Le double cadran solaire horizontal de Benjamin Scott du musée des Arts et Métiers

Denis Savoie

Le double cadran solaire horizontal de Benjamin Scott du musée des Arts et Métiers

par Denis Savoie [1]

Description du double cadran solaire horizontal exposé au musée des Arts et Métiers à Paris.

Le musée des Arts et Métiers à Paris expose dans sa collection d'objets scientifiques un cadran solaire exceptionnel, réalisé en 1713 par le constructeur d'instruments mathématiques [2] Benjamin Scott (1688-1751). On appelle ce type de cadran « double cadran » car il combine deux cadrans solaires sur une même platine : un cadran classique à style polaire en projection gnomonique, et un cadran à style droit en projection stéréographique [3] (fig. 1 page suivante). Il s'agit d'un instrument typiquement d'origine anglaise, imaginé par le mathématicien William Oughtred (1574-1660) dont on connaît actuellement une trentaine d'exemplaires [4]. En France,

1. SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, LNE, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France, et musée des Arts et Métiers, 60 rue Réaumur, 75003 Paris.

2. On trouvera une courte biographie (et la description d'un cadran plus classique tracé par B. Scott) dans J. Davis, « A Benjamin Scott horizontal Dial », *Bulletin of the British Sundial Society*, vol. 22 (iii), septembre 2010, p. 18-22 et dans J. Davis et M. Lowne, *The Double Horizontal Dial*, Monograph N° 5, éd. British Sundial Society, 2009, p. 151.

3. On consultera avec profit l'étude de L. Janin, « Astrolabe et cadran solaire en projection stéréographique horizontale », *Centaurus*, 1979, vol. 2, n° 4, p. 298-314, qui se conclut par une photo du cadran de B. Scott du musée des Arts et Métiers. Cet aspect de la projection stéréographique appliqué à un cadran solaire est abordé de façon succincte dans R. D'Hollander, *L'Astrolabe, histoire, théorie, pratique*, éd. Institut Océanographique, Paris, 1999, p. 290-291 tout comme H. Michel, *Traité de l'astrolabe*, Paris, 1947, p. 129-130.

4. L'étude incontournable et la plus complète sur ces doubles cadrans est due à J. Davis et M. Lowne, *The Double Horizontal Dial*, *op. cit.* (241 pages), qui contient un inventaire des doubles cadrans connus. Sur les querelles liées à la priorité de l'invention du double cadran, voir A. J. Turner, « William Oughtred, Richard Delamain and the Horizontal Instrument in Seventeenth Century England », *Annali dell Instituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, année VI, fasc. 2, 1981, p 99-125. Notons qu'on ne connaît qu'un seul exemplaire de double cadran réalisé par B. Scott.

Figure 1 – Le double cadran solaire de Benjamin Scott de 52 cm de diamètre.

ce type de cadran n'a pas eu le même succès qu'en Angleterre et très peu d'auteurs le mentionnent [5].

L'intérêt principal de combiner deux cadrans sur une même platine repose sur la facilité d'orienter l'ensemble dans la direction du méridien, uniquement par rotation : il faut que les deux cadrans indiquent la même heure pour que la direction Nord-Sud géographique soit déterminée. Cette particularité, mise en avant par de nombreux auteurs, n'est jamais véritablement démontrée (cf. *infra*). Mais elle ne justifie pas à elle seule la réalisation d'un tel cadran : il faut y voir plus qu'un simple cadran solaire. C'est en effet un véritable instrument de calcul qui permet de résoudre des problèmes d'astronomie liés au mouvement du Soleil au cours de la journée et de l'année. La finesse de la gravure du double cadran de Benjamin Scott, alliée à l'extrême précision et justesse de ses tracés, font de cette pièce harmonieusement composée un chef d'oeuvre. Ajoutons que nombre de ces doubles cadrans ornent toujours

5. Le seul auteur qui explique la réalisation de ce type de cadran est Jacques Ozanam dans le tome 5 de son *Cours de mathématique*, Paris, 1697 (qui contient un traité de gnomonique très original). Le problème X s'intitule « Décrire un astrolabe horizontal » est accompagné d'une planche où un double cadran est dessiné (planche 8). Il faut dire que l'invention par le français Vaulezard en 1640 du cadran analemmatique, — qui est aussi un cadran d'azimut mais à style mobile —, popularisé par Lalande notamment, a occulté en France cette invention anglaise d'Oughtred. Sur une application moderne de ce type de cadran, voir D. Collin, « L'astrolabe d'Oughtred », *Cadran Info* n° 27, 2013, p. 21-38.

certains parcs anglais depuis plusieurs siècles, signe qu'ils ne sont pas tous destinés à passer leur vie exposé dans un musée.

On se propose ici de décrire dans le détail cet objet [6] et de donner pour la première fois une traduction commentée en français du texte composé par Scott pour accompagner son cadran, qui semble être entré au musée [7] des Arts et Métiers avant 1818.

1 Description générale

Le double cadran est une platine de 52 cm de diamètre en laiton très peu altéré, épaisse d'environ 1 cm et pesant 19,57 kg (fig. 2). Une première couronne de 4 cm de large comportant les chiffres romains de IIII à VIII indiquant l'heure solaire constitue le cadran en projection gnomonique, fonctionnant avec le style polaire épais de 39 cm de long. Le style robuste est maintenu perpendiculaire à la platine à l'aide de deux cales latérales et fixé par une clavette sous la platine.

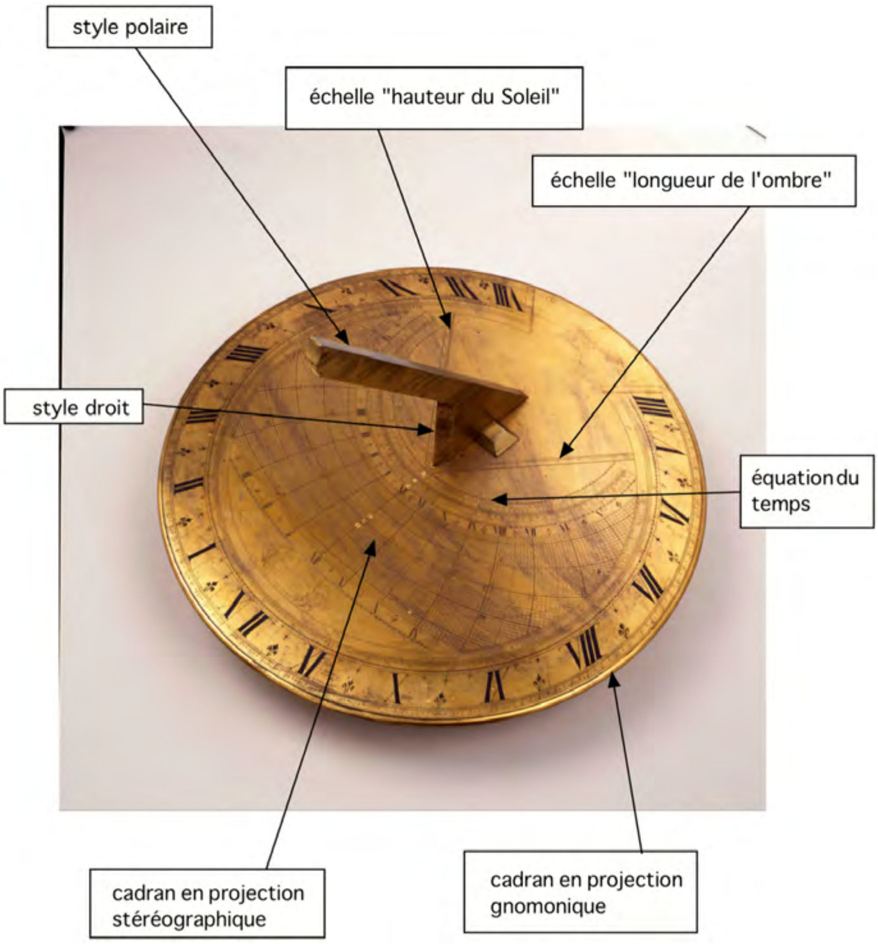

Figure 2 – Détails sur les informations astronomiques figurant sur le double cadran.

