



**HAL**  
open science

# INFLUENCE D'UNE PROFONDEUR VARIABLE SUR LES COURANTS INDUITS PAR LE VENT

B. Saint-Guily

► **To cite this version:**

B. Saint-Guily. INFLUENCE D'UNE PROFONDEUR VARIABLE SUR LES COURANTS INDUITS PAR LE VENT. *Vie et Milieu*, 1971, pp.227-238. hal-02966688

**HAL Id: hal-02966688**

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-02966688v1>

Submitted on 14 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **INFLUENCE D'UNE PROFONDEUR VARIABLE SUR LES COURANTS INDUITS PAR LE VENT**

par B. SAINT-GUILY

*Muséum National d'Histoire Naturelle, Paris  
Laboratoire Arago, 66 - Banyuls-sur-Mer*

### **SOMMAIRE**

Le relief du fond et la rotation de la terre modifient de façon drastique la circulation marine. L'analyse théorique présentée ici, porte sur deux modèles simples figurant les courants produits par le vent sur un talus continental, le long d'une côte rectiligne et dans un bassin circulaire.

L'influence du relief du fond sur les courants dans un liquide en rotation est une question qui intéresse l'hydrodynamique théorique et la dynamique des mers. Le théorème de J. PROUDMAN (1916) et les expériences de G.I. TAYLOR (1923) ont mis en évidence l'existence des « colonnes » de Proudman-Taylor. Ces colonnes sont des remous qui se produisent dans certaines conditions (nombre de Rossby petit), et qui résultent des perturbations que le relief du fond impose aux courants et que la rotation amplifie de façon considérable. Dans les océans ces remous sont complexes puisqu'ils subissent l'action transitoire du vent.

L'effet de la topographie du fond sur les courants marins a été étudié d'abord par V.W. EKMAN, H. GORTLER, etc... (voir A. DEFANT, 1961) et, plus récemment au sujet du Gulf Stream, par B. SAINT-GUILY (1957), B.A. WARREN (1963), H.P. GREENSPAN (1963) et P. WELANDER (1968). Mais ces études portent sur les modifications des courants d'inertie et planétaires par un relief du fond à



grande échelle (celle d'un océan). Nous nous proposons d'examiner ici deux modèles simples, à plus petite échelle, avec une topographie du fond figurant un plateau continental. L'analyse de ces cas montre que l'influence du relief du fond sur la structure des courants induits par le vent au voisinage des côtes doit être considérable au moins en l'absence de stratification. Nous laissons provisoirement de côté l'influence des termes d'inertie, en admettant que la tension du vent et le frottement sont les forces dominantes.

### ÉQUATION DES TOURBILLONS

Nous considérons les mouvements plans, permanents, induits par le vent dans un liquide en rotation. La densité est constante, et la pression hydrostatique. Nous supposons de plus que les mouvements sont lents, et soumis à un frottement proportionnel à la vitesse. Cette dernière hypothèse est évidemment approximative; mais elle conduit à une formulation bidimensionnelle, beaucoup plus simple que celle d'Ekman. D'ailleurs, dans la théorie d'Ekman, la condition de vitesse nulle sur le fond n'est pas physiquement satisfaisante; elle devrait être remplacée par une condition de tension proportionnelle au carré de la vitesse. Les équations du mouvement sont alors les suivantes :

$$-2\omega v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\tau_x}{\rho h} - \kappa u, \quad (1)$$

$$2\omega u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\tau_y}{\rho h} - \kappa v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0. \quad (3)$$

$\zeta$  désigne la dénivellation de la surface libre,  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation (plus précisément la composante verticale de la rotation terrestre),  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $h$  la profondeur,  $\kappa$  le coefficient de frottement linéaire, et  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  les composantes de la tension du vent. L'équation de continuité (3) montre qu'il existe une fonction de courant  $\Psi$  définie par

$$hu = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad hv = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Les relations (1), (2), (4) nous donnent, en éliminant  $\zeta$ , une équation



tion des tourbillons qui a la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{2\omega}{\kappa h^2} \frac{\partial(h, \psi)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{\kappa \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_y}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_x}{h} \right) \right\}. \quad (5)$$

Sur une courbe frontière  $F$ , séparant deux régions où les profondeurs  $h$  sont distinctes,  $\Psi$  doit satisfaire à deux conditions. La première exprime la continuité du débit ou flux normal  $hu_n$ ; la seconde exprime la continuité de la pression, c'est-à-dire celle de la surface libre, et, par conséquent la continuité du gradient tangentiel de la surface libre  $\partial\zeta/\partial s$ . On a donc sur  $F$ , compte tenu de (1), (2) et (4), les conditions de raccord

