf{N}} = 0$.

Les tenseurs électromagnétiques $4\vec{\vec{\mathcal{H}}}$ et $4\vec{\vec{\mathcal{F}}}$ * vérifient les équations de Maxwell :

$$4\vec{\nabla} \cdot 4\vec{\vec{\mathcal{H}}} = 4\vec{\mathcal{I}} \;,\; 4\vec{\nabla} \cdot 4\vec{\vec{\mathcal{F}}}^{*} = \vec{0} \qquad [5]$$

On considère de plus le quadri tenseur de pression-énergie : $4\vec{\vec{\mathcal{P}}} = 4\vec{\vec{\mathcal{P}}}^{m} + 4\vec{\vec{\mathcal{P}}}^{ch}$, avec sa partie due à la masse et sa partie due au champ. Ces quadri-tenseurs représentent des flux de quantité de mouvement et d'énergie. $4\vec{\vec{\mathcal{P}}}^{ch}$ est fonction des champs déplacements électriques et magnétiques : $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{D}}, \vec{\mathbf{H}}$ et du vecteur vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ rapporté à la vitesse c de la lumière dans le vide.

Le *problème des lois de comportement*, est assez complexe, en particulier en présence d'interfaces et de plusieurs espèces chimiques réactives. On peut néanmoins tenter d'utiliser notre théorie macroscopique et les principes de la TPI (thermodynamique irréversible [5]). Pour cela il nous faut d'abord déterminer le taux de production d'entropie, puis faire apparaître des flux et des forces généralisées qui seront ensuite supposées vérifier des relations linéaires avec des coefficients phénoménologiques.

Sinon, on a recours à l'analyse à l'échelle moléculaire. En présence de champs électromagnétique interviennent des longueurs caractéristiques d'origine microscopique telles les longueurs de Debye et de Larmor.

[1] Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, vol. 17, p. 891-921, 1905.
[2] Landau L., Lifchitz E., *Physique théorique*, vol. 2 : *Théorie des champs,* Éd. MIR, Moscou, 1982.
[3] Gatignol R. & Prud'homme R. : Mechanical and thermodynamical modeling of fluid interfaces, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences – Vol. 58, World Scientific, 2001.
[4] Prud'homme, R.: Flows and Chemical Reactions in an Electromagnetic Field, *Fluid Mechanics series, ISTE – Wiley*, 2014. ISBN 978-1-84821-78-7.
[5] De Groot S.R. & Mazur P., *Non equilibrium thermodynamics*, North-Holland Pub1ishing Company, 1963.