



HAL
open science

Réseaux $(R)k-1$ et groupes d'automorphismes transitifs

Pierre Leconte

► **To cite this version:**

Pierre Leconte. Réseaux $(R)k-1$ et groupes d'automorphismes transitifs. Annales de l'ISUP, 1977, XXII (1-2), pp.55-82. hal-04080802

HAL Id: hal-04080802

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-04080802v1>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

RESEAUX $(R)_{k-1}$ ET GROUPES D'AUTOMORPHISMES TRANSITIFS

Pierre LECOINTE

Nous avons établi dans [1] l'équivalence entre réseaux $(R)_{k-1}$ et tableaux orthogonaux d'indice unité. Nous nous proposons en étudiant certains groupes d'automorphismes sur les réseaux $(R)_{k-1}$ de dégager des constructions de ces réseaux par utilisation des groupes de permutations.

1. RAPPELS ET DEFINITIONS.

1.1.- Définition des réseaux $(R)_{k-1}$ (référence [1]).

Soit E un ensemble fini d'éléments désignés par des points.
Soit F un sous-ensemble d'éléments de P(E) désignés par des plans.
Soit \mathcal{f} une partition de F en N classes F_i . (Card $[F_i] \geq 2$, $i \in [1, N]$). Soient q et k deux nombres entiers positifs ($2 < k < N$).
Le système (E, F, \mathcal{f} , N, k, q) constitue un réseau $(R)_{k-1}^q$ de dimension k si l'on a :

(i) Tout point x de E appartient à un plan y et un seul de chaque classe F_i .

(ii) h plans quelconques de h classes différentes se coupent en q^{k-h} points si $h \leq k$, ou alors si $h > k$, soit en 1 point, soit en 0 point. (Lorsqu'il n'y aura aucun risque d'ambiguïté, on notera en abrégé les réseaux $(R)_{k-1}$ par la lettre R).

- Rappelons au sujet de ces réseaux qu'on leur fait correspondre des tableaux orthogonaux d'indice unité, ce qui justifie l'intérêt de leur construction (référence [1]).

1.2 - Automorphismes sur réseaux $(R)_{k-1}$.1.2-1 - Soient deux réseaux $(R)_{k-1}$: $R_1 = (E_1, F_1, \mathcal{F}_1, N_1, k, q_1)$ et $R_2 = (E_2, F_2, \mathcal{F}_2, k, q_2)$.Soit α une application de $E_1 \cup F_1 \cup \mathcal{F}_1$ dans $E_2 \cup F_2 \cup \mathcal{F}_2$.(i) α est un homomorphisme de R_1 dans R_2 si : $\forall x_1 \in E_1, x_1^\alpha \in E_2 ; \forall y_1 \in F_1, y_1^\alpha \in F_2 ; \forall F_i \in \mathcal{F}_1, F_i^\alpha \in \mathcal{F}_2$ $\forall x_1 \forall y_1 \forall F_i$ avec $x_1 \in y_1 \in F_i : x_1^\alpha \in y_1^\alpha \in F_i^\alpha$.(ii) α est un isomorphisme de R_1 sur R_2 si α est un homomorphisme et si α est une bijection de E_1 sur E_2 (resp^t de F_1 sur F_2) (resp^t de \mathcal{F}_1 sur \mathcal{F}_2).(iii) Un automorphisme α de R_1 est un isomorphisme de R_1 sur lui-même.1.2-2 - Soit un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathcal{F}, N, k, q)$.Soit Γ un sous-groupe de $G(R)$ groupe des automorphismes de $(R)_{k-1}$.On dira que Γ est transitif sur $(R)_{k-1}$ si Γ est transitif sur E , (resp^t sur F), (resp^t sur \mathcal{F}).- Nous allons dégager maintenant les principales propriétés des groupes Γ transitifs sur un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k .2. ETUDE DES GROUPES Γ .2.1 - Soit Γ un groupe d'automorphismes transitif sur un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k . Soit F_1 une classe de \mathcal{F} et soit $\Gamma_1 = \Gamma_{F_1}$ le stabilisateur de F_1 .1ère PROPRIÉTÉ.Soit y un plan quelconque de F_1 . y^α décrit F_1 quand α parcourt Γ_1 .

Démonstration.

Si $\alpha \in \Gamma_1$, on a $F_1^\alpha = F_1$. Soit $y_1 \in F_1$, $y_1^\alpha \in F_1^\alpha$ donc $y_1^\alpha \in F_1$. Réciproquement, soit $y' \in F_1$; puisque Γ est transitif $\exists \alpha \in \Gamma$ avec $y' = y_1^\alpha$. Supposons que $\alpha \notin \Gamma_1$, alors $F_1^\alpha \neq F_1$. Mais $y_1^\alpha \in F_1$ donc $y_1^\alpha \in F_1 \cap F_1^\alpha$. D'après les propriétés des réseaux, un même plan ne peut être commun à deux classes différentes; donc: $F_1^\alpha = F_1$ et l'hypothèse $\alpha \notin \Gamma_1$ était absurde.

2.2 - Soit y_1 un plan de F_1 et Γ_{y_1} le stabilisateur de y_1 .

2ème PROPRIÉTÉ.

Γ_{y_1} est un sous-groupe de Γ_1 .

Démonstration.

Soit $\alpha \in \Gamma_{y_1}$. On a $y_1^\alpha = y_1$. Or, $y_1 \in F_1$, donc $y_1^\alpha \in F_1^\alpha$. Autrement dit, $y_1^\alpha \in F_1 \cap F_1^\alpha$.

Par définition, F_1^α est une classe de \mathcal{F} . Or, un même plan y_1 ne peut appartenir à deux classes différentes; donc: $F_1^\alpha = F_1$ et $\alpha \in \Gamma_1$.

- Dorénavant, nous supposons que Γ_1 est un sous-groupe distingué de Γ .

2.3 - Soit $x_1 \in E$ et soit $y_i \in F_i$, $\forall i \in [1, N]$, N plans de chacune des N classes de plans, passant par x_1 .

Soit alors Γ_2 l'ensemble des automorphismes $\alpha \in \Gamma$ tels que :

$(y_1, y_2, \dots, y_N)^\alpha = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \dots, y_N^\alpha)$ soit une permutation de (y_1, y_2, \dots, y_N) . Soit enfin Γ_{x_1} le stabilisateur de x_1 et supposons que Γ_2 soit transitif sur (y_1, y_2, \dots, y_N) .

3ème PROPRIÉTÉ.

- (i) Γ_2 est un sous-groupe de Γ .
- (ii) $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$.
- (iii) $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1$.
- (iv) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = N_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_{y_1} = \Gamma_2 \cap \Gamma_{y_i}$ ($y_i \in F_i$, $\forall i \in [1, N]$).

Démonstration.

(i) Evident.

(ii) Les plans y_1, y_2, \dots, y_N passent par x_1 . On a donc en vertu des propriétés des réseaux $(R)_{k-1} : x_1 = \bigcap_{i=1}^N y_i$.Or, $\forall \alpha \in \Gamma_2 \quad (y_1, y_2, \dots, y_N)^\alpha = \text{permutation de } y_1, y_2, \dots, y_N$.Donc : $x_1^\alpha = x_1 = \bigcap_{i=1}^N y_i$, c'est-à-dire : $\alpha \in \Gamma_2 \Rightarrow \alpha \in \Gamma_{x_1}$.Réciproquement, soit $\alpha \in \Gamma_{x_1}$; on a donc $x_1^\alpha = x_1$

$$x_1 = \bigcap_{i=1}^N y_i \implies x_1^\alpha = x_1 \in y_1^\alpha \cap y_2^\alpha \cap \dots \cap y_N^\alpha$$

α étant un automorphisme, les plans $y_1^\alpha, \dots, y_N^\alpha$ sont tous différents (puisque les plans y_1, y_2, \dots, y_N l'étaient). Ces plans ne sont pas parallèles puisqu'ils passent tous par x_1 ; donc $(y_1, y_2, \dots, y_N)^\alpha$ est une permutation de (y_1, y_2, \dots, y_N) et $\alpha \in \Gamma_2$.