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \text{ continue sur } F, \quad (6)$$

$$\frac{1}{h} \left( 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial s} + \kappa \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\tau_s}{\rho} \right) \text{ continue sur } F, \quad (7)$$

où  $s$  et  $n$  désignent respectivement les directions de la tangente et de la normale à la courbe  $F$ , la rotation de  $s$  vers  $n$  étant directe. Bien entendu, sur une côte  $C$  il faut écrire simplement la condition de débit normal nul :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad \text{sur } C. \quad (8)$$

Nous n'utiliserons pas ici les conditions (6) et (7). L'équation (5) et la condition (8) vont nous permettre de voir comment la présence d'un plateau continental modifie la circulation due au vent.

### COTE RECTILIGNE

Plaçons-nous dans le cas d'une mer semi-infinie, limitée seulement par une côte rectiligne  $x=0$ , et d'un fond de forme exponentielle défini par

$$h = h_0 e^{ax}. \quad (9)$$

Et supposant le vent soufflant vers le large dans une direction perpendiculaire à la côte, soit

$$\tau_x = \frac{\tau}{2} \left( 1 + \text{Cos} \frac{\pi y}{a} \right) e^{-\frac{\pi x}{a}}, \quad \tau_y = 0. \quad (10)$$



L'équation (5) se réduit à

$$\Delta\psi - \alpha \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{2\omega\alpha}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\tau\pi}{2\kappa\rho a} e^{-\frac{\pi x}{a}} \text{Sin} \frac{\pi y}{a}. \quad (11)$$

Compte tenu de la condition (8), on obtient facilement la solution suivante :

$$\psi = \frac{\tau}{2\rho\alpha(4\omega^2 + \kappa^2)} \left\{ \left[ \kappa \text{Sin} \frac{\pi}{a} (y + \lambda x) - 2\omega \text{Cos} \frac{\pi}{a} (y + \lambda x) \right] e^{-\mu \frac{\pi x}{a}} - \left( \kappa \text{Sin} \frac{\pi y}{a} - 2\omega \text{Cos} \frac{\pi y}{a} \right) e^{-\frac{\pi x}{a}} \right\} \quad (12)$$

avec

$$\mu = \frac{\alpha a}{2\pi} \left( \frac{2\omega}{\lambda\kappa} - 1 \right), \quad (13)$$

$$2\lambda^2 = \left\{ \left( 1 + \frac{\alpha^2 a^2}{4\pi^2} \right)^2 + \left( \frac{2\omega\alpha a}{\pi\kappa} \right)^2 \right\}^{1/2} - \left( 1 + \frac{\alpha^2 a^2}{4\pi^2} \right).$$

Dans le cas d'une profondeur  $h$  constante, et avec le même champ de vent (10), on a la solution

$$\psi = \frac{\tau}{2\kappa\rho} x e^{-\frac{\pi x}{a}} \text{Sin} \frac{\pi y}{a}. \quad (14)$$

Les lignes de courant correspondant à ces deux solutions sont tracées sur la figure 1 pour une profondeur constante, et sur la figure 2 pour un fond exponentiel. Les valeurs numériques choisies sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} 2\omega = 1.10^{-4} \text{s}^{-1}, & \alpha = 3.10^{-7} \text{cm}^{-1}, \\ a = 3.10^7 \text{cm}, & \tau = 5g \text{cm}^{-1} \text{s}^{-2}, \\ \kappa = 1.10^{-5} \text{s}^{-1}, & h_0 = 5.10^3 \text{cm}. \end{array}$$

Le débit le long de la côte atteint  $1.10^6 \text{m}^3 \text{s}^{-1}$  pour une profondeur constante, et  $1.10^5 \text{m}^3 \text{s}^{-1}$  pour un fond exponentiel (les vitesses respectives sont de l'ordre de 12 et  $5 \text{cm s}^{-1}$ ). Ainsi, dans le cas d'un vent perpendiculaire à la côte, la présence d'un plateau continental modifie la circulation produite par le vent de façon importante; la circulation se trouve resserrée vers la côte, et déplacée vers le Sud (dans l'hémisphère Nord).