6. Le cadran a déjà fait l'objet d'une description sommaire par A. Turner, « Le cadran solaire de Benjamin Scott », *La Revue*, musée des Arts et Métiers, Paris, septembre 1998, p. 55-57. Voir également J. Davis et M. Lowne, *The Double Horizontal Dial*, *op. cit.*, p. 179.

7. Lors du récolement général de 1849, le cadran est inscrit sous le numéro d'inventaire 3876 (qu'il porte toujours) au titre des « objets entrés avant 1849 » sans mention de provenance. Dans le catalogue des collections de 1818, il figure sous le numéro 257 (numéro d'ordre) : « Cadran solaire indiquant les longitudes, par Benjamin Scott » ; il est alors placé dans la salle de l'éventail. Peut être s'agit il d'une saisie de la Révolution.

L'essentiel du tracé est occupé par le cadran en projection stéréographique qui fonctionne avec le style droit biseauté perpendiculaire à la platine et situé quasiment au centre, sous le style polaire, et qui mesure 10,5 cm de haut [8]. De son pied partent deux échelles graduées : vers le Sud-Est l'échelle permettant la lecture de la hauteur du Soleil ; vers le Sud-Ouest l'échelle donnant la longueur de l'ombre.

1.1 Cadran en projection gnomonique (fig. 3)

Figure 3 – Photographie rapprochée de la partie correspondant aux heures du matin. On voit nettement au dessus de la couronne en chiffres romains le canevas stéréographique avec les deux arcs de cercle de l'écliptique.

Le limbe le plus extérieur est gradué de la façon suivante (la lecture se fait pour un observateur extérieur au cadran) : on trouve d'abord les dizaines des minutes en chiffres arabes, marquées par un trait long de 0 à 60, les cinquièmes de minutes par un trait plus court surmonté d'un point. On trouve ensuite une petite bande qui contient toutes les minutes de 1 à 60. Dans la partie où sont inscrites les heures en chiffres romains, les demi-heures sont maquées par une fleur de lys vers le bas et les quarts d'heure par un trait fini par trois épis vers le haut ; faisant face aux fleurs de lys on trouve un trait fini par un as de carreau entouré de trois points. C'est entre ce système multiple d'indication que se trouvent des noms de villes du monde et indirectement leur longitude (cf. *infra*).

Ces quatre centimètres de diamètre terminent la partie strictement gnomonique du cadran, fonctionnant avec le style polaire. En raison de son épaisseur, la ligne midi est coupée entre le X et le II du chiffre XII. C'est dans le croissant séparant les deux projections que Benjamin Scott a signé son œuvre, *Benjamin Scott A Londres* (fig. 4 page ci-contre).

1.2 Cadran en projection stéréographique (fig. 5)

Le cadran solaire en projection stéréographique se comporte, à l'instar de l'astrolabe, comme un abaque de calcul qui permet de résoudre des problèmes d'astronomie de position liés au mouvement du Soleil. Cette projection, rappelons-le, est conforme, ce qui signifie qu'elle conserve les angles que font entre elles les courbes tracées sur la sphère céleste. La surface qu'il occupe sur la platine est bien la preuve que c'est lui qui est le principal instrument, le cadran en projection gnomonique périphérique n'étant finalement là que pour l'orientation de l'ensemble et pour donner l'heure solaire. Si le tracé d'un tel cadran « astrolabique » est d'une grande facilité puisqu'il est composé uniquement d'arcs de cercles, son usage demande cependant de connaître la date, c'est-à-dire la déclinaison du Soleil, ce qui suppose de posséder

8. La valeur minimale que doit mesurer le gnomon pour que l'ombre atteigne l'arc au solstice d'été le tracé est de 9,2 cm.

Figure 4 – Cartouche contenant la signature du cadran : « Benjamin Scott A Londres ».

une table *ad hoc*. Le cadran fonctionne avec l'ombre du style droit de 10,5 cm de haut : l'heure se lit à l'intersection d'un cercle horaire et un cercle de déclinaison [9].

Séparé par une couronne de points noirs de la partie gnomonique, on trouve une échelle graduée des azimuts, comptés depuis le point cardinal Est de 0° à 90° vers le Nord et vers le Sud du cadran (avec son équivalent vers l'Ouest, l'origine des azimuts étant le point cardinal Ouest). Midi correspond donc à 90° d'azimut ; les graduations sont gravées à la fois de 1° en 1° et de $0\overset{\circ}{.}5$ en $0\overset{\circ}{.}5$ dans l'échelle adjacente.

Une échelle des mois se trouve au-delà de celle des azimuts, avec indication des noms des mois en français. Elle débute au solstice d'hiver (qui semble être placé vers le 22-23 décembre). Les mois sont gradués de jours en jours, l'équinoxe tombant entre le 20 et le 21 mars, le solstice d'été vers le 21 juin. Notons que ces dates de début de saison sont celles du calendrier grégorien, que la France a adopté dès 1582. Or la Grande Bretagne, en 1713, utilise toujours le calendrier julien où les dates des saisons sont les suivantes : 9 mars, 10 juin, 12 septembre et 10 décembre. Benjamin Scott a donc converti les dates spécifiquement pour l'usage français.

Cette partie du cadran est évidemment en lien avec les cercles de déclinaison du Soleil, au nombre de 49, gradués de 1° en 1° jusqu'à $\delta = \pm 23\overset{\circ}{.}5$. L'équateur est en trait gras, accompagné à chaque intersection avec un cercle horaire par le chiffre arabe donnant l'ascension droite, qui croît de 0 à 12 de l'Est vers l'Ouest puis de 12 à 24 de l'Ouest vers l'Est. Les déclinaisons ±10° et ±20° sont aussi en gras, tandis que les valeurs ±5° et ±15° sont en traits fins alternés avec des points. Les cercles horaires coupent perpendiculairement les cercles de déclinaison, gradués de $5'$ en $5'$; ceux des heures sont en trait gras au bout desquels on trouve en chiffre romain l'heure solaire (de V à VII). Les cercles horaires des demi-heures sont en traits fins qui alternent avec des points épais et se terminent par une fleur de lys. Les quarts d'heures sont aussi en traits fins qui alternent avec des points mais de diamètre plus petit que ceux des demi-heures.

9. C'est le défaut des cadrans en projection stéréographique azimutale : si le cadran ne comportait que les courbes des solstices et des équinoxes, on ne pourrait y lire l'heure que quatre fois par an. Cela oblige donc le constructeur à munir son cadran de nombreux cercles de déclinaison (49 dans le cas du cadran de Scott) en veillant à ne pas trop surcharger le tracé.

