



HAL
open science

Distribution Z-Poisson

Andrzej Goralski

► **To cite this version:**

Andrzej Goralski. Distribution Z-Poisson. Annales de l'ISUP, 1977, XXII (1-2), pp.45-53. hal-04080778

HAL Id: hal-04080778

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-04080778>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

DISTRIBUTION Z-POISSON

Andrzej GORALSKI

(Conférence à l'Institut de Statistique des Universités de Paris, 27 Mai 1974)

1. PROBLEME

J'ai considéré le modèle d'épreuves consécutives, sous l'hypothèse suivante :

si j -ième événement est arrivé dans la r -ième épreuve ($r=1,2,\dots$) la possibilité que le même évènement arrivera dans s -ième épreuve ($s = r+1, r+2, \dots, n$) est :

$$P_{j,s} = z P_{j,1} \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

où $0 \leq z$ est le paramètre du modèle .

Quelle est la probabilité $P(n,k,p,z)$ que sur un nombre n d'épreuves, pendant lesquelles la probabilité de l'apparition d'un évènement E est : $p = p_{E,t}$ ($t = 1, 2, \dots, n$), E arrive k fois ?

2. THEOREME

$$P(n,k,p,z) \sim \begin{cases} 1 - \frac{1 - e^{-\lambda z}}{z}, & k = 0 \\ z^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda z} & k \geq 1 \end{cases}$$

$n \rightarrow \infty$
 $\lambda z < C$
 $\lambda = n p_{E,1}$
 $p_{E,1} = 1/m$

3. DEMONSTRATION3.1. Soit $k = 0$

Considérons l'événement $j = a$.

Désignons par b l'événement qui est apparu dans la première épreuve.

On a :

$$P_{a,1} = \frac{1}{m} ,$$

$$P_{b,2} = \frac{z}{m} ,$$

$$P_{a,2} = \frac{m-z}{m(m-1)} .$$

Dans la deuxième épreuve on a :

$$\bullet \text{ ou } E = b \quad \text{et} \quad P_{a,3} = \frac{m-z}{m(m-1)} ,$$

$$\bullet \text{ ou } E = x \quad \text{et} \quad P_{a,3} = \frac{m-2z}{m(m-2)} .$$

$x \neq a$

$x \neq b$

La valeur espérée de $p_{a,3}$ est donc :

$$P_{a,3} = \frac{m-2z}{m(m-2)} \left(1 - \frac{z(1-z)}{m(m-1)(m-2z)} + \dots \right)$$

Si nous considérons de la même façon la $(r-1)$ -ième épreuve nous trouverons :

$$P_{a,r} = \frac{m-(r-1)z}{m(m-r+1)} \left(1 - \frac{z(1-z)}{m(m-r+2)(m-(r-1)z)} + \dots \right) .$$

Mais :

$$\lim (1 - \dots) = 1 ,$$

$$m \rightarrow \infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$z < C$$

donc finalement on a :

$$P_{a,r} = \frac{m-(r-1)z}{m(m-r+1)} \cdot$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} P(n,0,p,z) &= \prod_{r=1}^n (1 - P_{a,r}) \\ &= \prod_{r=1}^n \frac{1 - \frac{rm - (r-1)z}{m}}{1 - \frac{r-1}{m}}, \end{aligned}$$

et :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda z < C}} \ln P(n,0,p,z) = \ln \left(1 - \frac{1 - e^{-nz/m}}{z} \right).$$

3.2. Soit $k = 1$

Considérons l'événement $j = a$.

Il faut trouver :

$$P(n,1,p,z) = \sum_{r=1}^n P_r(1),$$

où $P_r(1)$ est la probabilité que l'événement a apparaitra exactement dans la r -ième épreuve.

$$\text{On a : } P_1(1) = \frac{1}{m} \left(\frac{m-z}{m} \right)^{n-1},$$

$$P_2(1) = P_1(1),$$

$$P_3(1) = P_1(1) \left(1 + \frac{z(1-z)}{m(m-2)} \right),$$

⋮
⋮
⋮

$$P_r(1) = P_1(1) \left(1 + \frac{(r-1)(r-2)z(1-z)}{m(2m-(r+1)(r-2))} + \dots \right).$$

Mais:

$$\begin{aligned} \lim (1 + \dots) &= 1, \\ m &\rightarrow \infty \\ n &\rightarrow \infty \\ z &< C \end{aligned}$$

donc on a :

$$P_r(1) = \frac{1}{m} \left(\frac{m-z}{m}\right)^{n-1}$$

et :

$$\begin{aligned} \lim P(n,1,p,z) &= \frac{n}{m} e^{-nz/m} \\ n &\rightarrow \infty \\ \lambda z &< C \end{aligned}$$

3.3. Soit $k \geq 2$

Si nous avons considéré parallèlement aux considérations faites dans le cas où $k = 1$, nous pourrions déduire que :

$$P(n,k,p,z) = \binom{n}{k} z^{k-1} m^{-k} \left(\frac{m-z}{m}\right)^{n-k}$$

et :

$$\begin{aligned} \lim P(n,k,p,z) &= z^{k-1} \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-nz/m} \\ n &\rightarrow \infty \\ \lambda z &< C \end{aligned}$$

4. DISTRIBUTION Z-POISSON

Nous disons qu'une variable aléatoire X a la distribution z-Poisson si :

$$P(X=k) = \begin{cases} 1 - \frac{1 - e^{-\lambda z}}{z} & k = 0, \\ z^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda z} & k \geq 1. \end{cases}$$