(iii) Avant de démontrer ce résultat, démontrons les deux lemmes suivants :

LEMME 1 : Si $y \parallel y'$ alors $y^\alpha \parallel y'^\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma$.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $y^\alpha \cap y'^\alpha \neq \emptyset$. Soit alors $x \in y^\alpha \cap y'^\alpha$; cela entraîne que $x \alpha^{-1} \in y$ et que $x \alpha^{-1} \in y'$. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

LEMME 2 : Soit $y_i \in F_i$, $\forall i \in [1, N]$, y_i^α parcourt F_i quand α décrit Γ_{F_i} , Γ_{F_i} désignant le stabilisateur de F_i .

En effet, tout d'abord soit $\alpha \in \Gamma_{F_i}$; alors $y_i^\alpha \in F_i^\alpha = F_i$. Réciproquement, soit $y'_i \in F_i$ $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que $y'_i = y_i^\alpha$. Supposons par l'absurde que $\alpha \notin \Gamma_{F_i}$. C'est à dire : $F_i^\alpha = F_j \neq F_i$.

Alors, $y_i^\alpha \in F_i \cap F_1^\alpha$, ce qui est impossible (propriétés des réseaux) ; donc, $F_1^\alpha = F_1$ et $\alpha \in \Gamma_{F_1}$.

- Démontrons (iii) maintenant. L'hypothèse suivant laquelle Γ_1 est invariant va, bien sûr, être essentielle.

Soit u un élément quelconque de Γ . Soit y'_i l'image de y_1 par u . $y'_i = y_1 u$.

Si $y'_i \in F_i$ soit $y_i \in F_i$ et soit $a \in \Gamma_2$ tel que $y_i = y_1 a$. Soit $\alpha \in \Gamma_{F_i}$ tel que $y'_i = y_1^\alpha$. On a :

$$\underline{y'_i = y_1 u = y_1 a^\alpha.}$$

D'autre part, $y_1 = y_i a^{-1} \implies y'_i a^{-1} \parallel y_1 \implies y'_i a^{-1} \in \Gamma_1$
 $\exists \beta \in \Gamma_1 \quad y_1 \beta = y'_i a^{-1} \implies y'_i = y_1 \beta a$ soit :

$$\underline{y'_i = y_1 u = y_1 \beta a.}$$

En conclusion :

$$\underline{y_1 u = y_1 a^\alpha = y_1 \beta a.}$$

En particulier : $a^\alpha a^{-1} \beta^{-1} = u_1 \in \Gamma_{y_1} \subset \Gamma_1$.

Soit : $\alpha = a^{-1} u_1 \beta a = v \in \Gamma_1$ (puisque Γ_1 est invariant).

D'où :

$$\underline{\Gamma_{F_i} = \Gamma_1}$$

Alors : $y_1 u = y_1 a^\alpha = y_1 \beta a$ avec $a \in \Gamma_2$
 et $\alpha, \beta \in \Gamma_1$

Comme $a^\alpha (\beta a)^{-1} = u_1 \in \Gamma_{y_1} \subset \Gamma_1$, on a :

$a^\alpha = u_1 \beta a = \gamma a$ avec $\gamma \in \Gamma_1$; c'est à dire finalement :

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1.$$

En effet : $y_1 u = y_1 a$ permet d'écrire :

$$u \alpha^{-1} a^{-1} = v \in \Gamma_{y_1}, \text{ c'est à dire : } u = v a \alpha.$$

Utilisons $a \alpha = \gamma a$; on a : $u = v \gamma a$ avec $v \in \Gamma_{y_1} \subset \Gamma_1, \gamma \in \Gamma_1$
et $a \in \Gamma_2$

Soit en posant $v \gamma = \gamma_1$:

$$u = \gamma_1 a \text{ avec } \gamma_1 \in \Gamma_1 \text{ et } a \in \Gamma_2$$

D'où le résultat.

REMARQUE.

Soit $\alpha \in \Gamma_{F_i}$ on a $F_i \alpha = F_i$. Soit $a \in \Gamma_2$ tel que $F_i = F_1 a$.
On a finalement : $F_1 a = F_1 a \alpha$, c'est à dire $a \alpha = a^{-1} \in \Gamma_1$.
Autrement dit : $\Gamma_{F_i} = a^{-1} \Gamma_1 a = \Gamma_1$ (puisque Γ est invariant).
Donc : $\Gamma_{F_i} = \Gamma_1$.

(iv) Γ_{y_i} fixe y_i - $\Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$ fixant y_i devrait au maximum
permuter entre eux $y_1 y_2 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_N$ mais cela n'est
pas possible puisque $\Gamma_{y_i} \subset \Gamma_1$ ($\Gamma_{y_i} \subset \Gamma_{F_i} = \Gamma_1$) ; donc si y_i est
fixé $\forall j \neq i, y_j$ est fixé ou bien changé en $y'_j \parallel y_j$, mais si
 $y'_j \parallel y_j$, ces éléments ne peuvent appartenir à Γ_{x_1} . Le seul cas
possible reste celui où $y_1 y_2 \dots y_N$ sont tous fixés ; ce qui
implique le résultat à savoir : $\Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1} = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1} = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$.

2.4 -

4ème PROPRIÉTÉ.

K désignant le nombre de points γy_1 ,

R le nombre de plans passant par x_1 ,

on a :

$$\text{Card} [\Gamma_{x_1}] K = \text{Card} [\Gamma_{y_1}] R = \text{Card} [\Delta_1]$$

$$\text{et : } \Delta_1 = \Gamma_{x_1} \Delta_1 \Gamma_{y_1}$$

Ce résultat est démontré dans la référence [2]

Rappelons que : $\Delta_1 = \Delta_1(x_1, y_1) = \{ \alpha \in \Gamma : x_1 \alpha \in y_1 \}$.

On peut écrire dans le cas présent :

$$\text{Card} [\Gamma_{x_1}] q^{k-1} = \text{Card} [\Gamma_{y_1}] N = \text{Card} [\Delta_1]$$

2.5 - En désignant par n_1 l'ordre du sous-groupe

$N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_1$, on a :

5ème PROPRIÉTÉ.

$$\begin{aligned} \text{Card}[\Gamma_1] &= n_1 q^k ; \text{Card}[\Gamma_{x_1}] = n_1 N ; \\ \text{Card}[\Gamma] &= n_1 N q^k ; \text{Card}[\Gamma_{y_1}] = n_1 q^{k-1} ; \\ \text{Card}[\Delta_1] &= n_1 N q^{k-1}. \end{aligned}$$

Démonstration.

On sait que $\text{Card}[\Gamma] = q^k$. Cela entraîne : $\text{Card}[\Gamma] = q^k \text{Card}[\Gamma_{x_1}]$

De même, $\text{Card}[\Gamma_{y_1}] = q^{k-1}$. D'où : $\text{Card}[\Delta_1] = \text{Card}[\Gamma_{x_1}] q^{k-1}$.

Or, $\text{Card} \Delta_1 = \text{Card} \Gamma_{y_1} N = \text{Card} \Gamma_{x_1} q^{k-1}$

D'où : $\text{Card} \Gamma_{x_1} q^{k-1} = \text{Card} \Gamma_{y_1} N$

D'autre part, $\text{Card} \Gamma = \text{Card} \Gamma_1 \Gamma_2 = \text{Card} \Gamma_{x_1} q^k$

D'où : $\frac{\text{Card} \Gamma_1 \text{Card} \Gamma_2}{\text{Card} N_1} = \text{Card} \Gamma_{x_1} q^k$

C'est à dire : $\text{Card} \Gamma_1 = \text{Card} N_1 q^k$

soit : $\underline{\text{Card} \Gamma_1 = n_1 q^k}$

Ensuite, vu la définition de Γ_1 et les propriétés des réseaux :

$\text{Card} \Gamma_1 = q \text{Card} \Gamma_{y_1}$.