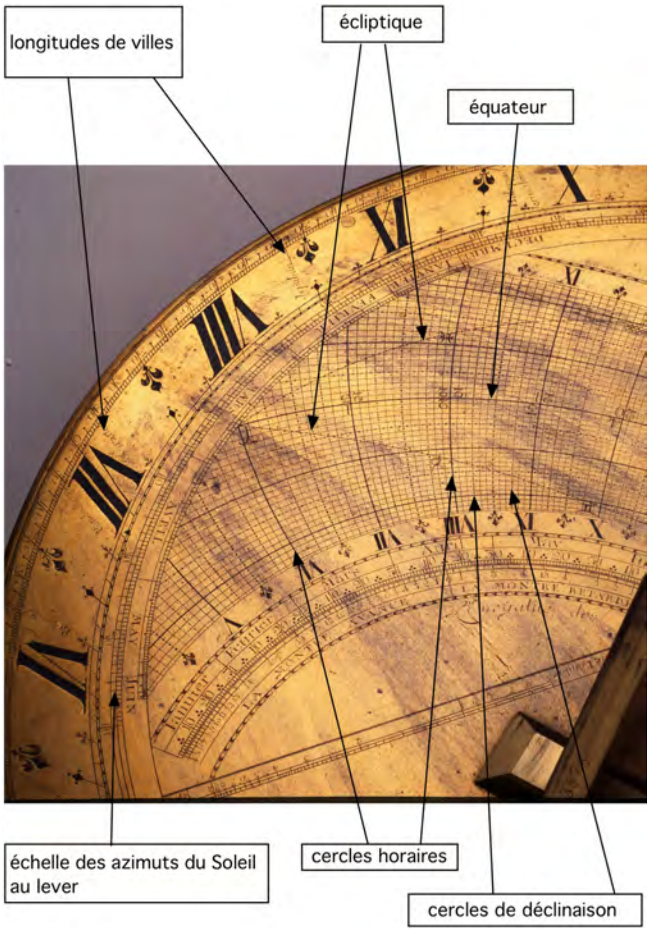

Figure 5 – Détails sur les informations astronomiques figurant de la partie correspondant aux heures du matin.

Le réseau de cercles horaires et de déclinaisons est coupé obliquement par deux arcs de cercles d'écliptique semestriels en traits fins alternant avec des points, accompagnés des symboles zodiacaux [10]. Les deux arcs se coupent sur l'équateur dans les parties Est et Ouest du cadran et tangentent évidemment les deux arcs des solstices sur la ligne midi.

1.3 Autres indications

Benjamin Scott a inscrit d'autres quantités sur le cadran en les incorporant de façon harmonieuse : l'équation du temps [11] et deux échelles (hauteur du Soleil et longueur de l'ombre). Sous le cadran en projection stéréographique se trouve une couronne des mois de janvier à décembre, graduée de jours en jours, avec sous la date la valeur de l'équation du temps appelée *Équation des jours naturels* (fig. 6 page suivante).

10. On calcule les points de l'écliptique en utilisant les formules données dans D. Savoie, *La Gnomonique*, Les Belles Lettres, Paris, 2007, p. 162-166, en faisant varier la déclinaison du Soleil telle que : $\tan\delta = \tan\varepsilon \sin\alpha$ avec $H = \alpha - 90°$ pour α variant de 0° à 180° et $H = \alpha + 90°$ pour α variant de 180° à 360°. L'ascension droite est donc la seule variable.

11. L'équation du temps est la différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai. En 1713, Scott bénéficie des avancées dans la définition de cette importante quantité, longtemps restée floue : en 1672, l'astronome royal John Flamsteed remet à plat la définition de l'équation du temps, avec un retour aux deux raisons fondamentales qui produisent les « inégalités du jour naturel » : *De Inaequalitate Dierum solarium Dissertatio Astronomica*, 1672, Londres.

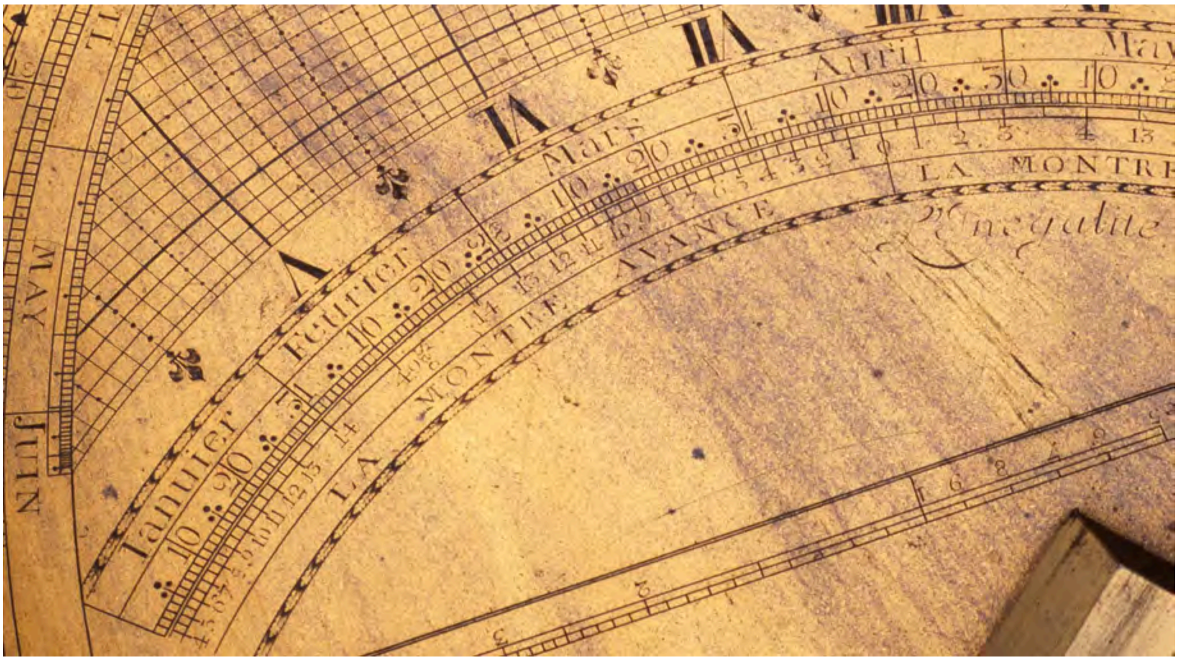

Figure 6 – Détail sur la partie contenant l'équation du temps (*Inégalités des jours naturels*).

Les valeurs données sont très correctes et Scott a inscrit par deux fois, quand il disposait de place, la valeur de l'équation du temps avec les secondes : on trouve ainsi pour le 10 février la valeur de 14 m 49 s [14 m 48 s valeur moderne] ; le 26 juillet la valeur de 5 m 46 s [5 m 54 s valeur moderne]. On note que du 1er janvier au 15 avril l'équation du temps est positive (la montre avance) ; que du 16 avril au 17 juin l'équation du temps est négative (la montre retarde) ; que du 18 juin au 31 août l'équation du temps est à nouveau positive (la montre avance) ; et que du 1er septembre au 23 décembre l'équation du temps est négative (la montre retarde). Puis à nouveau l'équation du temps redevient positive le 24 décembre.

Depuis le pied du style droit part vers le Sud-Est une échelle qui porte le nom *Hauteur du Soleil* : elle est graduée de 0° à 65°, de 0°,5 en 0°,5. Le point 0° de l'échelle correspond évidemment avec l'horizon Ouest du cadran en projection stéréographique. Depuis le centre du cadran, les graduations de l'échelle des hauteurs s'obtiennent par $\left[\frac{R\cos h}{1+\sin h}\right]$ où h est la hauteur considérée et R le rayon du cadran. Cette échelle s'utilise avec un compas dont on place la pointe au pied du style droit ; on fixe ensuite l'ouverture sur la hauteur recherchée et l'on décrit sur le cadran en projection stéréographique un arc de cercle. L'intersection avec un cercle horaire ou de déclinaison permet de connaître la hauteur du Soleil à un instant donné. On peut aussi utiliser cette échelle pour déterminer les instants de crépuscule (*cf.* la traduction du texte) ou inversement chercher qu'elle est la hauteur du Soleil à une date et un instant donnés.