Valeur espérée X :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \frac{e^{-\lambda z}}{z} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda z)^k}{k!} = \lambda ,$$

variance X :

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E(X^2) - E^2(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E^2(X) \\ &= \frac{e^{-\lambda z}}{z} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda z)^k}{k!} - \lambda(\lambda-1) = \lambda(1-\lambda(1-z)). \end{aligned}$$

5. APPROXIMATION DE LA DISTRIBUTION DE POLYA PAR LA DISTRIBUTION Z-POISSON

Nous savons que la distribution de Polya pour une variable aléatoire X est :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(n,k,p,a) \\ &= \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} (p+ia) \prod_{j=0}^{n-k-1} (1-pja) \prod_{r=0}^{n-1} (1+ra)^{-1} , \end{aligned}$$

où $P(n,k,p,a)$ est la probabilité que sur un nombre n d'épreuves l'événement considéré E arrivera k fois; p est la probabilité que E arrivera dans la première épreuve, et a est un paramètre.

Si p est petite on peut faire une approximation de la distribution de Polya par la distribution z -Poisson, avec :

$$z = 1 + \frac{a}{1+a} \frac{1-p}{p} .$$

Donc on a :

$$P(n,k,p,a) \underset{p \ll 1}{\approx} P(n,k,p,z).$$

Si nous posons, par exemple, $n=10$, $p=0,02$ et $a=-0,01$ nous aurons : $z = 0,505$

et :

$k =$	0	1	2	3
$P(n,k,p,a) =$	0,809	0,182	0,009	0,000
$P(n,k,p,z) =$	0,810	0,181	0,009	0,000

6. TROIS EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA DISTRIBUTION Z-POISSON

6.1. Distribution des accidents de travail

Considérons la répartition des nombres des accidents qui sont arrivés aux travailleurs d'une certaine usine pendant un délai de 13 mois (B.Biegelsein-Zelazowski: Zarys psychologii pracy, PWN, 1967, p.180) :

nombres des accidents (k)	=	0	1	2	3	4
nombres des travailleurs(n(k))	=	428	132	62	21	5

Posons l'hypothèse suivante : la répartition des accidents de travail s'effectue selon la distribution z-Poisson.

Nous aurons ici :

$$\lambda = 0,526 \quad z=1,79$$

et des nombres espérés dans l'hypothèse :

$k =$	0	1	2	3	≥ 4
$\hat{n}(k) =$	427,0	133,4	62,6	19,6	5,4

Le test du χ^2 donne ici : $\chi^2 = 0,15$ pour $\nu = 2$.

On peut dire aussi que ce n'est pas une bonne usine -z est égale à 1,79.

6.2. Comparaison des stratégies

Les données analysées ici proviennent de l'étude effectuée en 1968 dans l'Institut de Psychologie de l'Université de Varsovie (M. Materska : Tresc przygotowania teoretycznego a struktura czynnosci pratycznych, Wroclaw, 1972, Ossolineum).

Voici le tableau expérimental :

On a deux groupes (W, M) très semblables à ce point de vue de facteurs tels que : âge, sexe, niveau d'intelligence, motivations, etc., et très distinctifs au point de vue du facteur principal qui peut être dénommé "stratégie pour poser les questions". Dans chacun des groupes on a trente personnes. Chaque personne peut poser n fois ($n \leq 41$) chacune des m questions ($m=133$).

Etant donné les répartitions de questions :

	groupe W				groupe M			
$k =$	0	1	2	3	0	1	2	3
$n(k) =$	3123	785	77	5	3045	905	40	-

comparer les stratégies.

Si on suppose que les répartitions suivent la distribution z-Poisson on a :

groupe W	groupe M
$\lambda = 0,239$	$\lambda = 0,247$
$z = 0,81$	$z = 0,33$

Il est évident que les valeurs moyennes sont proches, c'est-à-dire : non distinctives. Mais voilà ce sont les valeurs du paramètre z qui font la taxinomie!

6.3. Un exemple historique

J'ai examiné récemment (A.Goralski : Semi-deterministyczny model zmienności resu i jego aplikacja historyczna, Procc.Hist. Int.Coll., Varsovie, Novembre 1973) les répartitions de nombres de changements territoriaux de mon pays dans les successives "portions" du temps, égales à cinq années, et j'ai obtenu le tableau suivant :

k =	0	1	2	3	période
n(k) =	48	16	3	1	961-1300
	35	13	4	1	1301-1565
	32	9	5	-	1566-1795

Faisant les calculs nécessaires on voit que :

période	λ	z
961 - 1300	0,368	1,30
1301 - 1565	0,453	1,31
1566 - 1795	0,413	1,29

Alors on constate que la densité de changements est variable et que la valeur z reste constante, ce qui est d'ailleurs étonnant.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) A.GORALSKI : O pewnym schemacie losowania zwrotnego,
Zeszyty Naukowe PW, Matematyka 14, Warszawa, 1968.
- (2) S.D.POISSON : Recherches sur la probabilité des jugements,
Bachelier, Paris, 1837.
- (3) G.POLYA : Sur quelques points de la théorie des probabi-
lités, Ann. Inst.H.Poincaré, 1, Paris, 1931.

Reçu en Juin 1974

02-643 WARSZAWA

Etiudy R. 40/3

Pologne