Réseaux (R)k-1 et groupes d'automorphismes transitifs

Pierre Lecointe

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1977, XXII - 55-82

RESEAUX $(R)_{k-1}$ ET GROUPES D'AUTOMORPHISMES TRANSITIFS

Pierre LECOINTE

Nous avons établi dans [1] l'équivalence entre réseaux $(R)_{k-1}$ et tableaux orthogonaux d'indice unité. Nous nous proposons en étudiant certains groupes d'automorphismes sur les réseaux $(R)_{k-1}$ de dégager des constructions de ces réseaux par utilisation des groupes de permutations.

1. RAPPELS ET DEFINITIONS.

1.1.- Définition des réseaux $(R)_{k-1}$ (référence [1]).

Soit E un ensemble fini d'éléments désignés par des points. Soit F un sous-ensemble d'éléments de P(E) désignés par des plans. Soit $\mathcal{F}$ une partition de F en N classes F_i. (Card $[F_i] \geq 2$, $i \in [1,N]$). Soient q et k deux nombres entiers positifs ($2 < k < N$). Le système (E, F, $\mathcal{F}$, N, k, q) constitue un réseau $(R)_{k-1}^{\wedge}$ de dimension k si l'on a :

(i) Tout point x de E appartient à un plan y et un seul de chaque classe F_i.

(ii) h plans quelconques de h classes différentes se coupent en q^{k-h} points si $h \leq k$, ou alors si $h > k$, soit en 1 point, soit en 0 point. (Lorsqu'il n'y aura aucun risque d'ambiguité, on notera en abrégé les réseaux $(R)_{k-1}$ par la lettre R).

- Rappelons au sujet de ces réseaux qu'on leur fait correspondre des tableaux orthogonaux d'indice unité, ce qui justifie l'intérêt de leur construction (référence [1]).

1.2 - Automorphismes sur réseaux $(R)_{k-1}$.

1.2-1 - Soient deux réseaux $(R)_{k-1}$:

$R_1 = (E_1, F_1, \mathcal{F}_1, N_1, k, q_1)$ et $R_2 = (E_2, F_2, \mathcal{F}_2, k, q_2)$.

Soit α une application de $E_1 \cup F_1 \cup \mathcal{F}_1$ dans $E_2 \cup F_2 \cup \mathcal{F}_2$.

(i) α est un homomorphisme de R_1 dans R_2 si :

$\forall x_1 \in E_1$, $x_1^\alpha \in E_2$; $\forall y_1 \in F_1$, $y_1^\alpha \in F_2$; $\forall F_i \in \mathcal{F}_1$, $F_i^\alpha \in \mathcal{F}$

$\forall x_1 \; \forall y_1 \; \forall F_i$ avec $x_1 \in y_1 \in F_i$: $x_1^\alpha \in y_1^\alpha \in F_i^\alpha$.

(ii) α est un isomorphisme de R_1 sur R_2 si α est un homomorphisme et si α est une bijection de E_1 sur E_2 (resp^t de F_1 sur F_2) (resp^t de $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$).

(iii) Un automorphisme α de R_1 est un isomorphisme de R_1 sur lui-même.

1.2-2 - Soit un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathcal{F}, N, k, q)$.

Soit Γ un sous-groupe de $G(R)$ groupe des automorphismes de $(R)_{k-1}$. On dira que Γ est transitif sur $(R)_{k-1}$ si Γ est transitif sur E, (resp^t sur F), (resp^t sur $\mathcal{F}$).

- Nous allons dégager maintenant les principales propriétés des groupes Γ transitifs sur un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k.

2. ETUDE DES GROUPES Γ.

2.1 - Soit Γ un groupe d'automorphismes transitif sur un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k. Soit F_1 une classe de $\mathcal{F}$ et soit $\Gamma_1 = \Gamma_{F_1}$ le stabilisateur de F_1.

1ère PROPRIETE.

Soit y un plan quelconque de F_1.

y^α décrit F_1 quand α parcourt Γ_1.

Démonstration.

Si $\alpha \in \Gamma_1$, on a $F_1^\alpha = F_1$. Soit $y_1 \in F_1$, $y_1^\alpha \in F_1^\alpha$ donc $y_1^\alpha \in F_1$. Réciproquement, soit $y' \in F_1$; puisque Γ est transitif $\exists\, \alpha \in \Gamma$ avec $y' = y_1^\alpha$. Supposons que $\alpha \notin F_1$, alors $F_1^\alpha \neq F_1$. Mais $y_1^\alpha \in F_1$ donc $y_1^\alpha \in F_1 \cap F_1^\alpha$. D'après les propriétés des réseaux, un même plan ne peut être commun à deux classes différentes ; donc : $F_1^\alpha = F_1$ et l'hypothèse $\alpha \notin \Gamma_1$ était absurde.

2.2 - Soit y_1 un plan de F_1 et Γ_{y_1} le stabilisateur de y_1.

2ème PROPRIETE.

Γ_{y_1} est un sous-groupe de Γ_1.

Démonstration.

Soit $\alpha \in \Gamma_{y_1}$. On a $y_1^\alpha = y_1$. Or, $y_1 \in F_1$, donc $y_1^\alpha \in F_1^\alpha$. Autrement dit, $y_1^\alpha \in F_1 \cap F_1^\alpha$.
Par définition, F_1^α est une classe de $\mathcal{F}$. Or, un même plan y_1 ne peut appartenir à deux classes différentes ; donc : $F_1^\alpha = F_1$ et $\alpha \in \Gamma_1$.

- Dorénavant, nous supposons que Γ_1 est un sous-groupe distingué de Γ.

2.3 - Soit $x_1 \in E$ et soit $y_i \in F_i$, $\forall\, i \in [1,N]$, N plans de chacune des N classes de plans, passant par x_1.
Soit alors Γ_2 l'ensemble des automorphismes $\alpha \in \Gamma$ tels que : $(y_1, y_2, \ldots, y_N)^\alpha = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_N^\alpha)$ soit une permutation de $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Soit enfin Γ_{x_1} le stabilisateur de x_1 et supposons que Γ_2 soit transitif sur $(y_1\ y_2 \ldots y_N)$.

3ème PROPRIETE.

(i) Γ_2 est un sous-groupe de Γ.

(ii) $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$.

(iii) $\Gamma = \Gamma_1\, \Gamma_2 = \Gamma_2\, \Gamma_1$.

(iv) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = N_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_{y_1} = \Gamma_2 \cap \Gamma_{y_i}$ ($y_i \in F_i$, $\forall\, i \in [1,N]$).

Démonstration.

(i) Evident.

(ii) Les plans $y_1\, y_2 \ldots y_N$ passent par x_1. On a donc en vertu des propriétés des réseaux $(R)_{k-1}$: $x_1 = \bigcap_{i=1}^{N} y_i$.
Or, $\forall \alpha \in \Gamma_2$ $(y_1\, y_2 \ldots y_N)^\alpha$ = permutation de $y_1\, y_2 \ldots y_N$.