Une autre échelle part du pied du style droit dans la direction Sud-Ouest et porte le nom de *Longueur de l'ombre*. Elle est graduée de 5 à 1, puis de 1 à 10, de 10 à 20 et de 20 à 30. Alors que Benjamin Scott décrit dans sa notice (cf. la traduction du texte) l'utilisation des différentes parties de son cadran, il passe sous silence cette règle des ombres dont la graduation reste difficile à comprendre. Il s'agit sans doute d'une échelle des cotangentes de la hauteur du Soleil ou d'une échelle logarithmique.

2 Détermination des paramètres primaires

Un frottage sur du papier de faible grammage du tracé de l'après-midi a permis de faire avec précision une empreinte du cadran et de mesurer des angles et des distances [12]. En premier lieu, on a déterminé la latitude pour lequel le double cadran est tracé ; comme on le sait, les lignes horaires les plus avantageuses pour déterminer la latitude [13] sont celles qui bissectent l'éventail horaire 12 h – 18 h, soit ici 15 h 30 m, l'angle tabulaire H' entre une ligne horaire et celle de midi étant donné par : $\tan H' = \sin\varphi \tan H$. Plusieurs mesures ont donné une latitude [14] de $49° \pm 0\overset{\circ}{.}2$.

La détermination du rayon du cadran en projection stéréographique a été effectuée à la fois directement sur le cadran puis en mesurant des cordes entre des points de coordonnées (H,δ) et en les comparant au calcul théorique [15]. On a déduit un rayon de 19,4 cm, ce qui permet ensuite de vérifier que l'obliquité adoptée [16] est de $23°\,30'$.

La cohérence de l'obliquité et de la latitude s'observe sur les quatre cornes du tracé horaire qui sont les intersections du cercle de l'horizon avec les deux arcs solsticiaux. Il est possible de lire très précisément l'azimut A de ces points (mesuré depuis les points Est ou Ouest) que l'on calcule par $\sin A = \frac{\sin 23\overset{\circ}{.}5}{\cos\varphi}$. Le résultat du calcul est $37\overset{\circ}{.}4$ et on lit sur le cadran que $37° < A < 37\overset{\circ}{.}5$.

Le double cadran est donc bien tracé pour la latitude de Paris comme le confirment à la fois les exemples donnés dans la brochure explicative et dans les longitudes figurant sur le limbe (*cf. infra*).

3 Les longitudes

Dans la couronne de 4 cm de large, au bord du cadran, se trouvent 28 villes où est indiqué par un trait fin l'heure solaire qu'il est à Paris lorsqu'il est midi dans la ville considérée, ce qui est une façon d'indiquer la longitude puisque celle-ci est la différence des temps solaires entre deux lieux. La longitude de la ville est alors égale à l'heure du midi vrai de la ville - 12 h pour les lieux situés à l'Est du méridien de Paris, et à 12 h + l'heure du midi vrai de la ville pour les lieux situés à l'Ouest du méridien de Paris (fig. 7 page ci-contre)

Par exemple la première ville est Pékin où on lit que lorsqu'il est midi solaire, il est 4 h 22 m à Paris, soit une longitude de -7 h 38 m. Les longitudes étant données par rapport au méridien de Paris, on voit que Marseille a une longitude de - 13 min et Londres une longitude de + 9 min.

---

12. L'accès au cadran a été possible grâce à l'aide de Cyrille Foasso, responsable de collection au musée des Arts et Métiers.

13. D. Savoie, *La Gnomonique*, *op. cit.*, p. 352-355.

14. Dans son ouvrage *The description and use of an universal and perpetual mathematical instrument*, Londres, 1733, p. 118, Scott donne pour Paris une latitude de $48°\,51'$ et une longitude par rapport à Londres de $2°\,30'$ Est, soit en temps - 10 min. Dans la liste des villes pour lesquelles il donne une longitude sur le cadran, Londres est placée à 9 min de longitude, soit $2°\,15'$. Notons que si Scott a tracé son cadran solaire avec une latitude de $48°\,51'$ (et non 49°), la mise en évidence de cette différence sur le cadran est quasiment impossible puisque l'écart maximal (pour $H = \pm 53°$) vaut $0°\,3'\,55''$, soit 0,3 mm.

15. Par exemple on mesure la distance entre le point ($H = +30°$ et $\delta = -20°$) et le point ($H = +90°$ et $\delta = 0°$) : on obtient 17,8 cm. Dans le calcul en coordonnées rectangulaires, on détermine la distance théorique $\rho_0 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ où Δx et Δy sont les différences des coordonnées. En faisant varier de rayon de 10 cm à 25 cm avec un pas de 1 mm, on obtient un rayon $R = 19{,}4$ cm pour la valeur qui correspond le mieux aux mesures de cordes. Huit distances ont ainsi été mesurées sur le cadran. On vérifie également que l'incertitude de $0\overset{\circ}{.}1$ en latitude a très peu d'influence sur le rayon.

16. L'obliquité réelle est de $23°\,29'$ à cette époque.

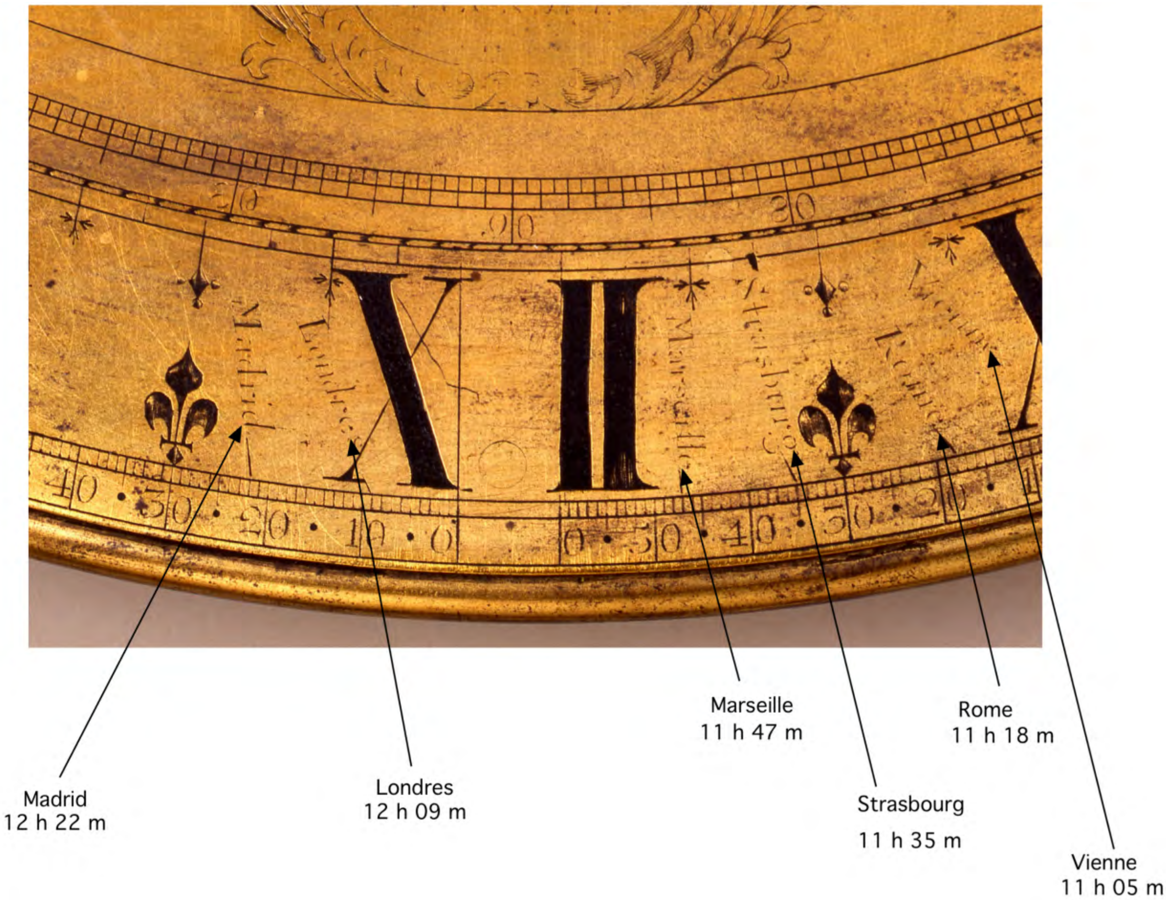

Figure 7 – Détail montrant la couronne gnomonique avec la ligne midi du cadran où le X est séparé du II en raison de l'épaisseur du style polaire. On a indiqué quelques villes où le midi solaire est marqué.