En effet, Γ_{y_1} est un sous-groupe de Γ_1 et on a :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^q \Gamma_{y_1} \alpha_i \quad (\text{avec } \alpha_1 = 1)$$

Donc : $\underline{\text{Card} \Gamma_{y_1} = n_1 q^{k-1}}$

Cela entraîne :

$$\underline{\text{Card} \Delta_1 = n_1 N q^{k-1}}$$

$$\underline{\text{Card} \Gamma_{x_1} = n_1 N.}$$

Remarque.

Soit $x_1 \in y_1$ $x_1^\alpha \in y_1$ si $\alpha \in \Gamma_{y_1}$
 Si $x_1^{\alpha_1} = x_1^{\alpha_2}$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_{y_1}$ on a :

$$\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1} = N_1 \quad ; \text{ soit } \alpha_1 \in N_1 \alpha_2.$$

Vu le cardinal de Γ_{y_1} , x_1^α $\forall \alpha \in \Gamma_{y_1}$ décrit y_1 et on a :

$$\Gamma_{y_1} = \bigcup_{i=1}^{q^{k-1}} N_1 \beta_i \quad (\text{avec } \beta_1 = 1)$$

2.6 -

6ème PROPRIÉTÉ.

N_1 est un sous-groupe distingué de Γ_{x_1} .

Démonstration.

Il s'agit de montrer que $a^{-1} N_1 a \subset N_1 \quad \forall a \in \Gamma_{x_1}$
 Soit le plan y_1 de Γ_1 . Supposons que $y_i = y_1 a$. On a le schéma :

$$y_i \xrightarrow{a^{-1}} y_1 \xrightarrow{N_1} y_1 \xrightarrow{a} y_i$$

y_i est donc fixé par $a^{-1} N_1 a$; ceci peut se répéter $\forall y_i$

En effet, par définition, a permuté entre eux les plans

$y_1 y_2 \dots y_N$, c'est à dire :

$$y_j \xrightarrow{a^{-1}} y_k \xrightarrow{N_1} y_k \xrightarrow{a} y_j$$

Autrement dit, $y_1 y_2 \dots y_N$ sont fixés par $a^{-1} N_1 a$. Donc

$x_1 = \cap y_i$ est également fixé. D'où :

$$a^{-1} N_1 a \subset N_1.$$

2.7 -

7ème PROPRIÉTÉ.Soient $V \subset \mathbb{R}^k$, $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_h}$ h plans quelconques pris parmi (y_1, y_2, \dots, y_N) . Posons :

- $\Delta_{12\dots h} = \Delta_{12\dots h}(x_1 : y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_h})$
 $= \{ \alpha \in \Gamma : x_1^\alpha \in y_{i_1}, x_1^\alpha \in y_{i_2}, \dots, x_1^\alpha \in y_{i_h} \}$
- $\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}} = \Gamma_{y_{i_1}} \cap \Gamma_{y_{i_2}} \cap \dots \cap \Gamma_{y_{i_h}}$
 $(\Gamma_{y_{i_j}}$ désignant le stabilisateur de y_{i_j}).
- $N_h = N_h(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_h}) = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}$
- $n_h = \text{Card } [N_h]$

On a :

$$(1) \text{Card } [\Delta_{12\dots h}] = \text{Card } [\Gamma_{x_1}] q^{k-h} = \text{Card}[\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}]^{u_h}$$

u_h désignant un entier positif.

$$(2) N_h = N_1, \quad n_h = n_1 \quad \text{et} \quad \text{Card } [\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}] = n_1 q^{k-h}$$

(3) Si la décomposition de $\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}$ suivant N_1 s'écrit :

$$\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}} = N_1 \cup N_1 \delta_2 \cup \dots \cup N_1 \delta_q^{k-h}, \text{ on a :}$$

$$\Delta_{12\dots h} = \Gamma_{x_1} \cup \Gamma_{x_1} \delta_2 \cup \dots \cup \Gamma_{x_1} \delta_q^{k-h}.$$

Démonstration.

(1) On sait que $\text{Card } [y_{i_1} \cap y_{i_2} \cap \dots \cap y_{i_h}] = q^{k-h}$. Il en découle aussitôt que : $\text{Card } [\Delta_{12\dots h}] = \text{Card } [\Gamma_{x_1}] q^{k-h}$.

D'autre part, par définition :

$$\begin{aligned} \Delta_{12\dots h} &= \{ \alpha \in \Gamma : x_1^\alpha \in y_{i_1} \dots x_1^\alpha \in y_{i_h} \} \\ &= \{ \alpha \in \Gamma : y_{i_1}^{\alpha^{-1}} \dots y_{i_h}^{\alpha^{-1}} \text{ passent par } x_1 \} \end{aligned}$$

Dans ces conditions :

$$\text{Card} [\Delta_{12\dots h}] = \text{Card} [\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}] u_h,$$

u_h désignant un certain entier.

(2) Il est clair que $N_h = N_1$ (et donc que $n_h = n_1$).
 Par contre : $\text{Card} [\Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}] = n_1 q^{k-h}$ demande à être démontrée.

On procèdera par exemple par récurrence, l'égalité étant exacte au rang 1. ($\text{Card} \Gamma_{y_1} = n_1 q^{k-1}$).

Soit $x_1 \in y_{i_1} \cap \dots \cap y_{i_h}$ et soit $x_1^\alpha \forall \alpha \in \Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}$.
 Supposons qu'ainsi $y_{i_1} \cap \dots \cap y_{i_h}$ ne soit pas entièrement obtenue.

Alors $\exists \alpha \in \Gamma_{y_{i_1} \cap \dots \cap y_{i_{h-1}}}$ et $\notin \Gamma_{y_{i_h}}$ tel que $x_i = x_1^\alpha$ (si le point x_i n'a pas été obtenu précédemment).

Mais si $\alpha \in \Gamma_{y_{i_1} \cap \dots \cap y_{i_{h-1}}}$, alors $\alpha \in \Gamma_1$.

Si α ne fixe pas y_{i_h} , α ne peut changer y_{i_h} qu'en un plan parallèle, ce qui est impossible (homomorphisme).

α fixe donc y_{i_h} , d'où la contradiction.

En résumé : $x_1^\alpha \forall \alpha \in \Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_h}}$ décrit $y_{i_1} \cap \dots \cap y_{i_h}$.

Si l'on a : $x_1^{\alpha_1} = x_1^{\alpha_2}$, alors $\alpha_1^{-1} \alpha_2 \in N_1$ et $\alpha_1 \in N_1^{\alpha_2}$.

D'où la décomposition :

$$\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} = \bigcup_{i=1}^{q^{k-h}} N_1 \delta_i \quad (\text{avec } \delta_1 = 1),$$

et $\text{Card} \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} = n_1 q^{k-h}$.

(3) Soit $\alpha \in \Delta_{12\dots h}$. On a $x_1^\alpha \in y_{i_1} \cap \dots \cap y_{i_h}$.

Supposons $x_i = x_1^\alpha$. $\exists n_1 \delta_i \in \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}}$ ($n_1 \in N_1$) tels que :

$$x_i = x_1 n_1 \delta_i. \text{ On a donc :}$$

$$x_1^\alpha = x_1 n_1 \delta_i, \text{ soit : } x_1 n_1 \delta_i \alpha^{-1} = x_1. \text{ Donc :}$$

$$n_1 \delta_i \alpha^{-1} \in \Gamma_{x_1}, \text{ c'est à dire : } n_1 \delta_i \alpha^{-1} = a \in \Gamma_{x_1}$$

$$\text{soit : } a^{-1} n_1 \delta_i = \alpha.$$

Or : $n_1 \in N_1 = \Gamma_1 \cap \Gamma_{X_1}$ et $a \in \Gamma_{X_1}$; donc $a^{-1} n_1 \in \Gamma_{X_1}$,
 donc $\alpha = u \delta_i$ avec $u \in \Gamma_{X_1}$.