Donc : $x_1^\alpha = x_1 = \bigcap_{i=1}^{N} y_i$, c'est-à-dire : $\alpha \in \Gamma_2 \Longrightarrow \alpha \in \Gamma_{x_1}$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \Gamma x_1$; on a donc $x_1^\alpha = x_1$

$$x_1 = \bigcap_{i=1}^{N} y_i \Longrightarrow x_1^\alpha = x_1 \in y_1^\alpha \cap y_2^\alpha \cap \ldots \cap y_N^\alpha$$

α étant un automorphisme, les plans $y_1^\alpha \ldots y_N^\alpha$ sont tous différents (puisque les plans $y_1\, y_2 \ldots y_N$ l'étaient). Ces plans ne sont pas parallèles puisqu'ils passent tous par x_1 ; donc $(y_1\, y_2 \ldots y_N)^\alpha$ est une permutation de $(y_1\, y_2 \ldots y_N)$ et $\alpha \in \Gamma_2$.

(iii) Avant de démontrer ce résultat, démontrons les deux lemmes suivants :

LEMME 1 : Si $y \,\|\, y'$ alors $y^\alpha \,\|\, y'^\alpha$ $\quad \forall \alpha \in \Gamma$.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $y^\alpha \cap y'^\alpha \neq \phi$
Soit alors $x \in y^\alpha \cap y'^\alpha$; cela entraîne que $x^{\alpha^{-1}} \in y$ et que $x^{\alpha^{-1}} \in y'$.
Ce qui est contraire à l'hypothèse.

LEMME 2 : Soit $y_i \in F_i$, $\forall\, i \in [1,N]$, y_i^α parcourt F_i quand α décrit Γ_{F_i} , Γ_{F_i} désignant le stabilisateur de F_i.

En effet, tout d'abord soit $\alpha \in \Gamma_{F_i}$; alors $y_i^\alpha \in F_i^\alpha = F_i$.
Réciproquement, soit $y'_i \in F_i$ $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que $y'_i = y_i^\alpha$.
Supposons par l'absurde que $\alpha \notin \Gamma_{F_i}$. C'est à dire : $F_i^\alpha = F_j \neq F_i$.

Alors, $y_i^{\alpha} \in F_i \cap F_i^{\alpha}$, ce qui est impossible (propriétés des réseaux) ; donc, $F_i^{\alpha} = F_i$ et $\alpha \in \Gamma_{F_i}$.

- Démontrons (iii) maintenant. L'hypothèse suivant laquelle Γ_1 est invariant va, bien sûr, être essentielle.

Soit u un élément quelconque de Γ. Soit y'_i l'image de y_1 par u. $y'_i = y_1 u$.

Si $y'_i \in F_i$ soit $y_i \in F_i$ et soit $a \in \Gamma_2$ tel que $y_i = y_1 a$

Soit $\alpha \in \Gamma_{F_i}$ tel que $y'_i = y_1^{\alpha}$. On a :

$$\underline{/ \quad y'_i = y_1 u = y_1 a \alpha.}$$

D'autre part, $y_1 = y_i a^{-1} \Longrightarrow y'_i a^{-1} \| y_1 \Longrightarrow y'_i a^{-1} \in \Gamma_1$

$\exists \beta \in \Gamma_1 \qquad y_1\beta = y'_i a^{-1} \Longrightarrow y'_i = y_1 \beta a$ soit :

$$\underline{/ \quad y'_i = y_1 u = y_1 \beta a.}$$

En conclusion :

$$\underline{/ \quad y_1 u = y_1 a \alpha = y_1 \beta a.}$$

En particulier : $a \alpha a^{-1} \beta^{-1} = u_1 \in \Gamma y_1 \subset \Gamma_1$.

Soit : $\alpha = a^{-1} u_1 \beta a = v \in \Gamma_1$ (puisque Γ_1 est invariant).

D'où :

$$\boxed{\Gamma_{F_i} = \Gamma_1}$$

Alors : $y_1 u = y_1 a \alpha = y_1 \beta a$ avec $a \in \Gamma_2$

et α , $\beta \in \Gamma_1$

Comme $a \alpha (\beta a)^{-1} = u_1 \in \Gamma y_1 \subset \Gamma_1$, on a :

$a \alpha = u_1 \beta a = \gamma a$ avec $\gamma \in \Gamma_1$; c'est à dire finalement :

$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1$.

En effet : $y_1 u = y_1 a \alpha$ permet d'écrire :
$u\alpha^{-1} a^{-1} = v \in \Gamma y_1$, c'est à dire : $u = va\alpha$.
Utilisons $a\alpha = \gamma a$; on a : $u = v\gamma a$ avec $v \in \Gamma y_1 \subset \Gamma_1, \gamma \in \Gamma_1$
et $a \in \Gamma_2$

Soit en posant $v\gamma = \gamma_1$:
$u = \gamma_1 a$ avec $\gamma_1 \in \Gamma_1$ et $a \in \Gamma_2$
D'où le résultat.

REMARQUE.

Soit $\alpha \in \Gamma_{F_i}$ on a $F_i\alpha = F_i$. Soit $a \in \Gamma_2$ tel que $F_i = F_1 a$.
On a finalement : $F_1 a = F_1 a\alpha$, c'est à dire $a\alpha a^{-1} \in \Gamma_1$.
Autrement dit : $\Gamma_{F_i} = a^{-1} \Gamma_1 a = \Gamma_1$ (puisque l'est invariant).
Donc : $\Gamma_{F_i} = \Gamma_1$.

(iv) Γy_i fixe y_i - $\Gamma x_1 \cap \Gamma y_i$ fixant y_i devrait au maximum permuter entre eux $y_1\, y_2 \dots y_{i-1}\, y_{i+1} \dots y_N$ mais cela n'est pas possible puisque $\Gamma y_i \subset \Gamma_1$ $(\Gamma y_i \subset \Gamma_{F_i} = \Gamma_1)$; donc si y_i est fixé $\forall\, j \neq i$, y_j est fixé ou bien changé en $y'_j \| y_j$, mais si $y'_j \| y_j$, ces éléments ne peuvent appartenir à Γ_{x_1}. Le seul cas possible reste celui où $y_1\, y_2 \dots y_N$ sont tous fixés ; ce qui implique le résultat à savoir : $\Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1} = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1} = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$.

2.4 -

4ème PROPRIETE.

K désignant le nombre de points de y_1,
R le nombre de plans passant par x_1,
on a :
$$\text{Card}\,[\Gamma_{x_1}]\,K = \text{Card}\,[\Gamma_{y_1}]\,R = \text{Card}\,[\Delta_1]$$
et : $\Delta_1 = \Gamma_{x_1} \quad \Delta_1 \quad \Gamma_{y_1}$

Ce résultat est démontré dans la référence [2].