4 Principe d'orientation du double cadran

Rappelons qu'un double cadran se compose d'un cadran solaire à style polaire où la détermination de l'angle horaire est directe (l'ombre du style s'aligne sur une ligne horaire), et d'un cadran solaire à style droit où la mesure de l'angle horaire se fait par l'intermédiaire de l'azimut et de la déclinaison du Soleil (l'ombre coupe deux cercles). À priori, on ne connaît pas la direction Nord-Sud géographique, de sorte que la platine, maintenue parfaitement horizontalement, doit être tournée manuellement autour d'un axe imaginaire passant par le zénith. Cela a deux conséquences : d'une part le style polaire pointe successivement vers des directions différentes sur un parallèle de hauteur, de sorte que l'ombre du style coupe successivement des lignes horaires. Et d'autre part, pour une déclinaison donnée, l'ombre du style droit coupe les cercles horaires d'azimuts variés. Il n'existe qu'un seul instant [18] où l'ombre du style polaire indique la même heure que l'ombre du style droit : c'est lorsque la

18. En fait il existe une deuxième solution lorsque le style polaire pointe vers le Sud, c'est-à-dire lorsque l'on fait une rotation de 180° de la ligne midi. Ce procédé d'orientation utilisant deux cadrans de principes différents dans la détermination de l'angle horaire du Soleil, qui a donné par exemple des boussoles solaires, s'applique également au cadran solaire analemmatique horizontal, qui est aussi un cadran d'azimut, mais qui utilise la projection orthographique, ce qui réduit le cadran à une seule ellipse mais implique le déplacement du gnomon en fonction de la déclinaison du Soleil. Voir C. Macrez, « Cadrans solaires d'azimut (projections orthographique et stéréographique) », *L'Astronomie*, octobre 1976, p. 435-438.

Table 1
Heure du midi vrai des 28 villes gravées sur le cadran de Scott.

Villes	Heure à Paris lorsqu'il est midi vrai dans une ville (inscrite sur le cadran)	Heure moderne [17]
Pékin	4 h 22 m	4 h 24 m
Siam [Bangkok ?]	5 h 26 m	5 h 27 m
Bengale [Calcutta ?]	6 h 10 m	6 h 16 m
Pondichéry	6 h 49 m	6 h 50 m
Surate	7 h 08 m	7 h 18 m
Ispahan	8 h 23 m	8 h 43 m
Bagdad	8 h 55 m	9 h 12 m
Alep	9 h 30 m	9 h 41 m
Jérusalem	9 h 40 m	9 h 48 m
Alexandrie	10 h 08 m	10 h 10 m
Constantinople [Istanbul]	10 h 15 m	10 h 13 m
Dantzig [Gdansk]	10 h 52 m	10 h 55 m
Vienne	11 h 05 m	11 h 04 m
Rome	11 h 18 m	11 h 19 m
Strasbourg	11 h 35 m	11 h 38 m
Marseille	11 h 47 m	11 h 48 m
Londres	12 h 09 m	12 h 09 m
Madrid	12 h 22 m	12 h 24 m
Lisbonne	12 h 49 m	12 h 46 m
Madère [Funchal ?]	1 h 18 m	1 h 17 m
Pernambouc [Recife ?]	2 h 45 m	2 h 29 m
Cayenne	3 h 45 m	3 h 39 m
Martinique	4 h 13 m	4 h 13 m
Québec	4 h 50 m	4 h 54 m
Lima	5 h 26 m	5 h 17 m
Panama	5 h 38 m	5 h 27 m
Mexico	7 h 04 m	6 h 46 m
Acapulco	7 h 20 m	6 h 49 m

platine est alignée sur le méridien du lieu. D'un point de vue astronomique, cela signifie que pour un azimut et une déclinaison donnés du Soleil ne correspond qu'un seul angle horaire possible, ce que le triangle sphérique de position résume bien.

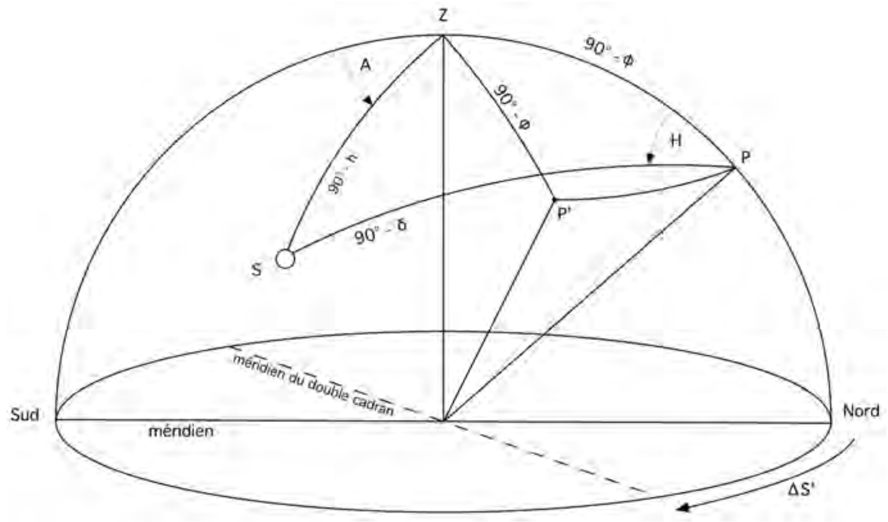

Figure 8 – Pour orienter le double cadran sur le méridien, on le fait pivoter autour de la verticale du lieu (zénith) d'un angle $\Delta S'$: au lieu de pointer vers le pôle céleste Nord P, le style polaire pointe ici en P' (Nord-Est). Les deux cadrans solaires, dont un dépend de l'azimut et de la déclinaison du Soleil, indiquent le même angle horaire uniquement si le style pointe vers P.

D'un point de vue gnomonique, on se trouve devant un problème d'orientation de style (fig. 8) : l'ombre du style polaire, qui ne pointe pas dans la bonne direction, recouvre une ligne horaire à un instant incorrect [19] ; de même, l'ombre du style droit coupe le réseau de cercles horaires à un autre instant incorrect. Appelons F_{pol} l'angle horaire (fautif) indiqué par le style polaire dû à une rotation $\Delta S'$, et F_{az} l'angle horaire (fautif) indiqué par le style droit dû à une rotation $\Delta S'$. L'angle de rotation $\Delta S'$ (qui est en fait un azimut) est positif lorsque la ligne midi du cadran horizontal pointe vers le Nord-Est. H est l'angle horaire vrai du Soleil, δ sa déclinaison et φ la latitude du lieu. On a :

$$\begin{cases} A = \sin\varphi \tan\delta + \cos\varphi \cos H \\ B = \sin\varphi \cos H - \tan\delta \cos\varphi \end{cases} \qquad \tan F_{pol} = \frac{\sin H - A \cot\varphi \sin\Delta S'}{\sin\varphi \ (B + A \cot\varphi \cos\Delta S')}$$

Quant au cadran en projection stéréographique, au lieu d'indiquer l'azimut A correct du Soleil, il indique un azimut erroné A' tel que $A' = A - \Delta S'$. Il s'agit donc d'extraire de la formule classique l'angle horaire erroné F_{az} :

$$\tan A' = \frac{\sin F_{az}}{\sin\varphi \cos F_{az} - \cos\varphi \tan\delta}$$

avec

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin\varphi \cos H - \cos\varphi \tan\delta}$$

A étant du même signe que H.