On a mis ainsi en relation $\Gamma_{X_1} \delta_i$ avec $N_1 \delta_i$.

$$\text{D'où : } \Delta_{12\dots h} = \bigcup_{i=1}^q \Gamma_{X_1} \delta_i^{k-h}$$

c. q. f. d.

3. CONSTRUCTIONS LIEES A LA TRANSITIVITE.

3.1 -

Théorème :

Soient $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_h}$ h classes
 quelconques ($\forall h \leq k$).

Soient y_{ij} et $y'_{ij} \quad \forall j \in [1, 2, \dots, h]$
 deux plans distincts de F_{i_j} .

Alors, il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que :

$$y'_{ij} = y_{ij} \alpha, \quad \forall j \in [1, h].$$

Démonstration.

Nous démontrons ce résultat par récurrence.

a) Le Cas particulier $h = 2$.

Commençons par utiliser un résultat élémentaire de théorie des
 groupes :

Soient A et B 2 sous-groupes d'ordre a et b
 admettant comme intersection un sous-groupe
 D d'ordre d . Le complexe $C = AB$ contient
 exactement $\frac{ab}{d}$ éléments distincts. C est un
 groupe si et seulement si A et B commutent.

Dans le cas présent, nous sommes intéressés par les groupes

$\Gamma_1, \Gamma_{Y_1}, \Gamma_{Y_2}$ et $\Gamma_{Y_1 Y_2}$. Etant donné que $\Gamma'_1 = \Gamma_{Y_1} \Gamma_{Y_2}$ contient
 $\frac{n_1 q^{k-1} n_1 q^{k-1}}{n_1 q^{k-2}} = n_1 q^k$ éléments, on a $\Gamma'_1 = \Gamma_1$ et Γ_{Y_1} et Γ_{Y_2}

commutent en conséquence : $\Gamma_1 = \Gamma_{Y_1} \Gamma_{Y_2} = \Gamma_{Y_2} \Gamma_{Y_1}$.

Dès lors, il s'agit de montrer que les classes :

$$\Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \quad \text{avec } \alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1} \quad (\text{ou ce qui revient au même } \alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1})$$

$$\text{et } \Gamma_{y_2} \alpha_{j_2}^2 \quad \text{avec } \alpha_{j_2}^2 \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2} \quad (\text{ou ce qui revient au même } \alpha_{j_2}^2 \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_2})$$

ont une intersection non vide.

On peut écrire :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \quad (\text{avec } \alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1})$$

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_2} \alpha_{j_2}^2 \quad (\text{avec } \alpha_{j_2}^2 \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}).$$

On a alors :

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_2} = \bigcup_{j_1} \{ \Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \cap \Gamma_{y_2} \} = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1$$

$$\text{D'où : } \Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2$$

$$\text{De même : } \Gamma_1 = \bigcup_{j_1} \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_1}^1$$

En résumé, on a donc commutativité, à savoir :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 = \bigcup_{j_1} \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_1}^1 \quad (1)$$

=====

REMARQUES.

α) On a utilisé le résultat : $\Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \cap \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1$

En effet, soit $u \in \Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \cap \Gamma_{y_2}$ ($\alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$)

$u \in \Gamma_{y_2}$, d'une part.

D'autre part : $u = v \alpha_{j_1}^1$ avec $v \in \Gamma_{y_1}$.

D'où : $v = u(\alpha_{j_1}^1)^{-1} \in \Gamma_{y_2}$ et $v \in \Gamma_{y_1 y_2}$

et réciproquement.

β) Si $\alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$ comme $\Gamma_1 = \Gamma_{y_1} \Gamma_{y_2}$ $\alpha_{j_1}^1 = u \alpha_{j_1}^1$
avec $\alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$ et $\Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 = \Gamma_{y_1} u \alpha_{j_1}^1 = \Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1$

Cela étant, revenons au résultat à démontrer qui est que :

$$\underline{\Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \cap \Gamma_{y_2} \alpha_{j_2}^2 \neq \phi .}$$

C'est à dire, puisque :

$$\Gamma_{y_1} = \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2$$

$$\Gamma_{y_2} = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1$$

$$\{ \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \} \alpha_{j_1}^1 \cap \{ \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 \} \alpha_{j_2}^2 \neq \phi \quad (2)$$

Nous allons raisonner par l'absurde en utilisant la relation (1).

A savoir que, dans (2), il ne peut exister de valeurs de $\alpha_{j_1}^1$ et $\alpha_{j_2}^2$, telles qu'il y ait plus d'une solution, c'est à dire :

Supposons qu'il existe α^1 et α^2 tels que (2) ait 2 solutions :

$$n_1 \alpha_{j_2}^2 \alpha^1 = n_2 \alpha_{j_1}^1 \alpha^2 \quad (\Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \alpha^1 = \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 \alpha^2)$$

$$n_3 \alpha_{j_2}^2 \alpha^1 = n_4 \alpha_{j_1}^1 \alpha^2 \quad (\Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \alpha^1 = \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 \alpha^2)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \alpha^1 (\alpha^2)^{-1} &= (\alpha_{j_2}^2)^{-1} n_1^{-1} n_2 \alpha_{j_1}^1 \\ &= (\alpha_{j_2}^2)^{-1} n_3^{-1} n_4 \alpha_{j_1}^1 \end{aligned}$$

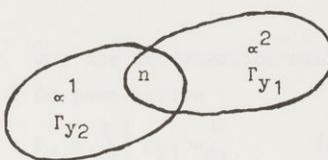
$$\text{Soit : } \underline{\alpha_{j_2}^2 (\alpha_{j_2}^2)^{-1} (n_1^{-1} n_2) \alpha_{j_1}^1 (\alpha_{j_1}^1)^{-1} = n_3^{-1} n_4 .}$$

Ceci est impossible :

$$n_1^{-1} n_2 \in \Gamma_{y_1 y_2} \quad n_3^{-1} n_4 \in \Gamma_{y_1 y_2} \quad \alpha_{j_1}^1 (\alpha_{j_1}^1)^{-1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$$

(voir remarque) et $\alpha_{j_2}^2 (\alpha_{j_2}^2)^{-1} \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$ (voir remarque).

Dès lors :



$$n_3^{-1} n_4 \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$$

et

$$\alpha_{j_2}^2 (\alpha_{j_2}^2)^{-1} n_1^{-1} n_4 \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$$

Ceci est impossible ; à moins que $\alpha_{j_2}^2 = \alpha_{j_2}^2$ et $\alpha_{j_1}^1 = \alpha_{j_1}^1$

Autrement dit, les classes (2) se coupent comme des droites : c'est à dire, suivant une seule classe que l'on peut écrire :

$$\text{soit : } \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_1}^1 \quad \text{soit : } \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2$$

Le résultat est donc acquis pour $h = 2$.

REMARQUE.

On utilise le fait que $\Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1 (\alpha_{j_1}^1)^{-1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$
 (resp^t $\Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 (\alpha_{j_2}^2)^{-1} \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$).

En effet, sinon on aurait : $u \alpha_{j_1}^1 (\alpha_{j_1}^1)^{-1} = v$

$u \in \Gamma_{y_1 y_2}$ et $v \in \Gamma_{y_1 y_2}$.

Donc : $\alpha_{j_1}^1 (\alpha_{j_1}^1)^{-1} = w \in \Gamma_{y_1 y_2}$

Mais alors $\alpha_{j_1}^1$ et $\alpha_{j_1}^1$ définissent la même classe, ce qui est contraire à la construction.

b) Cas général.