Rappelons que : $\Delta_1 = \Delta_1(x_1, y_1) = \{ \alpha \in \Gamma : x_1\alpha \in y_1\}$.
On peut écrire dans le cas présent :
$$\text{Card}\,[\Gamma_{x_1}]\,q^{k-1} = \text{Card}\,[\Gamma_{y_1}]\,N = \text{Card}\,[\Delta_1]$$

2.5 - En désignant par n_1 l'ordre du sous-groupe
$N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_1$, on a :

<u>5ème PROPRIETE.</u>

$\mathrm{Card}[\Gamma_1] = n_1 q^k$; $\mathrm{Card}[\Gamma_{x_1}] = n_1 N$;
$\mathrm{Card}[\Gamma] = n_1 N q^k$; $\mathrm{Card}[\Gamma_{y_1}] = n_1 q^{k-1}$;
$\mathrm{Card}[\Delta_1] = n_1 N q^{k-1}$.

<u>Démonstration</u>.

On sait que $\mathrm{Card}[E] = q^k$. Cela entraîne : $\mathrm{Card}[\Gamma] = q^k \,\mathrm{Card}[\Gamma_{x_1}]$
De même, $\mathrm{Card}[y_1] = q^{k-1}$. D'où : $\mathrm{Card}[\Delta_1] = \mathrm{Card}[\Gamma_{x_1}] q^{k-1}$.
Or, $\mathrm{Card}\ \Delta_1 = \mathrm{Card}\ \Gamma_{y_1}\ N = \mathrm{Card}\ \Gamma_{x_1}\ q^{k-1}$
D'où : $\mathrm{Card}\ \Gamma_{x_1}\ q^{k-1} = \mathrm{Card}\ \Gamma_{y_1}\ N$

D'autre part, $\mathrm{Card}\ \Gamma = \mathrm{Card}\ \Gamma_1\ \Gamma_2 = \mathrm{Card}\ \Gamma_{x_1}\ q^k$

D'où : $\dfrac{\mathrm{Card}\ \Gamma_1\ \ \mathrm{Card}\ \Gamma_2}{\mathrm{Card}\ N_1} = \mathrm{Card}\ \Gamma_{x_1}\ q^k$

C'est à dire : $\mathrm{Card}\ \Gamma_1 = \mathrm{Card}\ N_1\ q^k$

soit : $\underline{\mathrm{Card}\ \Gamma_1 = n_1\ q^k}$

Ensuite, vu la définition de Γ_1 et les propriétés des réseaux :
$\mathrm{Card}\ \Gamma_1 = q\ \mathrm{card}\ \Gamma_{y_1}$.
En effet, Γ_{y_1} est un sous-groupe de Γ_1 et on a :

$\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^{q} \Gamma_{y_1} \alpha_i$ (avec $\alpha_1 = 1$)

Donc : $\underline{\mathrm{Card}\ \Gamma_{y_1} = n_1\ q^{k-1}}$

Cela entraîne :

$\underline{\mathrm{Card}\ \Delta_1 = n_1\ N\ q^{k-1}}$

$\underline{\mathrm{Card}\ \Gamma_{x_1} = n_1\ N.}$

Remarque.

Soit $x_1 \in y_1$ $\quad x_1^{\alpha} \in y_1$ $\quad$ si $\alpha \in \Gamma y_1$

Si $x_1 \alpha_1 = x_1 \alpha_2$ avec $\alpha_1 , \alpha_2 \in \Gamma_{y_1}$ on a :

$\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1} = N_1$;soit $\alpha_1 \in N_1 \alpha_2$.

Vu le cardinal de Γ_{y_1} , x_1^{α} $\forall \alpha \in \Gamma_{y_1}$ décrit y_1 et on a :

$$\Gamma_{y_1} = \bigcup_{i=1}^{q^{k-1}} N_1 \beta_i \qquad (\text{avec } \beta_1 = 1)$$

2.6 -

6ème PROPRIETE.

N_1 est un sous-groupe distingué de Γ_{x_1}.

Démonstration.

Il s'agit de montrer que $a^{-1} N_1 a \subset N_1$ $\quad \forall a \in \Gamma_{x_1}$

Soit le plan y_1 de F_1. Supposons que $y_i = y_1 a$. On a le schéma :

$$y_i \xrightarrow{a^{-1}} y_1 \xrightarrow{N_1} y_1 \xrightarrow{a} y_i$$

y_i est donc fixé par $a^{-1} N_1 a$; ceci peut se répéter $\forall y_i$

En effet, par définition, a permuté entre eux les plans $y_1 y_2 \cdots y_N$, c'est à dire :

$$y_j \xrightarrow{a^{-1}} y_k \xrightarrow{N_1} y_k \xrightarrow{a} y_j$$

Autrement dit, $y_1 y_2 \ldots y_N$ sont fixés par $a^{-1} N_1 a$. Donc $x_1 = \cap y_i$ est également fixé. D'où :

$$a^{-1} N_1 a \subset N_1.$$

2.7 -

7ème PROPRIETE.

Soient $\forall h \leqslant k$, $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_h}$
h plans quelconques pris parmi
$(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Posons :

$$- \Delta_{12\ldots h} = \Delta_{12\ldots h}(x_1 : y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_h})$$
$$= \{\alpha \in \Gamma : x_1^{\alpha} \in y_{i_1}, x_1^{\alpha} \in y_{i_2}, \ldots, x_1^{\alpha} \in y_{i_h}\}$$

$$- \Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}} = \Gamma_{y_{i_1}} \cap \Gamma_{y_{i_2}} \cap \ldots \cap \Gamma_{y_{i_h}}$$

(Γy_{i_j} désignant le stabilisateur de y_{i_j}).

$$- N_h = N_h(y_{i_1}\ y_{i_2} \ldots y_{i_h}) = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}}$$

$$- n_h = \text{Card}\,[N_h]$$

On a :

(1) $\text{Card}\,[\Delta_{12\ldots h}] = \text{Card}\,[\Gamma_{x_1}]\, q^{k-h} = \text{Card}[\Gamma_{y_{i_1}\ y_{i_2} \ldots y_{i_h}}]\, u_h$

u_h désignant un entier positif.

(2) $N_h = N_1$, $n_h = n_1$ et $\text{Card}\,[\Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}}] = n_1\, q^{k-h}$

(3) Si la décomposition de $\Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}}$ suivant N_1 s'écrit :

$\Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}} = N_1 \cup N_1\ \delta_2 \cup \ldots\ldots \cup N_1\ \delta_{q^{k-h}}$, on a :

$$\Delta_{12\ldots h} = \Gamma_{x_1} \cup \Gamma_{x_1}\ \delta_2 \cup \ldots\ldots \cup \Gamma_{x_1}\ \delta_{q^{k-h}}.$$

Démonstration.