On obtient F_{az} de la façon suivante :

$$\tan M = \sin\varphi \tan A' \qquad M \text{ étant du même signe que } A'$$

19. Ce problème est traité par D. Savoie, *La Gnomonique*, *op. cit.*, p. 325-329.

$$n = \frac{\sin\varphi}{\sin M}$$
$$F_{az} = M - \arcsin\left(\frac{\cos\varphi\tan\delta}{n}\right)$$

Pour un angle horaire et une déclinaison du Soleil donnés, on fait varier $\Delta S'$, par exemple de $+45°$ à $-45°$, donc du Nord-Est au Nord-Ouest. On constate alors que les deux courbes d'erreurs s'annulent à un seul instant qui correspond à $\Delta S' = 0°$, c'est-à-dire lorsque la ligne midi du double cadran est orientée exactement vers le Nord géographique (fig. 9). On alors $F_{pol} = F_{az}$.

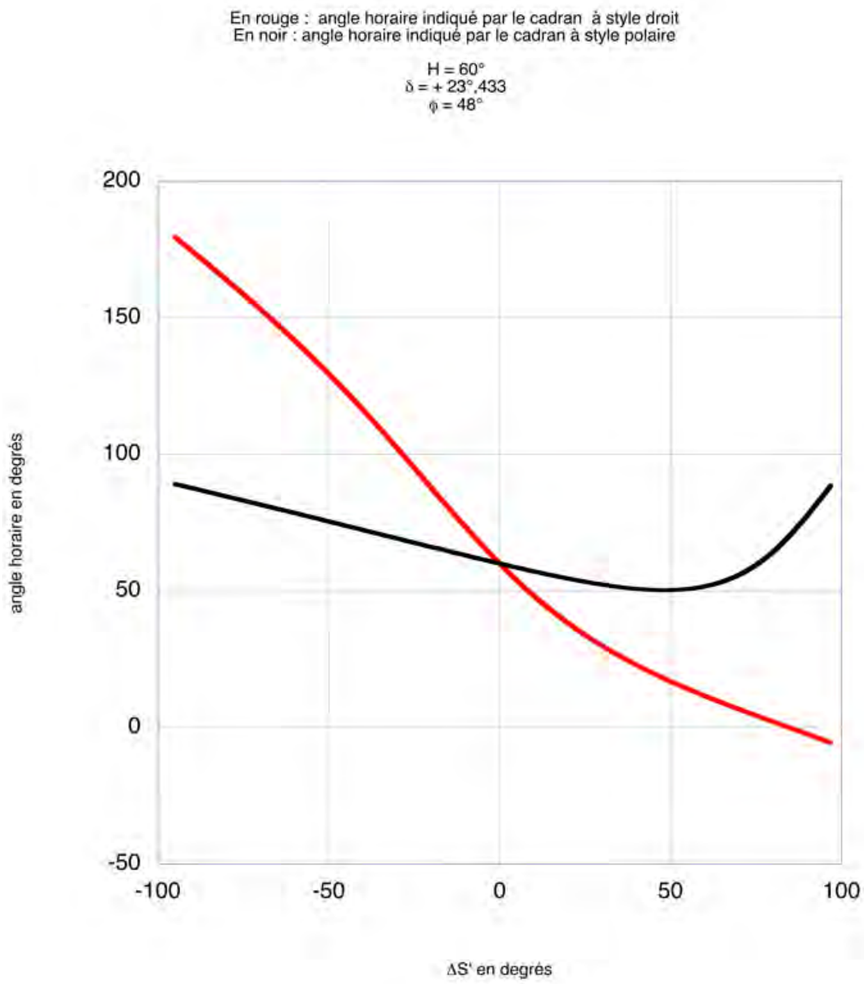

Figure 9 – Les deux courbes tracées indiquent l'heure solaire d'un double cadran dont on cherche l'orientation au solstice d'été. On oriente l'ensemble un peu au hasard au début, en partant ici du Nord-Ouest pour aller vers le Nord-Est. Plus on se rapproche de la direction du méridien, plus les deux cadrans indiquent une heure voisine jusqu'à la coïncidence : le cadran est alors dans le plan méridien.

5 Traduction commentée du texte de Benjamin Scott

Le texte suivant est la traduction en français de la brochure manuscrite (réf. Sloane MS 2040, British Library), sans doute écrite de la main de Benjamin Scott en 1713, pour accompagner le double cadran solaire horizontal qu'il a calculé et gravé pour Paris [20]. Le manuscrit comporte 7 pages, seule la page de titre est imprimée.

Description et quelques exemples d'utilisations du double cadran horizontal
Année 1713
Par Mr Scott

Utilisation du cadran

Le cercle le plus extérieur du cadran horizontal contient toutes les minutes [des heures], le suivant étant le cercle des azimuts (ou des amplitudes), divisé en degrés et chiffré 10, 20, 30, 40 etc, de l'Est et de l'Ouest, [tantôt] vers le Nord et [tantôt] vers le Sud. Chaque cinquième [de degré] est caractérisé par une division plus longue et tous les degrés sont biseautés par un trait plus court.

Dans la partie Ouest [qui contient] les heures du matin, les jours et les mois vont du milieu de l'hiver [solstice d'hiver] au milieu de l'été [solstice d'été], et dans la partie Est [qui contient] les heures de l'après-midi [on trouve] du milieu de l'été au milieu de l'hiver, chaque cinquième jour est caractérisé par un trait plus long que les autres. Au sein de ces divisions, il faut noter que les jours du mois sont situés sur un cercle concentrique de la partie extérieure du limbe.

Dans les parties Est et Ouest de l'horizon sont tracés 49 arcs de cercles ; celui qui est tracé au milieu, du 21 mars au 23 septembre, est appelé [cercle] équatorial ; les autres cercles sont appelés parallèles de déclinaison. C'est le cas de ceux situés entre le cercle équatorial et le centre des parallèles de déclinaison nord et ceux situés entre le cercle équatorial et le centre des parallèles de déclinaison sud. Les deux [en trait épais] qui sont comptés depuis l'équateur sont numérotés 10°, 20° *à* 23,°5. *Sur l'équateur dans les parties Est vers Ouest de l'horizon, [on trouve] l'ascension droite du Soleil comptée de 1 à 12 et [on trouve] à nouveau [l'ascension droite] de 12 à 24 de l'Ouest vers l'Est.*

Croisant les parallèles [de déclinaison], on a tracé toutes les 5 minutes les cercles horaires, les heures rondes comportant un trait plus épais, tandis que les demi-heures et les quarts d'heures sont figurés par des pointillés. Depuis l'intersection entre l'horizon et le cercle équatorial, on a dessiné deux arcs de cercles qui représentent les deux moitiés de l'écliptique, laquelle est gravée à la fois avec des caractères des douze signes zodiacaux ♈, ♉, ♊, ♋ etc., chaque signe étant divisé en 30° *par des pointillés.*