Soient maintenant h plans y_1, y_2, \dots, y_h . On vérifie tout d'abord que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}} \Gamma_{y_{i_2}} & \forall i_1 \neq i_2 \\ \Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}} \Gamma_{y_{i_2}} \Gamma_{y_{i_3}} & \forall i_1 \neq i_2 \neq i_3 \\ \dots & \\ \Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}} \Gamma_{y_{i_2}} \Gamma_{y_{i_3}} \dots \Gamma_{y_{i_h}} & \forall i_1 i_2 \dots i_h \quad \forall h. \end{array} \right.$$

Cette propriété de Γ_1 est d'autre part, vérifiée par tous les sous-groupes $\Gamma_{y_{i_j}}, \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2}}, \dots, \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}}, \forall i$.

Ceci permet la généralisation de (1).

En effet, par exemple :

$$\Gamma_1 = \Gamma_{y_1} \Gamma_{y_2} \dots \Gamma_{y_h}$$

et :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \quad \text{avec } \alpha_{j_1}^1 \in \Gamma_{y_2} \dots \Gamma_{y_h} - \Gamma_{y_1}$$

Mais alors :

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_2} = \bigcup_{j_1} (\Gamma_{y_1} \alpha_{j_1}^1 \cap \Gamma_{y_2}) = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_1}^1$$

et l'on a aussi

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_2} \alpha_{j_2}^2 \quad \text{avec } \alpha_{j_2}^2 \in \Gamma_{y_1 y_3} \dots \Gamma_{y_h} - \Gamma_{y_2}$$

D'où :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_1}^1.$$

et ainsi de suite ; finalement :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1 j_2 \dots j_h} \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_h} \alpha_{j_h}^h \alpha_{j_{h-1}}^{h-1} \dots \alpha_{j_2}^2 \alpha_{j_1}^1$$

avec $\alpha_{j_i}^{i_1} \in \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_h} - \Gamma_{y_i}, \forall i$

Il est bien certain que l'ordre dans lequel on a classé les plans y_i est arbitraire et que l'égalité précédente s'écrirait aussi bien :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1 j_2 \dots j_h} \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}}^{\alpha_{j_h}^{i_h} \alpha_{j_{h-1}}^{i_{h-1}} \dots \alpha_{j_1}^{i_1}} \quad (3)$$

pour toute permutation (i_1, i_2, \dots, i_h) de $(1, 2, \dots, h)$.

(Autrement dit, il y a globalement commutation des α , ce qui est à rapprocher de l'égalité (1)).

Supposant alors que $h-1$ classes $\Gamma_{y_{i_1}}^{\alpha^{i_1}}$ (avec $\alpha^{i_1} \in \Gamma_{y_{i_1} \dots y_{i_{l-1}} y_{i_{l+1}} \dots y_{i_h} - y_{i_l}}$) se coupent, nous allons en déduire que h classes $\Gamma_{y_{i_1}}^{\alpha^{i_1}}$ se coupent et le résultat à démontrer le sera par récurrence. Soient donc les plans y_1, y_2, \dots, y_h . Considérons d'une part les plans y_1, y_2, \dots, y_{h-2} et y_h , d'autre part les plans $y_1, y_2, \dots, y_{h-3}, y_{h-1}$ et y_h .

Dans un cas comme dans l'autre, suivant l'hypothèse de récurrence, on sait que :

$$(a) \quad y_1^{\alpha^{(1)}} \cap \dots \cap y_{h-2}^{\alpha^{(h-2)}} \cap y_h^{\alpha^{(h)}} \neq \phi.$$

$$(avec \alpha^{(i)} \in \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_h} - \Gamma_{y_i}, \forall i).$$

$$(b) \quad y_1^{\alpha^{(1)}} \cap \dots \cap y_{h-3}^{\alpha^{(h-3)}} \cap y_{h-1}^{\alpha^{(h-1)}} \cap y_h^{\alpha^{(h)}} \neq \phi.$$

$$(avec de même \alpha^{(i)} \in \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_h} - \Gamma_{y_i}, \forall i)$$

Plus précisément, étant donné le cas $h = 2$, l'intersection des classes :

- (a) peut s'écrire :

$$\bigcup_{j_{h-1}} \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_h} \alpha_{j_{h-1}}^{(h-1)} \underbrace{\alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \dots \alpha_{j_{h-2}}^{h-2}}_{\text{fixés.}} \alpha^h$$

- (b) peut s'écrire :

$$\bigcup_{j_{h-2}} \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_h} \alpha_{j_{h-2}}^{(h-2)} \underbrace{\alpha_{j'_1}^1 \alpha_{j'_2}^2 \dots \alpha_{j'_{h-3}}^{h-3} \alpha_{j'_{h-1}}^{h-1}}_{\text{fixés.}} \alpha^h$$

C'est à dire, respectivement :

$$\Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-2} y_h} \alpha^{\alpha^h} \text{ et } \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-3} y_{h-1} y_h} \beta^{\alpha^h}$$

$$\text{en posant : } \alpha = \alpha_{j_1}^1 \dots \alpha_{j_{h-2}}^{h-2}$$

$$\text{et } \beta = \alpha_{j'_1}^1 \dots \alpha_{j'_{h-3}}^{h-3} \alpha_{j'_{h-1}}^{h-1}$$

on est ramené à l'intersection de :

$$\Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-2} y_h} \alpha \text{ avec } \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-3} y_{h-1} y_h} \beta$$

$$\text{Or : } \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-3} y_h} = \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-2} y_h} \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_{h-3} y_{h-1} y_h}$$

On retrouve avec de nouvelles notations le problème résolu en a) concernant $h = 2$, que l'on peut donc démontrer comme en a).

3.2 - Constructions découlant du théorème précédent. c.q.f.d.

Soient $y_i \quad \forall i \in [1, N]$ et $y'_i \parallel y_i \quad \forall i$. On vient de voir qu'il existe $\alpha \in \Gamma_1$, tel que : $y'_i = y_i \alpha$, $\forall i \in [1, k] \quad h \leq k$, par exemple.

Considérons $x_1 = \bigcap_{i \in [1, N]} y_i$ et $x'_1 = \bigcap_{i \in [1, N]} y'_i$

On a par application des propriétés d'un automorphisme : $x'_1 = x_1 \alpha$.
 Dès lors, soient $\Gamma_{y'_1 y'_2 \dots y'_h} = \bigcap \Gamma_{y'_i}$, $\Gamma_{y'_i}$ désignant le stabilisateur de y'_i ; de même soit $\Gamma_{x'_1}$ le stabilisateur de x'_1 et enfin $N'_h = \Gamma_{y'_1 y'_2 \dots y'_h} \cap \Gamma_{x'_1}$. On a :

- $\Gamma_{y'_1 y'_2 \dots y'_h} = \alpha^{-1} \Gamma_{y_1 y_2 \dots y_h} \alpha$, $\forall h \leq k$
- $\Gamma_{x'_1} = \alpha^{-1} \Gamma_{x_1} \alpha$.
- $N'_h = N'_1 = \alpha^{-1} N_1 \alpha = \alpha^{-1} [\Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1}] \alpha$.

Tous les problèmes de construction sont donc apparemment résolus.