(1) On sait que $\text{Card}\,[y_{i_1} \cap y_{i_2} \cap \ldots \cap y_{i_h}] = q^{k-h}$. Il en découle aussitôt que : $\text{Card}\,[\Delta_{12\ldots h}] = \text{Card}\,[\Gamma_{x_1}]\, q^{k-h}$.
D'autre part, par définition :

$$\Delta_{12\ldots h} = \{\alpha \in \Gamma : x_1^{\alpha} \in y_{i_1} \ldots x_1^{\alpha} \in y_{i_h}\}$$
$$= \{\alpha \in \Gamma : y_{i_1}^{\alpha^{-1}} \ldots y_{i_h}^{\alpha^{-1}} \text{ passent par } x_1\}$$

Dans ces conditions :

$$\text{Card}\left[\Delta_{12\ldots h}\right] = \text{Card}\left[\Gamma_{y_{i_1}\ldots y_{i_h}}\right] u_h,$$

u_h désignant un certain entier.

(2) Il est clair que $N_h = N_1$ (et donc que $n_h = n_1$).
Par contre : $\text{Card}\left[\Gamma_{y_{i_1}\ldots y_{i_h}}\right] = n_1\, q^{k-h}$ demande à être démontrée.
On procèdera par exemple par récurrence, l'égalité étant exacte au rang 1. $(\text{Card}\, \Gamma_{y_1} = n_1\, q^{k-1})$.

Soit $x_1 \in y_{i_1} \cap \ldots \cap y_{i_h}$ et soit $x_1\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}}$.
Supposons qu'ainsi $y_{i_1} \cap \ldots \cap y_{i_h}$ ne soit pas entièrement obtenue.
Alors $\exists \alpha \in \Gamma_{y_{i_1}} \cap \ldots \cap \Gamma_{y_{i_{h-1}}}$ et $\notin \Gamma_{y_{i_h}}$ tel que $x_i = x_1\alpha$ (si le point x_i n'a pas été obtenu précédemment).
Mais si $\alpha \in \Gamma_{y_{i_1}} \cap \ldots \cap \Gamma_{y_{i_{h-1}}}$, alors $\alpha \in \Gamma_1$.
Si α ne fixe pas y_{i_h}, α ne peut changer y_{i_h} qu'en un plan parallèle, ce qui est impossible (homomorphisme).
α fixe donc y_{i_h}, d'où la contradiction.

En résumé : $x_1\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_h}}$ décrit $y_{i_1} \cap \ldots \cap y_{i_h}$.
Si l'on a : $x_1\alpha_1 = x_1\alpha_2$, alors $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \in N_1$ et $\alpha_1 \in N_1 \alpha_2$.
D'où la décomposition :

$$\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}} = \bigcup_{i=1}^{q^{k-h}} N_1\, \delta_i \quad (\text{avec } \delta_1 = 1),$$

et $\text{Card}\; \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}} = n_1\, q^{k-h}$.

(3) Soit $\alpha \in \Delta_{12\ldots h}$. On a $x_1\alpha \in y_{i_1} \cap \ldots \cap y_{i_h}$.
Supposons $x_i = x_1\alpha$. $\exists\, n_1\, \delta_i \in \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}}$ $(n_1 \in N_1)$ tels que :

$x_i = x_1\, n_1\, \delta_i$. On a donc :

$x_1\alpha = x_1\, n_1\, \delta_i$, soit : $x_1\, n_1\, \delta_i\, \alpha^{-1} = x_1$. Donc :
$n_1\, \delta_i\, \alpha^{-1} \in \Gamma_{x_1}$, c'est à dire ; $n_1\, \delta_i\, \alpha^{-1} = a \in \Gamma_{x_1}$
soit : $a^{-1}\, n_1\, \delta_i = \alpha$.

Or : $n_1 \in N_1 = \Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1}$ et $a \in \Gamma_{x_1}$; donc $a^{-1} n_1 \in \Gamma_{x_1}$,

donc $\alpha = u\, \delta_i$ avec $u \in \Gamma_{x_1}$.

On a mis ainsi en relation $\Gamma_{x_1} \delta_i$ avec $N_1 \delta_i$.

D'où : $$\Delta_{12\ldots h} = \bigcup_{i=1}^{q^{k-h}} \Gamma_{x_1} \delta_i$$

c.q.f.d.

3. CONSTRUCTIONS LIEES A LA TRANSITIVITE.

3.1 -

Théorème :

> Soient $F_{i_1}\ F_{i_2} \ldots F_{i_h}$ h classes quelconques ($\forall$ h $\leqslant$ k).
> Soient y_{i_j} et y'_{i_j} $\forall\, j \in [1, 2, \ldots, h]$ deux plans distincts de F_{i_j}.
> Alors, il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que :
> $y'_{i_j} = y_{i_j}{}^{\alpha}$, $\forall\, j \in [1,h]$.

Démonstration.

Nous démontrons ce résultat par récurrence.

a) Le Cas particulier h = 2.

Commençons par utiliser un résultat élémentaire de théorie des groupes :

> Soient A et B 2 sous-groupes d'ordre a et b admettant comme intersection un sous-groupe D d'ordre d. Le complexe C = AB contient exactement $\frac{ab}{d}$ éléments distincts. C est un groupe si et seulement si A et B commutent.

Dans le cas présent, nous sommes intéressés par les groupes Γ_1, Γ_{y_1}, Γ_{y_2} et $\Gamma_{y_1 y_2}$. Etant donné que $\Gamma'_1 = \Gamma_{y_1}\ \Gamma_{y_2}$ contient

$$\frac{n_1 q^{k-1}\ n_1 q^{k-1}}{n_1 q^{k-2}} = n_1 q^k$$ éléments, on a $\Gamma'_1 = \Gamma_1$ et Γ_{y_1} et Γ_{y_2}

commutent en conséquence : $\underline{\Gamma_1 = \Gamma_{y_1} \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_2} \Gamma_{y_1}}$.

Dès lors, il s'agit de montrer que les classes :

$\Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1}$ avec $\alpha^1_{j_1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$ (ou ce qui revient au même $\alpha^1_{j_1} \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$)

et $\Gamma_{y_2} \alpha^2_{j_2}$ avec $\alpha^2_{j_2} \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$ (ou ce qui revient au même $\alpha^2_{j_2} \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_2}$)

ont une intersection non vide.

On peut écrire :

$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1}$ (avec $\alpha^1_{j_1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$)

$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_2} \alpha^2_{j_2}$ (avec $\alpha^2_{j_2} \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$).

On a alors :

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_2} = \bigcup_{j_1} \{\Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1} \cap \Gamma_{y_2}\} = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1}$$

D'où : $\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1} \alpha^2_{j_2}$

De même : $\Gamma_1 = \bigcup_{j_1} \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^2_{j_2} \alpha^1_{j_1}$

En résumé , on a donc commutativité, à savoir :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2} \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1} \alpha^2_{j_2} = \bigcup_{j_1} \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^2_{j_2} \alpha^1_{j_1} \qquad (1)$$

REMARQUES.

α) On a utilisé le résultat : $\Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1} \cap \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1}$

En effet, soit $u \in \Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1} \cap \Gamma_{y_2}$ ($\alpha^1_{j_1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$)

$u \in \Gamma_{y_2}$, d'une part.