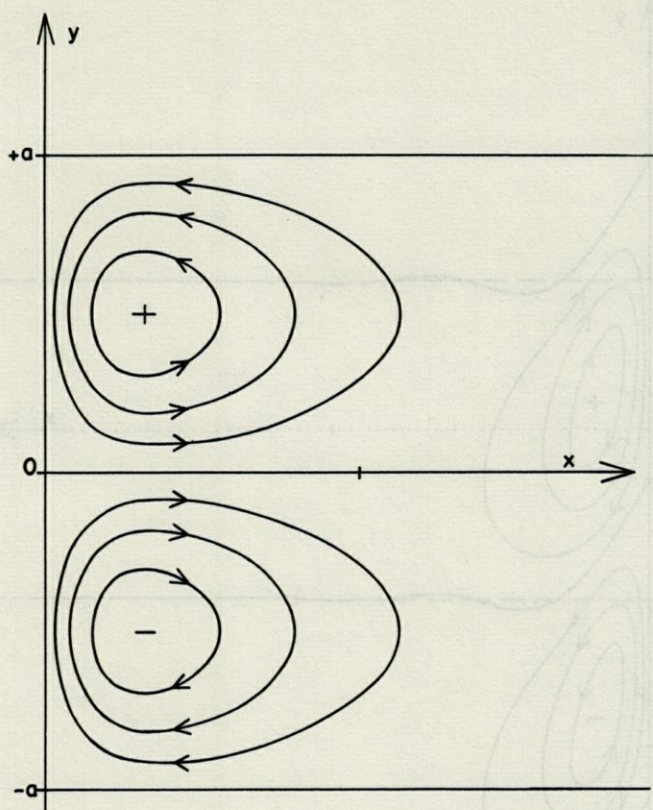


FIG. 1. — Lignes de courant près d'une côte pour une profondeur constante.

### MER FERMÉE DE FORME CIRCULAIRE

Pour calculer la circulation induite dans une mer fermée de forme circulaire, nous écrivons l'équation des tourbillons dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . On a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{h} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{2\omega}{\kappa h^2 r} \frac{\partial(h, \psi)}{\partial(r, \theta)} \quad (15)$$

$$= -\frac{1}{\kappa \rho r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r r_{\theta}}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r_r}{h} \right) \right\}.$$



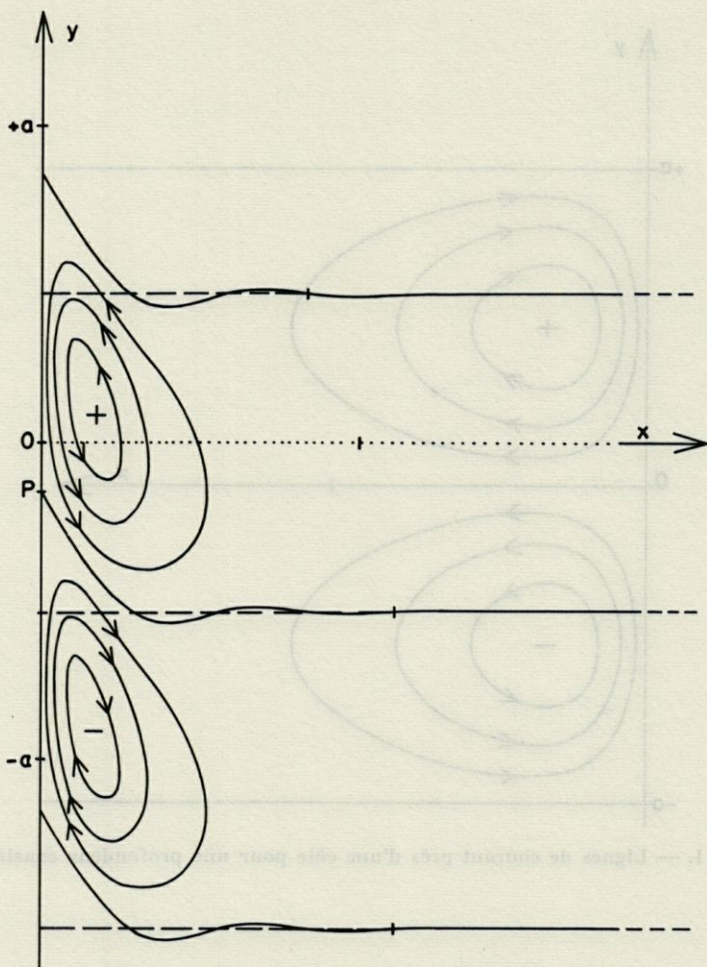


FIG. 2. — Lignes de courant près d'une côte pour un fond exponentiel.