4. CONSTRUCTION DE TABLEAUX ORTHOGONAUX D'INDICE UNITE.

Soit Γ un groupe d'ordre $n_1 N q^k$. Supposons que Γ soit le produit de deux groupes Γ_1 et Γ_2 , tels que :
 $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1$ avec : $\text{Card}[\Gamma_1] = n_1 q^k$; $\text{Card}[\Gamma_2] = n_1 N$; Γ_1 est invariant Γ . Soit Γ_{y_1} un sous-groupe de Γ_1 avec $\text{Card}[\Gamma_{y_1}] = n_1 q^{k-1}$. Soit $N_1 = \Gamma_{y_1} \cap \Gamma_2$ avec $\text{Card}[N_1] = n_1$ et posons enfin : $\Gamma_{x_1} = \Gamma_2$, en supposant que : $\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{x_1} = \Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1}$. Soit alors :
 $\Gamma_{y_1} = N_1 \cup N_1 \alpha_2 \cup \dots \cup N_1 \alpha^{k-1}$ la décomposition de Γ_{y_1} suivant le sous-groupe N_1 .

Posons : $\Delta_1 = \Gamma_{x_1} \cup \Gamma_{x_1} \alpha_2 \cup \dots \cup \Gamma_{x_1} \alpha^{k-1}$.

La construction d'un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k est alors la suivante :

- Points du réseau : $(\Gamma_{x_1}) \alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma$
- Plans du réseau : $\Delta_1 \alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma$
- Classe F_1 : $\Delta_1 \alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma_1$.
- Plans $y_1 y_2 \dots y_N$: $\Delta_1 \alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma_{x_1}$.

La justification des propriétés des réseaux $(R)_{k-1}$ conduit à imposer aux données précédentes, la condition supplémentaire suivante :

Condition : Soit $\forall h \leq k$, $a_1, a_2, \dots, a_h \in \Gamma_2$ tels que :
 $a_i^{-1} \Gamma_{y_1} a_i \neq a_j^{-1} \Gamma_{y_1} a_j$ et ceci $\forall a_i \in [a_1, a_2, \dots, a_h]$
 $\forall a_j \in [a_1, a_2, \dots, a_h]$, on a :

$$\text{Card} [a_1^{-1} \Gamma_{y_1} a_1 \cap \dots \cap a_h^{-1} \Gamma_{y_1} a_h] = n_1 q^{k-h}$$

Démonstration.

Avant de justifier la construction, un certain nombre de remarques sur les données sont nécessaires :

a) Tout d'abord $\Gamma_{y_1} \subset \Gamma_1$ et Γ_1 invariant entraîne que :
 $\alpha^{-1} \Gamma_{y_1} \alpha \subset \Gamma_1, \forall \alpha \in \Gamma.$

Soit alors $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^N N_1 \gamma_i$ la décomposition de Γ_2 suivant N_1 et soit $y_i = y_1 \gamma_i$ ($\forall i$). En désignant par Γ_{y_i} le stabilisateur de y_i , on sait que l'on a : $\Gamma_{y_i} = \gamma_i^{-1} \Gamma_{y_1} \gamma_i$. On voit donc que :

$$\underline{\forall i \in [1, N] \quad \Gamma_{y_i} \subset \Gamma_1}$$

b) Soit $N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1}$, soit $\alpha \in \Gamma_{x_1}$, on a $\alpha^{-1} \Gamma_{x_1} \alpha = \Gamma_{x_1}$. D'autre part, on vient de voir que $\alpha^{-1} \Gamma_{x_1} \alpha \subset \Gamma_1$.
 Donc : $\alpha^{-1} N_1 \alpha \subset \Gamma_1$; mais $\alpha^{-1} N_1 \alpha \subset \Gamma_{x_1}$; donc $\alpha^{-1} N_1 \alpha \subset N_1$.
 Finalement :

$$\underline{\alpha^{-1} N_1 \alpha \subset N_1 \quad \forall \alpha \in \Gamma_{x_1} \quad (N_1 \text{ est invariant dans } \Gamma_{x_1}).}$$

c) Soit $\alpha \in \Gamma_{x_1}$; on a $N_1 \subset \Gamma_{y_1}$, donc $\alpha^{-1} N_1 \alpha \subset \alpha^{-1} \Gamma_{y_1} \alpha$; donc : $N_1 \subset \alpha^{-1} \Gamma_{y_1} \alpha$. Autrement dit :

$$\underline{N_1 \text{ est un sous-groupe de } \Gamma_{y_i} \quad (\forall i)}$$

$$d) \Gamma_{y_i} \subset \Gamma_1 \implies \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i} \subset \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_1 : \text{donc } \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i} \subset N_1$$

Mais N_1 est un sous-groupe de Γ_{y_i} ; comme N_1 est un sous-groupe de $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$, N_1 est un sous-groupe de $\Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$.

D'où :

$$\underline{N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i} \quad (\forall i)}$$

e) On a donc désormais : $N_1 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1} = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$
 $\forall i \in [1, N]$ et N_1 est invariant dans $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$. Soit alors :

$$\underline{\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} = \Gamma_{y_{i_1}} \cap \Gamma_{y_{i_2}} \cap \dots \cap \Gamma_{y_{i_h}} \quad \forall h \leq k}$$

$y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}$ désignant h plans quelconques de (y_1, y_2, \dots, y_N) .

On a évidemment :

$$\underline{N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} \quad \forall h \leq k}$$

f) La condition supplémentaire indiquée dans la construction signifie que : $\forall h \leq k \quad \text{Card} [\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}}] = n_1 q^{k-h}$.

On en déduit que les sous-groupes :

$\Gamma_1, \Gamma_{y_{i_1}}, \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2}}, \dots, \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}}$ ont les propriétés entraînant la transitivité étudiée en 3).

En effet, par exemple : $\Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}} \Gamma_{y_{i_2} \dots y_{i_h}}$ puisque :

$$n_1 q^k = \frac{n_1 q^{k-1} n_1 q^{k-h+1}}{n_1 q^{k-h}}$$

- On est maintenant en mesure de justifier la construction proprement dite : rappelons à ce sujet que le plan y_1 est identifié à Δ_1 et $y_i \forall i \in \Delta_1 \setminus \mathcal{C}_1$, la décomposition $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^N N_1 \mathcal{C}_i$ étant donnée.

Nous devons démontrer :

(1) - Par un point quelconque, il passe un plan et un seul de chaque classe.

(2) - h plans se coupent en q^{k-h} points $h \leq k$

Si $h > k$ h plans se coupent en 1 ou 0 point.

a) Etude des points et des plans.

Soient les décompositions de Γ_1 suivant Γ_{y_1} , de Γ_{y_1} suivant N_1 et de $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$ suivant N_1 :

$$\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_{y_1} \alpha_i$$

$$\Gamma_{y_1} = \bigcup_i N_1 \gamma_i$$

$$\Gamma_{x_1} = \bigcup_{i=1}^N N_1 \beta_i$$

α) Vérifions tout d'abord que par un point quelconque, il passe un plan et un seul de la classe F_1 .

Point quelconque : $\Gamma_{x_1} \alpha_0$, $\alpha_0 \in \Gamma$

Plans de la classe F_1 : $\Delta_1 \alpha_i$, $\alpha_i \in \Gamma_1$

Pour démontrer ce résultat, remarquons que :

$$\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_{y_1} \alpha_i = \bigcup_i \bigcup_j N_1 \gamma_j \alpha_i.$$

Mais $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1$ c'est à dire :

$$\Gamma = \Gamma_2 \bigcup_i \bigcup_j N_1 \gamma_j \alpha_i = \bigcup_i \bigcup_j \Gamma_2 N_1 \gamma_j \alpha_i = \bigcup_i \bigcup_j \Gamma_2 \gamma_j \alpha_i$$

(En effet, $N_1 \subset \Gamma_{x_1}$ et donc $N_1 \Gamma_{x_1} = \Gamma_{x_1}$).

Tout élément de Γ peut donc s'écrire $u \gamma_j \alpha_i$ avec $u \in \Gamma_{x_1}$.

Dans ces conditions, il existe une et une seule valeur de γ_j et α_i telle que : $\Gamma_{x_1} \alpha_0 = \Gamma_{x_1} \gamma_j \alpha_i$ c.q.f.d.