D'autre part : $u = v\, \alpha^1_{j_1}$ avec $v \in \Gamma_{y_1}$.

D'où : $v = u(\alpha^1_{j_1})^{-1} \in \Gamma_{y_2}$ et $v \in \Gamma_{y_1 y_2}$

et réciproquement.

β) Si $\alpha^1_{j_1} \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$ comme $\Gamma_1 = \Gamma_{y_1} \Gamma_{y_2}$ $\alpha^1_{j_1} = u\,\alpha'^1_{j_1}$

avec $\alpha'^1_{j_1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$ et $\Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1} = \Gamma_{y_1} u\, \alpha'^1_{j_1} = \Gamma_{y_1} \alpha'^1_{j_1}$

Cela étant, revenons au résultat à démontrer qui est que :

$$\underline{\Gamma_{y_1} \alpha^1_{j_1} \cap \Gamma_{y_2} \alpha^2_{j_2} \neq \phi} .$$

C'est à dire, puisque :

$$\Gamma_{y_1} = \bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^2_{j_2}$$

$$\Gamma_{y_2} = \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1}$$

$$\underline{\underline{\{\bigcup_{j_2} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^2_{j_2} \} \alpha^1_{j_1} \bigcap \{ \bigcup_{j_1} \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1} \} \alpha^2_{j_2} \neq \phi}} \qquad (2)$$

Nous allons raisonner par l'absurde en utilisant la relation (1). A savoir que, dans (2), il ne peut exister de valeurs de $\alpha^1_{j_1}$ et $\alpha^2_{j_2}$, telles qu'il y ait plus d'une solution, c'est à dire :

Supposons qu'il existe α^1 et α^2 tels que (2) ait 2 solutions :

$$n_1 \alpha^2_{j_2} \alpha^1 = n_2 \alpha^1_{j_1} \alpha^2 \quad (\Gamma_{y_1 y_2} \alpha^2_{j_2} \alpha^1 = \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j_1} \alpha^2)$$

$$n_3 \alpha^2_{j'_2} \alpha^1 = n_4 \alpha^1_{j'_1} \alpha^2 \quad (\Gamma_{y_1 y_2} \alpha^2_{j'_2} \alpha^1 = \Gamma_{y_1 y_2} \alpha^1_{j'_1} \alpha^2)$$

On en déduit :

$$\alpha^1 (\alpha^2)^{-1} = (\alpha^2_{j_2})^{-1} n_1^{-1} n_2 \alpha^1_{j_1}$$

$$= (\alpha^2_{j'_2})^{-1} n_3^{-1} n_4 \alpha^1_{j'_1}$$

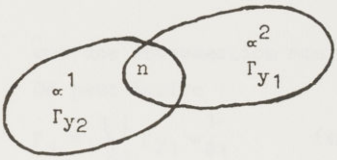
Soit : $\underline{\alpha^2_{j'_2} (\alpha^2_{j_2})^{-1} (n_1^{-1} n_2)\, \alpha^1_{j_1} (\alpha^1_{j'_1})^{-1} = n_3^{-1} n_4 .}$

Ceci est impossible :

$n_1^{-1} n_2 \in \Gamma_{y_1\, y_2}$ $\quad n_3^{-1} n_4 \in \Gamma_{y_1\, y_2}$ $\quad \alpha^1_{j_1}(\alpha^1_{j'_1})^{-1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$ (voir remarque) et $\alpha^2_{j'_2}(\alpha^2_{j_2})^{-1} \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$ (voir remarque).

Dès lors :

$$n_3^{-1} n_4 \, \alpha^1_{j'_1} \alpha^1_{j_1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$$



et

$$\alpha^2_{j'_2}(\alpha^2_{j_2})^{-1} \, n_1^{-1} n_4 \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}.$$

Ceci est impossible ; à moins que $\alpha^2_{j'_2} = \alpha^2_{j_2}$ et $\alpha^1_{j_1} = \alpha^1_{j'_1}$

Autrement dit, les classes (2) se coupent comme des droites : c'est à dire, suivant une seule classe que l'on peut écrire :

soit : $\underline{\Gamma_{y_1\, y_2}\, \alpha^2_{j_2}\, \alpha^1_{j_1}}$ $\qquad$ soit : $\underline{\Gamma_{y_1\, y_2}\, \alpha^1_{j'_1}\, \alpha^2_{j'_2}}$

Le résultat est donc acquis pour h = 2.

<u>REMARQUE</u>.

On utilise le fait que $\Gamma_{y_1\, y_2}\, \alpha^1_{j_1} (\alpha^1_{j'_1})^{-1} \in \Gamma_{y_2} - \Gamma_{y_1}$ (resp^t $\Gamma_{y_1\, y_2}\, \alpha^2_{j_2} (\alpha^2_{j'_2})^{-1} \in \Gamma_{y_1} - \Gamma_{y_2}$).

En effet, sinon on aurait : $u\, \alpha^1_{j_1} (\alpha^1_{j'_1})^{-1} = v$

$u \in \Gamma_{y_1\, y_2}$ et $v \in \Gamma_{y_1\, y_2}$.

Donc : $\alpha^1_{j_1} (\alpha^1_{j'_1})^{-1} = w \in \Gamma_{y_1\, y_2}$

Mais alors $\alpha^1_{j_1}$ et $\alpha^1_{j'_1}$ définissent la même classe, ce qui est contraire à la construction.

b) <u>Cas général</u>.

Soient maintenant h plans $y_1\ y_2\ \dots\ y_h$. On vérifie tout d'abord que :

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}}\Gamma_{y_{i_2}} & \forall\ i_1 \neq i_2 \\ \Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}}\Gamma_{y_{i_2}\,y_{i_3}} & \forall\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \\ \dots & \\ \Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}}\Gamma_{y_{i_2}\,y_{i_3}\,\dots\,y_{i_h}} & \forall\ i_1\ i_2\ \dots\ i_h \quad \forall\ h. \end{cases}$$

Cette propriété de Γ_1 est d'autre part, vérifiée par tous les sous-groupes $\Gamma_{y_{i_j}}$, $\Gamma_{y_{i_1}\,y_{i_2}}$, ... , $\Gamma_{y_{i_1}\,y_{i_2}\,\dots\,y_{i_l}}$, $\forall$ l.

Ceci permet la généralisation de (1).