La fonction de courant  $\Psi$  est maintenant définie par

$$hu = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad hv = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (16)$$

En se donnant comme profondeur la fonction

$$h = h_0 \left( \frac{a}{r} \right)^{2s}, \quad (17)$$

on obtient aisément des solutions sous forme explicite. En effet, supposons la tension du vent en surface représentée par

$$\tau_x = \tau \left(1 - \frac{y_2}{a^2}\right), \quad \tau_y = 0,$$

c'est-à-dire par

$$\tau_r = \tau \left\{ \cos \theta - \frac{r^2}{4a^2} (\cos \theta - \cos 3\theta) \right\}, \quad (18)$$

$$\tau_\theta = -\tau \left\{ \sin \theta - \frac{r^2}{4a^2} (3 \sin \theta - \sin 3\theta) \right\}.$$

Avec ces expressions le second membre de (15) s'écrit

$$\frac{2\tau}{\kappa \rho a^2} \left\{ \frac{sa^2}{r} \sin \theta - \left(1 + \frac{3s}{4}\right) r \sin \theta + \frac{s}{4} r \sin 3\theta \right\}.$$

Désignons par  $\Psi_0$  une solution de l'équation avec second membre, et par  $\Psi_*$  une solution de l'équation homogène. La solution  $\Psi$  qui satisfait à la condition sur la côte ( $r = a$ ) est donnée par

$$\psi = \psi_0 + \psi_*. \quad (19)$$

$$\psi_0 = \frac{\tau r}{\rho(4\omega^2 + \kappa^2)} (\kappa \sin \theta + 2\omega \cos \theta) \quad (20)$$

$$+ \frac{\tau r^3}{12a^2 \rho(4\omega^2 + \kappa^2)} (\kappa \sin 3\theta + 2\omega \cos 3\theta)$$

$$- \frac{\tau(4 + 3s)r^3}{4a^2 \rho[4\omega^2 s^2 + \kappa^2(4 + 3s)^2]} \{ \kappa(4 + 3s) \sin \theta + 2\omega s \cos \theta \}.$$

$$\psi_* = - \frac{\tau \alpha}{\rho(4\omega^2 + \kappa^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-s} \quad (21)$$

$$\left\{ \kappa \sin \left( \theta + \alpha \log \frac{r}{a} \right) + 2\omega \cos \left( \theta + \alpha \log \frac{r}{a} \right) \right\}$$

$$- \frac{\tau a}{12 \rho(4\omega^2 + \kappa^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-s}$$

$$\left\{ \kappa \sin 3 \left( \theta + \beta \log \frac{r}{a} \right) + 2\omega \cos 3 \left( \theta + \beta \log \frac{r}{a} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\tau a(4 + 3s)}{4\rho[4\omega^2 s^2 + \kappa^2(4 + 3s)^2]} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-s}$$

$$\left\{ \kappa(4 + 3s) \sin \left( \theta + \alpha \log \frac{r}{a} \right) + 2\omega s \cos \left( \theta + \alpha \log \frac{r}{a} \right) \right\},$$



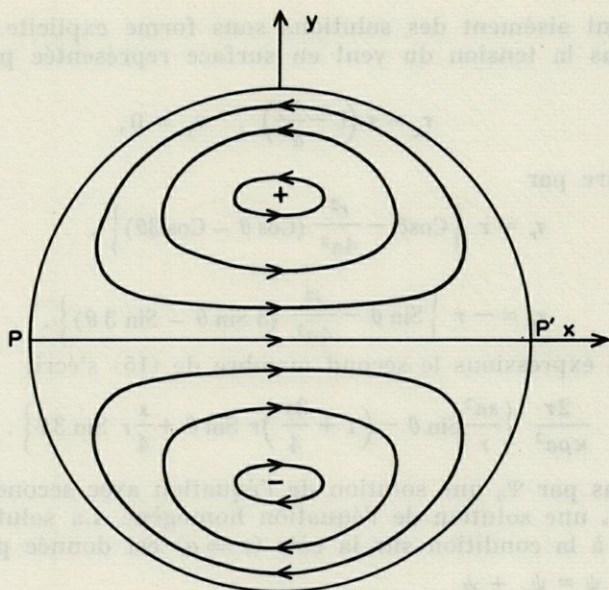


Fig. 3. — Lignes de courant dans une mer circulaire de profondeur constante.