β) Vérifions que par un point quelconque, il passe un plan et un seul de la classe F_i $\forall i$.

Point quelconque : $\Gamma_{x_1} \alpha_0$, $\alpha_0 \in \Gamma$

Plans de la classe F_i : $\Delta_1 \beta_i \alpha_j$, $\beta_i \in \Gamma_{x_1}$, $\alpha_j \in \Gamma_1$

Pour démontrer ce résultat, on peut remarquer que :

$$\Gamma_1 = \bigcup_j \Gamma_{y_1} \alpha'_j \quad \text{avec } \alpha'_j \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}.$$

Donc , puisque $\Gamma_{y_i} = \beta_i^{-1} \Gamma_{y_1} \beta_i$.

$$\Gamma_1 = \bigcup_j \beta_i^{-1} \Gamma_{y_1} \beta_i \alpha_j = \bigcup_k \bigcup_j \beta_i^{-1} N_1 \gamma_k \beta_i \alpha'_j.$$

$$\text{Or : } \Gamma = \Gamma_{x_1} \Gamma_1 = \Gamma_{x_1} \bigcup_k \bigcup_j \beta_i^{-1} N_1 \gamma_k \beta_i \alpha'_j = \bigcup_k \bigcup_j (\Gamma_{x_1} \beta_i^{-1} N_1) \gamma_k \beta_i \alpha'_j.$$

Or : $\beta_i \in \Gamma_{x_1}$, donc $\Gamma_{x_1} \beta_i^{-1} N_1 = \Gamma_{x_1}$ et finalement :

$$\Gamma = \bigcup_k \bigcup_j \Gamma_{x_1} \gamma_k \beta_i \alpha'_j.$$

Soit alors le point $\Gamma_{x_1} \alpha_0$; il existe une valeur et une seule de γ_k et α'_j telles que : $\Gamma_{x_1} \alpha_0 = \Gamma_{x_1} \gamma_k \beta_i \alpha'_j$. Le résultat est donc établi. c.q.f.d.

b) Etude du parallélisme des plans.

D'après a), les plans d'une même classe sont donc parallèles (sans points communs).

Ce résultat peut se démontrer directement et alors , la démonstration faite en a) devient inutile puisque chaque plan contient de façon bien évidente q^{k-1} points

Autre démonstration.

$$\alpha) \underline{\Delta_1 \cap \Delta_1 \alpha = \phi \quad \forall \alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}}$$

$$\text{On a : } \Delta_1 = \bigcup \Gamma_{x_1} \gamma_i \quad \text{et} \quad \Delta_1 \alpha = \bigcup \Gamma_{x_1} \gamma_i \alpha.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que :

$$\Gamma_{x_1} \gamma_i = \Gamma_{x_1} \gamma_j \alpha ; \text{ cela entraîne } \gamma_j \alpha \gamma_i^{-1} = u \in \Gamma_{x_1}$$

$$\text{soit : } \alpha = \gamma_j^{-1} u \gamma_i.$$

Si $u \in N_1$, $\gamma_j^{-1} u \gamma_i \in \Gamma_{y_1}$; or : $\alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$, d'où contradiction ;

Si $u \in \Gamma_{x_1} - N_1$, $u \notin \Gamma_1$ et $\gamma_j \alpha \gamma_i^{-1} \in \Gamma_1$, d'où contradiction.

D'où le résultat annoncé.

$$\beta) \quad \underline{\Delta_1 a \cap \Delta_1 a \alpha = \phi, \quad a \in \Gamma_{x_1}, \quad \alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1} \quad (y_1 = y_1 a)}$$

Raisonnons toujours par l'absurde et supposons que :

$$\Gamma_{x_1} \gamma_i a = \Gamma_{x_1} \gamma_j a \alpha. \text{ On a donc :}$$

$$\gamma_j a \alpha a^{-1} \gamma_i^{-1} = u \in \Gamma_{x_1}.$$

$$\text{Or, on a : } a \alpha a^{-1} = \beta \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$$

$$\text{En effet : } \alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}; \text{ donc : } \beta = a \alpha a^{-1} \notin \Gamma_{y_1} a^{-1} = \Gamma_{y_1}$$

c'est à dire : $\beta \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$.

$$\text{D'où : } \underline{\gamma_j \beta \gamma_i^{-1} = u \in \Gamma_{x_1} \text{ avec } \beta \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}}$$

On est ramené à α).

$$\delta) \quad \underline{\Delta_1 a \alpha_1 \cap \Delta_1 a \alpha_2 = \phi, \quad a \in \Gamma_{x_1}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1} \quad (y_1 = y_1 a)}$$

$$\text{Par l'absurde, on a : } \Gamma_{x_1} \gamma_i a \alpha_1 = \Gamma_{x_1} \gamma_j a \alpha_2.$$

$$\text{Soit : } \Gamma_{x_1} \gamma_i a = \Gamma_{x_1} \gamma_j a \alpha_2 \alpha_1^{-1}$$

$$\text{Or, } \beta = \alpha_2 \alpha_1^{-1} \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}.$$

On est donc ramené à β).

c) Intersection des plans.

Soient $a_2 a_3 \dots a_N \in \Gamma_2$, tels que : $y_i = y_1 a_i \quad \forall i \in [1, N]$
(Autrement dit : $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^N N_1 a_i$ avec $a_1 = 1$).

Nous allons étudier, pour commencer, le cas particulier de l'intersection de deux plans.

\ast) Intersection de deux plans.

$$\text{Démontrons tout d'abord que : } \underline{\text{Card} [\Delta_1 \cap \Delta_1 a_i]} = n_1 N q^{k-2}$$

Nous allons utiliser la condition sous la forme :

$$\text{Card } \Gamma_{y_1} y_i = n_1 q^{k-2}$$

On a :

$$\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i} = \Gamma_{y_1} \cap [a_i^{-1} \Gamma_{y_1} a_i] = (\bigcup_j N_1 \gamma_j) \cap (a_i^{-1} (\bigcup_j N_1 \gamma_j) a_i)$$

Or $\Gamma_{x_1} = \bigcup_k N_1 a_k$. (1)

On a :

$$a_k [\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i}] = [a_k (\bigcup_j N_1 \gamma_j)] \cap [a_k a_i^{-1} (\bigcup_j N_1 \gamma_j) a_i]$$

N_1 étant invariant dans Γ_{x_1} :

$$a_k (\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i}) = [\bigcup_j N_1 a_k \gamma_j] \cap [\bigcup_j N_1 a_k a_i^{-1} \gamma_j a_i]$$

et :

$$\begin{aligned} \bigcup_k a_k [\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i}] &= [\bigcup_k \bigcup_j N_1 a_k \gamma_j] \cap [\bigcup_k \bigcup_j N_1 a_k a_i^{-1} \gamma_j a_i] \\ &= [\bigcup_j \Gamma_{x_1} \gamma_j] \cap [\bigcup_j \Gamma_{x_1} a_i^{-1} \gamma_j a_i] \\ &= [\bigcup_j \Gamma_{x_1} \gamma_j] \cap [\bigcup_j \Gamma_{x_1} \gamma_j a_i] \end{aligned}$$

(Ceci , vu (1)).

Finalement :

$$\boxed{\bigcup_k a_k \Gamma_{y_1} y_i = \Delta_1 \cap \Delta_1 a_i}$$

Or $\text{Card } \bigcup_k \Gamma_{y_1} y_i = \sum_{k=1}^N n_1 q^{k-2} = n_1 N q^{k-2}$

REMARQUES.

- On a utilisé (1) $a(S_1 \cup S_2) = a S_1 \cup a S_2$
 (2) $a(S_1 \cap S_2) = a S_1 \cap a S_2$.
 (3) $a_j \Gamma_{y_1} y_i \cap a_k \Gamma_{y_1} y_i = \phi \quad \forall j \neq k$.