En effet, par exemple :

$$\Gamma_1 = \Gamma_{y_1}\Gamma_{y_2\,\dots\,y_h}$$

et :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1}\Gamma_{y_1}\,\alpha^1_{j_1} \qquad \text{avec } \alpha^1_{j_1} \in \Gamma_{y_2\,\dots\,y_h} - \Gamma_{y_1}$$

Mais alors :

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_{y_2} = \Gamma_{y_2} = \bigcup_{j_1}(\Gamma_{y_1}\,\alpha^1_{j_1} \cap \Gamma_{y_2}) = \bigcup_{j_1}\Gamma_{y_1\,y_2}\,\alpha^1_{j_1}$$

et l'on a aussi

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2}\Gamma_{y_2}\,\alpha^2_{j_2} \qquad \text{avec} \quad \alpha^2_{j_2} \in \Gamma_{y_1\,y_3\,\dots\,y_h} - \Gamma_{y_2}$$

D'où :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_2}\bigcup_{j_1}\Gamma_{y_1\,y_2}\,\alpha^2_{j_2}\,\alpha^1_{j_1}.$$

et ainsi de suite ; finalement :

$$\underline{\Gamma_1 = \bigcup_{j_1\,j_2\,\dots\,j_h}\Gamma_{y_1\,y_2\,\dots\,y_h}\,\alpha^h_{j_h}\,\alpha^{h-1}_{j_{h-1}}\,\dots\dots\,\alpha^2_{j_2}\,\alpha^1_{j_1}}$$

avec $\alpha^{i}_{j_i} \in \Gamma_{y_1\, y_2 \,\ldots\, y_{i-1}\, y_{i+1} \,\ldots\, y_h} - \Gamma_{y_i}$, $\forall$ i

Il est bien certain que l'ordre dans lequel on a classé les plans y_i est arbitraire et que l'égalité précédente s'écrirait aussi bien :

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j_1\, j_2 \,\ldots\, j_h} \Gamma_{y_{i_1}\, y_{i_2} \,\ldots\, y_{i_h}}\; \alpha^{i_h}_{j_h}\; \alpha^{i_{h-1}}_{j_{h-1}} \;\ldots\; \alpha^{i_1}_{j_1} \qquad (3)$$

pour toute permutation $(i_1\, i_2 \ldots i_h)$ de $(1, 2, \ldots, h)$.

(Autrement dit, il y a globalement commutation des α, ce qui est à rapprocher de l'égalité (1)).

Supposant alors que h-1 classes $\Gamma_{y_{i_1}}\, \alpha^{i_1}$ (avec $\alpha^{i_1} \in \Gamma_{y_{i_1} \ldots y_{i_{l-1}}\, y_{i_{l+1}} \ldots y_{i_h}} - y_{i_1}$) se coupent, nous allons en déduire que h classes $\Gamma_{y_{i_1}}\, \alpha^{i_1}$ se coupent et le résultat à démontrer le sera par récurrence. Soient donc les plans $y_1\, y_2 \ldots y_h$. Considérons d'une part les plans $y_1\, y_2 \ldots y_{h-2}$ et y_h , d'autre part les plans $y_1\, y_2 \ldots y_{h-3}\, y_{h-1}$ et y_h.

Dans un cas comme dans l'autre, suivant l'hypothèse de récurrence, on sait que :

(a) $$y_1\, \alpha^{(1)} \cap \ldots \cap y_{h-2}\, \alpha^{(h-2)} \cap y_h^{(\alpha_h)} \neq \phi \,.$$

(avec $\alpha^{(i)} \in \Gamma_{y_1\, y_2 \,\ldots\, y_{i-1}\, y_{i+1} \,\ldots\, y_h} - \Gamma_{y_i}$, $\forall$ i).

(b) $$y_1\, \alpha^{(1)} \cap \ldots \cap y_{h-3}\, \alpha^{(h-3)} \cap y_{h-1}\,\alpha^{(h-1)} \cap y_h\, \alpha^{(h)} \neq \phi \,.$$

(avec de même $\alpha^{(i)} \in \Gamma_{y_1\, y_2 \,\ldots\, y_{i-1}\, y_{i+1} \,\ldots\, y_h} - \Gamma_{y_i}$, $\forall$ i)

Plus précisément, étant donné le cas h = 2, l'intersection des classes :

- (a) peut s'écrire :

$$\bigcup_{j_{h-1}} \Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_h}\ \alpha^{(h-1)}_{j_{h-1}}\ \underbrace{\alpha^{1}_{j_1}\ \alpha^{2}_{j_2} \cdots \alpha^{h-2}_{j_{h-2}}}_{\text{fixés.}}\ \alpha^{h}$$

- (b) peut s'écrire :

$$\bigcup_{j_{h-2}} \Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_h}\ \alpha^{(h-2)}_{j_{h-2}}\ \underbrace{\alpha^{1}_{j'_1}\ \alpha^{2}_{j'_2} \cdots \alpha^{h-3}_{j'_{h-3}}\ \alpha^{h-1}_{j'_{h-1}}}_{\text{fixés.}}\ \alpha^{h}$$

C'est à dire, respectivement :

$$\Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-2}\, y_h}\ \alpha\ \alpha^h \quad \text{et} \quad \Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-3}\, y_{h-1}\, y_h}\ \beta\ \alpha^h$$

en posant : $\alpha = \alpha^{1}_{j_1} \cdots \alpha^{h-2}_{j_{h-2}}$

et $\beta = \alpha^{1}_{j'_1} \cdots \alpha^{h-3}_{j'_{h-3}}\ \alpha^{h-1}_{j'_{h-1}}$

on est ramené à l'intersection de :

$\Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-2}\, y_h}\ \alpha$ avec $\Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-3}\, y_{h-1}\, y_h}\ \beta$

Or : $\Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-3}\, y_h} = \Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-2}\, y_h} \cdot \Gamma_{y_1\, y_2 \cdots y_{h-3}\, y_{h-1}\, y_h}$

On retrouve avec de nouvelles notations le problème résolu en a) concernant h = 2, que l'on peut donc démontrer comme en a).

c.q.f.d.

3.2 - Constructions découlant du théorème précédent.

Soient y_i $\forall\, i \in [1,N]$ et $y'_i \parallel y_i$ $\forall\, i$. On vient de voir qu'il existe $\alpha \in \Gamma_1$, tel que : $y'_i = y_i\, \alpha$, $\forall\, i \in [1,k]$ $h \leq k$, par exemple.

Considérons $x_1 = \bigcap_{i \in [1,N]} y_i$ et $x'_1 = \bigcap_{i \in [1,N]} y'_i$

On a par application des propriétés d'un automorphisme : $x'_1 = x_1 \alpha$.
Dès lors, soient $\Gamma_{y'_1 y'_2 \ldots y'_h} = \bigcap \Gamma_{y'_i}$, $\Gamma_{y'_i}$ désignant le stabilisateur de y'_i ; de même soit $\Gamma_{x'_1}$ le stabilisateur de x'_1 et enfin $N'_h = \Gamma_{y'_1 y'_2 \ldots y'_h} \cap \Gamma_{x'_1}$. On a :

- $\Gamma_{y'_1 y'_2 \ldots y'_h} = \alpha^{-1} \Gamma_{y_1 y_2 \ldots y_h} \alpha$, $\forall h \leqslant k$

- $\Gamma_{x'_1} = \alpha^{-1} \Gamma_{x_1} \alpha$.