Depuis le centre de l'horizon, on a délimité deux échelles sous forme de règles, la première représentant la hauteur du Soleil graduée 10°, 20°, 30°, *etc., jusqu'à la hauteur maximale du Soleil ; tous les* 5° *on a tracé un trait plus long afin de distinguer les divisions tandis que chaque degré est représenté par un trait plus court. L'autre partie de la règle est appelée longueur de l'ombre où l'on trouve les nombres 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3 etc. jusqu'à 30, divisé de 3 à 4 tous les dixièmes, de 4 à 10 tous les demis, de 10 à 20 toutes les unités et de 20 à 30 seulement une fois en 25.*

Entre ces échelles et les parallèles de déclinaison, on trouve un autre calendrier des mois et des jours contre lequel se trouve l'équation du temps. À la périphérie [du limbe] sont gravés de nombreux noms de villes qui montrent la différence des méridiens ; par exemple Madrid tombe sur l'index 22, ce qui signifie qu'il est 12 h 22 m à Paris lorsqu'il est midi à Madrid. Le style est double : une première partie est effilée et perpendiculaire au plan depuis le centre du cadran, tandis que l'autre partie est inclinée et épaisse. Le style oblique sert au cadran

20. La présente traduction est basée sur la transcription donnée dans J. Davis et M. Lowne, *The Double Horizontal Dial*, *op. cit.*, p. 16-18.

horizontal classique pour déterminer l'heure du jour grâce à l'ombre latérale du style sur les graduations les plus extérieures. Alors que le style droit sert à déterminer l'heure du jour à l'aide des cercles horaires.

Parmi les problèmes que l'on peut résoudre grâce à ce type de projection, certains nécessitent qu'il y ait du Soleil, d'autres qu'il y en ait ou pas. Voyons d'abord ceux qui peuvent être résolus lorsqu'il n'y a pas de Soleil. La date et le jour étant donnés, on peut trouver les quantités suivantes relatives au Soleil : déclinaison, position, ascension droite, ascension oblique, amplitude, instants de lever et de coucher, longueur du jour et de la nuit, commencement et fin du crépuscule, équation du temps, ce qui représente en tout 9 problèmes différents[21]*. Neuf des problèmes suivants supposent que l'on soit le 12 août.*

Problème 1 — Trouver la déclinaison du Soleil
Cherchez la division qui correspond à la date du 2 septembre, à l'endroit où un cercle de déclinaison coupe l'horizon. On doit trouver que ce cercle de déclinaison correspond à $15^\circ\,5'$ *qui est la déclinaison du Soleil pour la date du 2 septembre*[22]*.*

Problème 2 — Trouver l'instant de lever du Soleil
Regardez sur l'horizon où le cercle horaire du matin rencontre le cercle de déclinaison [du jour en question]. Dans cet exemple, on doit trouver que le Soleil se lève à 4 h 48 m. En procédant de la même façon, on peut trouver l'heure de coucher du Soleil[23]*.*

Problème 3 — Trouver l'amplitude du Soleil à son lever-coucher
Posez le bord d'une règle droite (ou imaginez une ligne droite) depuis le pied du style droit jusqu'à son intersection avec l'horizon, soit avec le jour du mois considéré, soit avec un cercle de déclinaison. L'intersection de la droite avec le cercle des amplitudes (qui vaut dans cet exemple $23^\circ\,15'$*) donne alors l'azimut du jour considéré*[24]*.*

Problème 4 — Trouver la durée du jour et de la nuit
Le double de l'heure du lever du Soleil donne la durée de la nuit. Le double de l'heure du coucher du Soleil donne la longueur du jour[25]*.*

Problème 5 — Trouver le début du crépuscule

21. Le texte donne 90 problèmes : faute de frappe.

22. Il y a de toute évidence un problème de date car l'auteur dit une ligne plus haut qu'il faudra considérer la date du 12 août alors qu'il prend ici le 2 septembre. La valeur de la déclinaison donnée $\delta = 15^\circ\,5'$ correspond bien à la date du 12 août (1713). Les $5'$ sont illusoires en précision, bien qu'un examen précis du cadran montre que le cercle de déclinaison 15° intercepte le cercle d'horizon un peu au-dessus du 12 août. 1° en déclinaison correspond sur le cadran à 0,33 cm pour le cercle horaire en question (19 h 10 m) ; donc $5'$ correspondent à 0,028 cm, quantité inappréciable à l'oeil nu sur le cadran. Le calcul moderne basé sur la théorie VSOP87 donne une déclinaison du Soleil de $15^\circ\,0'$.

23. On vérifie que l'arc demi-diurne H_0 ($\cos H_0 = -\tan\varphi \tan\delta$ avec $\varphi = 49^\circ$ et $\delta = 15^\circ\,5'$) vaut $108^\circ\,4'$, ce qui divisé par 15 et soustrait de 12 h donne bien 4 h 48 m. L'heure du coucher du Soleil vaut 19 h 12 m [12 h + $(108^\circ\,4'/15)$].

24. On appelle amplitude (*ortive* pour l'Est et amplitude *occase* pour l'Ouest) l'azimut du Soleil compté depuis les points cardinaux Est et Ouest. L'azimut A du Soleil au coucher (compté depuis le Sud) se calcule par $\cos A = -\sin\delta / \cos\varphi$, soit $113^\circ\,22'$, d'où l'on soustrait 90° pour obtenir l'azimut depuis l'Est ou l'Ouest, ce qui donne $23^\circ\,22'$. Il y a une légère différence avec la valeur de Scott, sans doute due à un arrondi de la déclinaison à 15°. Les minutes sont de toute façon très difficiles à apprécier sur le cadran.

25. On vérifie en effet que (4 h 48 m) multiplié par 2 = 9 h 36 m = durée de la nuit ; et que l'heure du coucher (qui vaut 7 h 12 m) multipliée par 2 donne une durée jour de 14 h 24 m. La durée du jour se calcule par $2\,H_0/15$.

Placez la pointe d'un compas sur le centre du cadran[26] *et l'autre extrémité sur le 15ᵉ degrés de l'échelle des hauteurs du Soleil. Faites tourner le compas autour de sa pointe de telle sorte que son autre extrémité tombe sur le parallèle de déclinaison* 15° *Sud si la déclinaison du Soleil est positive (et inversement* 15° *Nord si la déclinaison est négative), dans la partie correspondant aux heures avant midi. La pointe du compas tombe alors sur une courbe horaire qui indique depuis combien de temps le crépuscule a commencé, ce qui dans notre exemple est de 2 h 30 m. En procédant de la même façon, on obtient la fin du crépuscule du soir si l'on connaît l'heure de crépuscule du matin.*

Problème 6 — Trouver la position [longitude] du Soleil
Regardez où le parallèle de déclinaison coupe l'écliptique dans la partie comprise entre le jour considéré et le méridien ; on obtient alors la longitude écliptique du Soleil qui est dans cet exemple[27] *de* ♌19° 25′.