Ceci est exact ; effectivement : si $a_j u = a_k v$, on a :
 $a_k^{-1} a_j = v u^{-1} = w$; le seul cas possible est celui où $w \in N_1$;

alors $a_j = a_k w$ et a_j serait dans la même classe que a_k , ce qui est contraire à l'hypothèse.

- Démontrons maintenant de façon générale que :

$$\text{Card}[\Delta_1 a_i^\alpha \cap \Delta_1 a_j \beta] = n_1 N q^{k-2} \begin{cases} a_i, a_j \in \Gamma_2. \\ \alpha, \beta \in \Gamma_1. \end{cases}$$

$$y'_i = y_1 a_i^\alpha = y_i^\alpha \quad ; \quad y'_j = y_1 a_j^\alpha = y_j^\alpha.$$

Vu la transitivité, $\exists \delta \in \Gamma_1$ avec $y'_i = y_i \delta$ et $y'_j = y_j \delta$

Il suffit donc d'étudier :

$\text{Card}[\Delta_1 a_i \delta \cap \Delta_1 a_j \delta]$, que l'on ramène au cas précédent (ce problème va être vu en détail maintenant dans l'étude du cas général).

β) Intersection de h plans.

$$\text{Tout d'abord } \text{Card}[\Delta_1 a_{i_1} \cap \Delta_1 a_{i_2} \cap \dots \cap \Delta_1 a_{i_h}] = n_1 N q^{k-h}.$$

On utilise la condition sous la forme :

$$\text{Card}[\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}}] = n_1 q^{k-h}$$

$$\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} = \bigcap_{j=1}^h a_{i_j}^{-1} \Gamma_{y_1} a_{i_j} = \bigcap_{j=1}^h a_{i_j}^{-1} \left(\bigcup_{k \in N_1} \delta_k \right) a_{i_j}$$

$$\begin{aligned} a_i \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} &= \bigcap_{j=1}^h a_i a_{i_j}^{-1} \left(\bigcup_{k \in N_1} \delta_k \right) a_{i_j} \\ &= \bigcap_{j=1}^h \left[\bigcup_{k \in N_1} a_i a_{i_j}^{-1} \delta_k a_{i_j} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_i a_i \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} &= \bigcup_i \bigcap_j \bigcup_{k \in N_1} a_i a_{i_j}^{-1} \delta_k a_{i_j} \\ &= \bigcap_j \bigcup_k \left(\bigcup_i a_i a_{i_j}^{-1} \delta_k a_{i_j} \right) \\ &= \bigcap_j \bigcup_k \Gamma_{x_1} a_{i_j}^{-1} \delta_k a_{i_j} \\ &= \bigcap_j \bigcup_k \Gamma_{x_1} \delta_k a_{i_j} \\ &= \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\bigcup_i a_i \Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}$$

D'où :

$$\text{Card} \left[\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \right] = \sum_{i=1}^N n_i q^{k-h} = n_1 N q^{k-h}.$$

REMARQUE.

On justifie facilement le résultat :

$$a_i \Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} \cap a_k \Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} = \phi$$

En effet :

$$a_i u = a_k v$$

$$a_k^{-1} a_i = v u^{-1} = w \in \Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}.$$

Le seul cas possible est celui où $w \in N_1$. Mais alors a_i et a_k appartiendraient à une même classe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

- Démontrons enfin :

$$\text{Card} [\Delta_1 a_{i_1} \alpha_1 \cap \Delta_1 a_{i_2} \alpha_2 \cap \dots \cap \Delta_1 a_{i_h} \alpha_h] = n_1 N q^{k-h}$$

avec $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \in \Gamma_1$.

Par la transitivité, on peut ramener ce résultat au précédent : en effet, si $y'_{i_j} = y_{i_j} \alpha_i = y_1 a_{i_j} \alpha_i$ on sait qu'il existe $\alpha \in \Gamma_1$ tel que : $y'_{i_j} = y_{i_j} \alpha \forall j$.

Donc que : $\Gamma y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h} = \alpha^{-1} \Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} \alpha$

Si $x_1 \xi \in \bigcap_j y'_{i_j}$, on a : $x_1 \xi \in \bigcap_j y_{i_j} \alpha$ soit :

$$x_1 \xi \alpha^{-1} \in \bigcap_j y_{i_j}, \text{ donc : } \xi \alpha^{-1} \in \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}$$

et $\xi \in (\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}) \alpha$. D'où le résultat.

Mais l'on peut opérer par un raisonnement direct

$$\begin{aligned} \bigcap_j \Gamma_{y'_{i_j}} &= \bigcap_j \alpha^{-1} \Gamma_{y_{i_j}} \alpha = \bigcap_j \alpha^{-1} a_{i_j}^{-1} \Gamma_{y_1} a_{i_j} \alpha \\ &= \bigcap_j \alpha^{-1} a_{i_j}^{-1} \left(\bigcup_i N_1 \chi_i \right) a_{i_j} \alpha. \end{aligned}$$

Multiplions par $\beta_k \alpha$ et formons \bigcup_k .

$$\begin{aligned} \bigcup_k \beta_k \alpha \left[\bigcap_j \Gamma_{y'_{i_j}} \right] &= \bigcup_k \left[\bigcap_j \beta_k \alpha^{-1} a_{i_j}^{-1} \left(\bigcup_i N_1 \chi_i \right) a_{i_j} \alpha \right] \\ &= \bigcap_j \left[\bigcup_k \bigcup_i N_1 \beta_k a_{i_j}^{-1} \chi_i a_{i_j} \alpha \right] \\ &= \bigcap_j \left[\bigcup_i \left(\Gamma_{x_1} a_{i_j}^{-1} \chi_i a_{i_j} \alpha \right) \right] \\ &= \bigcap_j \left[\bigcup_i \Gamma_{x_1} \chi_i \right] a_{i_j} \alpha = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \alpha \end{aligned}$$

Donc :

$$\bigcup_k \beta_k \alpha \left[\bigcap_j \Gamma_{y'_{i_j}} \right] = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \alpha$$

et Card $\left[\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \alpha \right] = \sum_{k=1}^N n_1 q^{k-h} = n_1 N q^{k-h}$

Remarques :

1) On a encore utilisé le résultat

$$\beta_i \alpha \Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}} \cap \beta_k \alpha \Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}} = \phi \quad \forall i \neq k$$

c'est à dire :

$$\beta_i \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} \alpha \cap \beta_k \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} \alpha = \phi.$$

(Par multiplication à droite par α^{-1} , ce résultat est analogue à celui de la dernière remarque).

2) La formule :

$$\bigcup_k \beta_k \alpha \left[\Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}} \right] = \bigcap_j \Delta_1 a_{ij} \alpha$$

permet de remarquer qu'une multiplication à droite par $\alpha' \in \Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}}$ ne change rien.

Ceci est exact également pour :

$$\bigcup_k \beta_k \alpha \Gamma_{y'_{i_j}} = \Delta_1 a_{ij} \alpha \quad \text{avec } \alpha' \in \Gamma_{y'_{i_j}}$$

c'est à dire : $\Delta_1 a_{ij} \alpha \alpha_j = \Delta_1 a_{ij} \alpha \quad \forall \alpha_j \in \Gamma_{y'_{i_j}}$.

Soit en posant $\alpha'_j = \alpha \alpha_j$.

$$\Delta_1 a_{ij} \alpha'_j = \Delta_1 a_{ij} \alpha.$$

Ce qui permet de ramener $\bigcap_j \Delta_1 a_{ij} \alpha'_j$ à $\bigcap_j \Delta_1 a_{ij} \alpha$ qui lui est égal.

REFERENCES.

- [1] Lecoïnte : Thèse 1970.
 [2] Dembowski : Kombinatorik 1970.

-o-

Reçu en Juillet 1974

- Pierre LECOINTE -

30, Rue Desaix

75015 PARIS