- $N'_h = N'_1 = \alpha^{-1} N_1 \alpha = \alpha^{-1} [\Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1}] \alpha$.

Tous les problèmes de construction sont donc apparemment résolus.

4. CONSTRUCTION DE TABLEAUX ORTHOGONAUX D'INDICE UNITE.

Soit Γ un groupe d'ordre $n_1 N q^k$. Supposons que Γ soit le produit de deux groupes Γ_1 et Γ_2, tels que :
$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1$ avec : $\mathrm{Card}[\Gamma_1] = n_1 q^k$; $\mathrm{Card}[\Gamma_2] = n_1 N$; Γ_1 est invariant Γ. Soit Γ_{y_1} un sous-groupe de Γ_1 avec $\mathrm{Card}[\Gamma_{y_1}] = n_1 q^{k-1}$. Soit $N_1 = \Gamma_{y_1} \cap \Gamma_2$ avec $\mathrm{Card}[N_1] = n_1$ et posons enfin : $\Gamma_{x_1} = \Gamma_2$, en supposant que : $\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{x_1} = \Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1}$. Soit alors :
$\Gamma_{y_1} = N_1 \cup N_1 \alpha_2 \cup \ldots \cup N_1 \alpha_{q^{k-1}}$ la décomposition de Γ_{y_1} suivant le sous-groupe N_1.
Posons : $\Delta_1 = \Gamma_{x_1} \cup \Gamma_{x_1} \alpha_2 \cup \ldots \cup \Gamma_{x_1} \alpha_{q^{k-1}}$.
La construction d'un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k est alors la suivante :

$$\begin{cases} \underline{\text{Points du réseau}} : & (\Gamma_{x_1})\alpha , \ \forall \alpha \in \Gamma \\ \underline{\text{Plans du réseau}} : & \Delta_1 \alpha , \ \forall \alpha \in \Gamma \\ \underline{\text{Classe } F_1} : & \Delta_1 \alpha , \ \forall \alpha \in \Gamma_1 \\ \underline{\text{Plans } y_1 y_2 \ldots y_N} : & \Delta_1 \alpha , \ \forall \alpha \in \Gamma_{x_1} . \end{cases}$$

La justification des propriétés des réseaux $(R)_{k-1}$ conduit à imposer aux données précédentes, la condition supplémentaire suivante :

Condition : Soit $\forall\, h \leq k$, $a_1, a_2, \ldots, a_h \in \Gamma_2$ tels que : $a_i^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ a_i \neq a_j^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ a_j$ et ceci $\forall\, a_i \in [a_1, a_2, \ldots, a_h]$ $\forall\, a_j \in [a_1\ a_2 \ldots a_h]$, on a :

$$\mathrm{Card}\left[a_1^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ a_1 \cap \ldots \cap a_h^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ a_h\right] = n_1\ q^{k-h}$$

Démonstration.

Avant de justifier la construction, un certain nombre de remarques sur les données sont nécessaires :

a) Tout d'abord $\Gamma_{y_1} \subset \Gamma_1$ et Γ_1 invariant entraîne que : $\alpha^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ \alpha \subset \Gamma_1$, $\forall\, \alpha \in \Gamma$.

Soit alors $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^{N} N_1\ \gamma_i$ la décomposition de Γ_2 suivant N_1 et soit $y_i = y_1\ \gamma_i$ ($\forall$ i). En désignant par Γ_{y_i} le stabilisateur de y_i, on sait que l'on a : $\Gamma_{y_i} = \gamma_i^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ \gamma_i$. On voit donc que :

$$\underline{\forall\, i \in [1,N]\ \ \Gamma_{y_i} \subset \Gamma_1}$$

b) Soit $N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_1}$, soit $\alpha \in \Gamma_{x_1}$, on a $\alpha^{-1}\ \Gamma_{x_1}\ \alpha = \Gamma_{x_1}$. D'autre part, on vient de voir que $\alpha^{-1}\ \Gamma_{x_1}\ \alpha \subset \Gamma_1$.
Donc : $\alpha^{-1}\ N_1\ \alpha \subset \Gamma_1$; mais $\alpha^{-1}\ N_1\ \alpha \subset \Gamma_{x_1}$; donc $\alpha^{-1}\ N_1\ \alpha \subset N_1$.
Finalement :

$$\underline{\alpha^{-1}\ N_1\ \alpha \subset N_1\quad \forall\, \alpha \in \Gamma_{x_1}\quad (N_1 \text{ est invariant dans } \Gamma_{x_1})}.$$

c) Soit $\alpha \in \Gamma_{x_1}$; on a $N_1 \subset \Gamma_{y_1}$, donc $\alpha^{-1}\ N_1\ \alpha \subset \alpha^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ \alpha$; donc : $N_1 \subset \alpha^{-1}\ \Gamma_{y_1}\ \alpha$. Autrement dit :

$$\underline{N_1 \text{ est un sous-groupe de } \Gamma_{y_i}\ \ (\forall\ i)}$$

d) $\Gamma_{y_i} \subset \Gamma_1 \Longrightarrow \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i} \subset \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_1$; donc $\Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i} \subset N_1$

Mais N_1 est un sous-groupe de Γ_{y_i} ; comme N_1 est un sous-groupe de $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$, N_1 est un sous-groupe de $\Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$.

D'où :

$$\underline{N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i} \quad (\forall\ i)}$$

e) On a donc désormais : $N_1 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_{x_1} = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_i}$ $\forall\ i \in [1,N]$ et N_1 est invariant dans $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$. Soit alors :

$$\underline{\Gamma_{y_{i_1}\, y_{i_2} \cdots y_{i_h}} = \Gamma_{y_{i_1}} \cap \Gamma_{y_{i_2}} \cap \cdots \cap \Gamma_{y_{i_h}} \qquad \forall\ h \leqslant k}$$

$y_{i_1}\, y_{i_2} \cdots y_{i_h}$ désignant h plans quelconques de $(y_1\, y_2 \cdots y_N)$.

On a évidemment :

$$\underline{N_1 = \Gamma_{x_1} \cap \Gamma_{y_{i_1}\, y_{i_2} \cdots y_{i_h}} \qquad \forall\ h \leqslant k}$$

f) La condition supplémentaire indiquée dans la construction signifie que : $\forall\ h \leqslant k \quad \text{Card}\ [\Gamma_{y_{i_1}\, y_{i_2} \cdots y_{i_h}}] = n_1\, q^{k-h}$.

On en déduit que les sous-groupes :

Γ_1 , $\Gamma_{y_{i_1}}$, $\Gamma_{y_{i_1}\, y_{i_2}}$, ... , $\Gamma_{y_{i_1}\, y_{i_2} \cdots y_{i_h}}$ ont les propriétés entraînant la transitivité étudiée en 3).