Problème 7 — Trouver l'ascension droite du Soleil
Regardez précisément le long d'un cercle horaire où passe l'intersection entre la position écliptique du Soleil et l'équateur ; celle-ci indique alors l'ascension droite, qui dans notre exemple[28] *est de 9 h 27 m.*

Problème 8 — Trouver l'ascension oblique
Comptez combien de temps s'est écoulé entre le lever du Soleil et 6 h (avant ou après), et ajoutez l'ascension droite si la déclinaison du Soleil est négative (soustrayez l'ascension droite si la déclinaison est positive) ce qui donne dans notre exemple une ascension oblique[29] *de 18 h 15 m.*

Problème 9 — Trouver l'équation du temps

---

26. L'auteur cherche depuis combien de temps le crépuscule du matin a commencé (depuis minuit), soit $(180° - H)$, H étant l'angle horaire du Soleil lorsque sa hauteur vaut h_0 calculée par $\cos H = \dfrac{\sin h_0 - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$. En général on prend $h_0 = -18°$ et non $h_0 = -15°$ comme le précise l'exemple (faute de frappe ou confusion entre déclinaison et hauteur) pour déterminer à quelle heure la nuit totale finit ou commence. La déclinaison du Soleil étant de $+15°$, on a $H = 142{,}^\circ738$, d'où heure de commencement $= (180° - H)/15 = 2$ h 29 m du matin (Scott = 2 h 30 m). Comme le tracé du cadran est limité aux hauteurs positives (alors qu'un astrolabe peut indiquer les hauteurs négatives et donc les angles horaires du Soleil sous l'horizon), Scott contourne la difficulté habilement : on décrit sur le cadran un cercle de hauteur $+18°$ centré sur le zénith, interceptant le matin le cercle de déclinaison opposé en signe à la déclinaison réelle soit $-15°$, de telle sorte que l'on puisse lire directement sur le cercle horaire l'angle horaire H' qui vaut $(180° - H)$. Ce qui revient à déterminer H' tel que : $\cos H' = \dfrac{\sin h'_0 - \sin\varphi\sin\delta'}{\cos\varphi\cos\delta'}$ où $\delta' = -\delta$ et $h'_0 = -h_0$. On vérifie en effet que $(H + H' = 180°)$. Pour le crépuscule du soir, on en déduit qu'il finit à 2 h 30 m avant minuit, soit à 21 h 30 m (21 h 29 m valeur correcte).

27. La longitude écliptique étant tracée ici comme croissante de l'Ouest vers l'Est, Scott précise bien de considérer ici la partie située après le méridien (puisque le cercle de déclinaison coupe aussi l'écliptique dans le signe du Taureau, la déclinaison du Soleil prenant deux fois la même valeur au cours de l'année). La valeur de la longitude, qui signifie 19° 25′ dans le signe du Lion, vaut donc $120° + 19°\,25' = 139°\,25'$. Il est difficile de dire ici si cette valeur résulte réellement d'une lecture sur le cadran ou du calcul théorique. De la longitude écliptique λ se déduit la déclinaison δ et l'ascension droite α par les relations : $\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda$ et $\tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\lambda$, l'obliquité ε valant ici $23°\,30'$.

28. Cette valeur est cohérente avec la longitude écliptique mais résulte sans doute du calcul.

29. L'ascension oblique ρ est l'arc d'équateur qui se lève simultanément avec un arc de longitude. On a $(\rho = \alpha - n)$ avec $\sin n = \tan\varphi\tan\delta$. Avec les valeurs de Scott, on a $\alpha = 141°\,45'$ (9 h 27 m) et $n = 18°\,4'$ d'où $\rho = 123°\,41'$ soit 8 h 15 m. Scott donnant 18 h 15 m, il y a une faute de frappe : il faut lire 8 h 15 m.

Cherchez le jour du mois considéré sur le cercle de l'équation du temps et vous aurez la valeur qui peut varier lentement ou rapidement ; dans notre exemple[30] *elle est additive et vaut 4 m 30 s. Comme il a été mentionné, la hauteur du Soleil et la longueur de l'ombre étant données, on peut déterminer d'autres quantités. De plus, deux valeurs étant données comme la hauteur et l'azimut du Soleil, sa déclinaison, l'heure du jour, les autres quantités peuvent être déterminées, produisant 6 problèmes différents comme les deux suivants.*

Problème 10 — La hauteur et la déclinaison étant données, trouver l'heure
Placez la pointe du compas au centre du cadran et ouvrir le compas en fonction de la hauteur donnée [sur l'échelle] ; décrire un cercle et noter où a lieu l'intersection avec un parallèle de déclinaison (en utilisant les heures du matin si on est avant midi et les heures de l'après-midi si on est après le midi) ; l'endroit où se coupent les deux cercles donne alors l'heure indiquée par un cercle horaire[31]*.*

Problème 11 — La hauteur et la déclinaison étant données, trouver l'azimut
Prenez une règle (ou imaginez une droite) passant par le centre [du cadran] et le point du parallèle de déclinaison sur lequel se trouvait le repère du compas lors du problème précédent. Alors l'intersection de cette droite avec le cercle des azimuts vous donne l'azimut du Soleil[32]*, comptés depuis l'Est le matin et comptés depuis l'Ouest l'après-midi. Notez qu'au lieu de la déclinaison, toutes les quantités mentionnées dans les neufs premiers problèmes (ou à la place de la hauteur on peut substituer la longueur de l'ombre, l'heure et l'azimut) peuvent être déterminées, ce qui multiplie considérablement les problèmes qui peuvent être résolus.*

Problèmes pouvant être résolus lorsque le Soleil brille

Problème 12 — Le cadran étant correctement placé, comment connaître l'heure du jour par les cercles horaires ?
Regardez où l'ombre du style droit coupe le cercle de déclinaison du jour donné : son intersection avec le cercle horaire donne l'heure.

Problème 13 – Pour installer le cadran
Vérifiez en premier que la surface du piédestal est bien horizontale. Puis tournez le cadran sur lui-même jusqu'à ce que l'heure du jour indiquée par l'ombre du style oblique indique la même heure que l'ombre indiquée par l'ombre du style droit.

Le cadran étant correctement orienté et le Soleil brillant, on peut déterminer sa déclinaison, sa [longitude écliptique], son ascension droite, son ascension oblique, le mois et le jour, les heures de lever et de coucher, le début et la fin du crépuscules, son amplitude, sa hauteur, son azimut, la longueur de l'ombre, l'équation du temps.

---

30. Valeur en excellent accord avec le calcul moderne pour le 12 août 1713 à 12 h UT qui donne 4 m 32 s pour l'équation du temps.

31. Ce problème revient à déterminer l'angle horaire H du Soleil connaissant la hauteur h et la déclinaison δ, ce qui se résume par : $\cos H = \dfrac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$. La règle est gravée pour donner la hauteur du Soleil de 0° à 65° ; il s'agit de la projection de cercles de hauteurs concentriques dont le style droit est le centre. Imaginons que le 12 août on cherche l'heure alors que la hauteur du Soleil est de 40° l'après-midi : on obtient $H = 45{,}^\circ 082$ soit 3 heure solaire.

32. Cela revient à chercher l'azimut par la formule $\cos A = \dfrac{\cos\delta \sin H}{\cos h}$. En reprenant l'exemple 10 où $h = 40°$, $H = 45°$ et $\delta = +15°$, on obtient $A = 26{,}^\circ 8$.

Ainsi, regardez en premier l'heure solaire du jour sur la graduation extérieure du cadran puis l'intersection de l'ombre du style droit avec un cercle horaire en fonction de la déclinaison. À partir de là, comme dans les neufs premiers problèmes, on peut déterminer la longitude du Soleil, son ascension droite, son ascension oblique, et connaissant le jour du mois, l'instant de lever et de coucher, le début et la fin du crépuscule, l'azimut ortive et occase, l'équation du temps, et comme dans les douzièmes et treizièmes problèmes, on peut trouver à un instant donné l'azimut, la hauteur et la longueur de l'ombre.

Figure 10 – Détails sur les informations astronomiques figurant dans la partie correspondant aux heures de l'après-midi. Les deux cercles de l'écliptique se rencontrent sur l'équateur qui est aussi l'intersection avec le cercle horaire VI, le 23 septembre. En dessous le cercle des amplitudes indique 0.