avec

$$n = \left\{ 1 + s^2 + \left[ (1 + s^2)^2 + \left( \frac{4\omega s}{\kappa} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{2\omega s}{\kappa n}, \quad (22)$$

$$m = \left\{ 9 + s^2 + \left[ (9 + s^2)^2 + \left( \frac{12\omega s}{\kappa} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{2\omega s}{\kappa m},$$

Lorsque la profondeur est constante, on a simplement

$$\psi = \frac{\tau}{4\kappa\rho} r \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \sin \theta. \quad (23)$$

Les figures 3 et 4 donnent le dessin des lignes de courant correspondant aux solutions précédentes. Les valeurs numériques adoptées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 2\omega &= 1.10^{-4} \text{ s}^{-1}, & s &= 4, \\ a &= 3.10^7 \text{ cm}, & \tau &= 5 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ \kappa &= 1.10^{-5} \text{ s}^{-1}, & h_0 &= 5.10^3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Les flux atteignent  $2.10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  pour une profondeur constante,

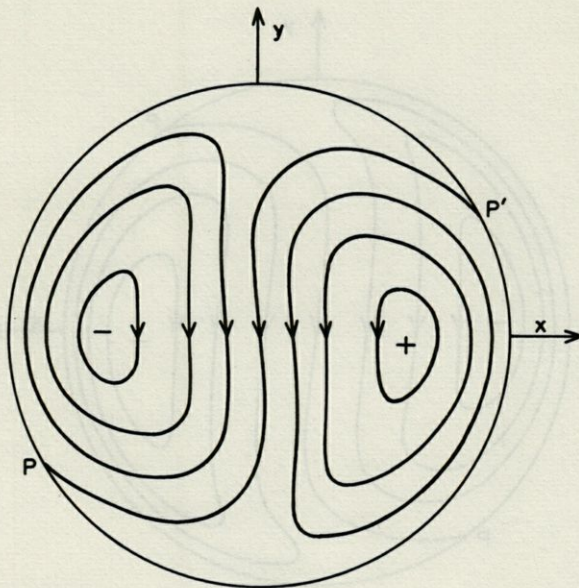


FIG. 4. — Lignes de courant dans une mer circulaire dont la profondeur croît vers le centre.

et  $5 \cdot 10^5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  pour la profondeur variable. On trouve le long de la côte des vitesses de 10 et  $3 \text{ cm s}^{-1}$  environ.

Ce modèle montre clairement que la circulation due au vent est complètement perturbée par le relief du fond. Les deux tourbillons subissent une distorsion et une rotation de près de  $90^\circ$ . Remarquons en outre que, si le vent est uniforme (rotationnel nul), on trouve, pour une profondeur variable, une circulation très voisine de celle de la figure 4, alors que pour une profondeur constante la circulation disparaît. En effet, conservons la loi de profondeur (17), et supposons le vent uniforme :

$$\tau_r = \tau \cos \theta \quad , \quad \tau_\theta = -\tau \sin \theta . \tag{24}$$

On obtient alors la solution

$$\psi = \frac{\tau r}{\rho(4\omega^2 + \kappa^2)} (\kappa \sin \theta + 2\omega \cos \theta) - \frac{\tau a}{\rho(4\omega^2 + \kappa^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-s} \tag{25}$$

$$\left\{ \kappa \sin \left( \theta + \alpha \log \frac{r}{a} \right) + 2\omega \cos \left( \theta + \alpha \log \frac{r}{a} \right) \right\} .$$



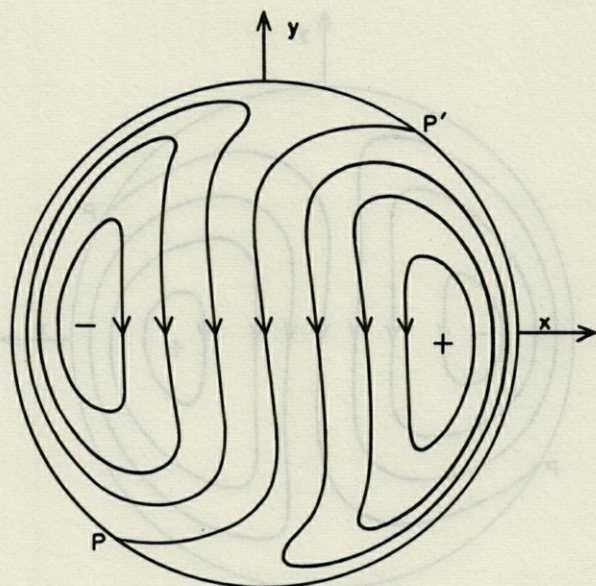


FIG. 5. — Lignes de courant dans une mer circulaire dont la profondeur croît vers le centre, pour un vent uniforme.

dans laquelle  $n$  et  $\alpha$  ont la même signification que dans (22). Les lignes de courant de la figure 5 sont construites à partir de cette solution et des données numériques précédentes. La circulation est qualitativement très proche de celle de la figure 4. Mais le débit et le courant le long de la côte sont ici deux fois plus élevés.

Ces exemples montrent que même en régime permanent le champ de courant engendré par le vent est très sensible au relief du fond, et, par suite, difficilement prévisible. En particulier, la position du point de séparation  $P$  doit dépendre étroitement de la structure du champ de vent, et de la géométrie des fonds et de la côte. En outre, le régime des vents et la réponse des courants présentent la plupart du temps un caractère transitoire, et non un caractère quasi permanent. Nous examinerons prochainement l'évolution des courants marins induits par le vent sur un fond variable, en régime transitoire. Enfin R.C. BEARDSLEY (1969) a montré sur un modèle réduit que, à partir d'un nombre de Rossby critique, le mouvement permanent devient instable. Ainsi, l'influence de la force d'inertie doit s'ajouter à celle de la topographie du fond pour déterminer la structure fine des courants marins.



## RÉSUMÉ

L'analyse de deux modèles simples met en évidence l'influence considérable du relief du fond sur les courants marins induits par le vent, et conduit aux résultats suivants. La présence d'un talus continental le long d'une côte rectiligne resserre la circulation vers la côte et la déplace vers le Sud (dans l'hémisphère Nord). Dans une mer fermée de forme circulaire, une profondeur croissante vers le centre produit une distorsion et une rotation importantes de la circulation.

## SUMMARY

The considerable influence of the bottom topography on the wind-driven sea currents is emphasized by the analysis of two simple models, which give the following results. When a continental shelf is present along a straight coast, the circulation is compressed towards the coast, and shifted to the South (in the northern hemisphere). In a closed circular sea, the circulation is strongly distorted and rotated when the depth is increasing towards the center.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Analyse zweier einfacher Modelle veranschaulicht den beträchtlichen Einfluss der Bodentopographie auf die durch den Wind hervorgerufenen Strömungen und führt zu folgenden Resultaten. Vorhandensein eines Kontinentalschelfs entlang einer geradlinigen Küste führt zu einer küstengerichteten Kompression der Zirkulation sowie zu einer Verlagerung nach Süden (in der nördlichen Hemisphäre). In einem geschlossenen kreisrunden Mee-resbecken verursacht zentralwärts zunehmende Tiefe eine Distorsion und beträchtliche Rotation der Zirkulation.



## BIBLIOGRAPHIE

- BEARDSLEY, R.C., 1969. A laboratory model of the wind-driven ocean circulation. *J. Fluid Mech.*, 38 (2) : 255-271.
- DEFANT, A., 1961. *Physical Oceanography*. Pergamon Press, New York.
- GREENSPAN, H.P., 1963. A note concerning topography and inertial currents. *J. mar. Res.*, 21 (3) : 147-154.
- PROUDMAN, J., 1916. On the motions of solids in a liquid possessing vorticity. *Proc. R. Soc.*, A 92 : 408-424.
- SAINT-GUILY, B., 1957. Les méandres des veines de courant dans les océans. *Bull. Inst. oceanogr. Monaco*, 1108 : 1-11.
- TAYLOR, G.I., 1923. Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. R. Soc.*, A 104 : 213-218.
- WELANDER, P., 1968. Wind-driven circulation in one-, and two-layer oceans of variable depth. *Tellus*, 20 : 1-16.

Reçu le 6 octobre 1970.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Analyse zweier einfacher Modelle veranschaulicht den beträchtlichen Einfluss der bathymographischen und durch den Wind hervorgerufenen Strömungen auf die in folgenden Resultaten. Wenn ein kontinentaler Shelf in einer zentralen Lage vorhanden ist, so wird die Zirkulation in der Richtung der Küstenlinie zu einer zentralen Lage kompression (in einem geschlossenen zentralen Meer) und Rotation (in einem offenen zentralen Meer) beobachtet. In einem zentralen Meer (in einem geschlossenen zentralen Meer) wird die Zirkulation in der Richtung der Küstenlinie zu einer zentralen Lage kompression (in einem geschlossenen zentralen Meer) und Rotation (in einem offenen zentralen Meer) beobachtet.