En effet, par exemple : $\Gamma_1 = \Gamma_{y_{i_1}}\, \Gamma_{y_{i_2} \cdots y_{i_h}}$ puisque :

$$n_1\, q^k = \frac{n_1\, q^{k-1}\quad n_1\, q^{k-h+1}}{n_1\, q^{k-h}}$$

- On est maintenant en mesure de justifier la construction proprement dite : rappelons à ce sujet que le plan y_1 est identifié à Δ_1 et y_i $\forall\ i$ à $\Delta_1\, \gamma_i$, la décomposition $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^{N} N_1\, \gamma_i$ étant donnée.

Nous devons démontrer :

(1) - Par un point quelconque, il passe un plan et un seul de chaque classe.

(2) - h plans se coupent en q^{k-h} points $h \leqslant k$

Si $h > k$ h plans se coupent en 1 ou 0 point.

a) Etude des points et des plans.

Soient les décompositions de Γ_1 suivant Γ_{y_1}, de Γ_{y_1} suivant N_1 et de $\Gamma_2 = \Gamma_{x_1}$ suivant N_1 :

$$\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_{y_1} \alpha_i$$

$$\Gamma_{y_1} = \bigcup_i N_1 \gamma_i$$

$$\Gamma_{x_1} = \bigcup_{i=1}^{N} N_1 \beta_i$$

α) Vérifions tout d'abord que par un point quelconque, il passe un plan et un seul de la classe F_1.

Point quelconque : $\Gamma_{x_1} \alpha_0$, $\alpha_0 \in \Gamma$

Plans de la classe F_1 : $\Delta_1 \alpha_i$, $\alpha_i \in \Gamma_1$

Pour démontrer ce résultat, remarquons que :

$$\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_{y_1} \alpha_i = \bigcup_i \bigcup_j N_1 \gamma_j \alpha_i .$$

Mais $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_2 \Gamma_1$ c'est à dire :

$$\Gamma = \Gamma_2 \bigcup_i \bigcup_j N_1 \gamma_j \alpha_i = \bigcup_i \bigcup_j \Gamma_2 N_1 \gamma_j \alpha_i = \bigcup_i \bigcup_j \Gamma_2 \gamma_j \alpha_i$$

(En effet, $N_1 \subset \Gamma_{x_1}$ et donc $N_1 \Gamma_{x_1} = \Gamma_{x_1}$).

Tout élément de Γ peut donc s'écrire $u \gamma_j \alpha_i$ avec $u \in \Gamma_{x_1}$.

Dans ces conditions, il existe une et une seule valeur de γ_j et α_i telle que : $\Gamma_{x_1} \alpha_0 = \Gamma_{x_1} \gamma_j \alpha_i$ c.q.f.d.

β) Vérifions que par un point quelconque, il passe un plan et un seul de la classe F_i $\forall$ i.

Point quelconque : $\Gamma_{x_1} \alpha_0$, $\alpha_0 \in \Gamma$

Plans de la classe F_i : $\Delta_1 \beta_i \alpha_j$, $\beta_i \in \Gamma_{x_1}$, $\alpha_j \in \Gamma_1$

Pour démontrer ce résultat, on peut remarquer que :

$\Gamma_1 = \bigcup_j \Gamma_{y_i} \alpha'_j$ avec $\alpha'_j \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_i}$.

Donc , puisque $\Gamma_{y_i} = \beta_i^{-1}\,\Gamma_{y_1}\,\beta_i$.

$\Gamma_1 = \bigcup_j \beta_i^{-1}\,\Gamma_{y_1}\,\beta_i\,\alpha_j = \bigcup_k \bigcup_j \beta_i^{-1}\,N_1\,\gamma_k\,\beta_i\,\alpha'_j$.

Or : $\Gamma = \Gamma_{x_1}\,\Gamma_1 = \Gamma_{x_1} \bigcup_k \bigcup_j \beta_i^{-1}\,N_1\,\gamma_k\,\beta_i\,\alpha'_j = \bigcup_k \bigcup_j (\Gamma_{x_1}\beta_i^{-1}\,N_1)\gamma_k\beta_i\,\alpha'_j$

Or : $\beta_i \in \Gamma_{x_1}$, donc $\Gamma_{x_1}\,\beta_i^{-1}\,N_1 = \Gamma_{x_1}$ et finalement :

$$\Gamma = \bigcup_k \bigcup_j \Gamma_{x_1}\,\gamma_k\,\beta_i\,\alpha'_j .$$

Soit alors le point $\Gamma_{x_1}\,\alpha_o$; il existe une valeur et une seule de γ_k et α'_j telles que : $\Gamma_{x_1}\,\alpha_o = \Gamma_{x_1}\,\gamma_k\,\beta_i\,\alpha'_j$. Le résultat est donc établi. c.q.f.d.

b) <u>Etude du parallélisme des plans.</u>

D'après a), les plans d'une même classe sont donc parallèles (sans points communs).

Ce résultat peut se démontrer directement et alors , la démonstration faite en a) devient inutile puisque chaque plan contient de façon bien évidente q^{k-1} points

<u>Autre démonstration.</u>

α) $\underline{\Delta_1 \cap \Delta_1\,\alpha = \phi \qquad \forall\, \alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}}$

On a : $\Delta_1 = \bigcup \Gamma_{x_1}\,\gamma_i$ et $\Delta_1\,\alpha = \bigcup \Gamma_{x_1}\,\gamma_i\,\alpha$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que :

$\Gamma_{x_1}\,\gamma_i = \Gamma_{x_1}\,\gamma_j\,\alpha$; cela entraîne $\gamma_j\,\alpha\,\gamma_i^{-1} = u \in \Gamma_{x_1}$

soit : $\alpha = \gamma_j^{-1}\,u\,\gamma_i$.

Si $u \in N_1$, $\gamma_j^{-1}\,u\,\gamma_i \in \Gamma_{y_1}$; or : $\alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$, d'où contradiction ;

Si $u \in \Gamma_{x_1} - N_1$, $u \notin \Gamma_1$ et $\gamma_j\,\alpha\,\gamma_i^{-1} \in \Gamma_1$, d'où contradiction.

D'où le résultat annoncé.

β) $\underline{\Delta_1 a \cap \Delta_1 a\alpha = \phi . \quad a \in \Gamma_{x_1} \quad , \alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_i} \quad (y_i = y_1 a)}$

Raisonnons toujours par l'absurde et supposons que :

$\Gamma_{x_1} \gamma_i a = \Gamma_{x_1} \gamma_j a \alpha$. On a donc :

$\gamma_j a \alpha a^{-1} \gamma_i^{-1} = u \in \Gamma_{x_1}$.

Or, on a : $a \alpha a^{-1} = \beta \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$

En effet :$\alpha \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_i}$; donc : $\beta = a \alpha a^{-1} \notin a \Gamma_{y_i} a^{-1} = \Gamma_{y_1}$

c'est à dire :$\beta \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}$.

D'où : $\underline{\gamma_j \beta \gamma_i^{-1} = u \in \Gamma_{x_1} \quad \text{avec } \beta \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_1}}$

On est ramené à α).

γ) $\underline{\Delta_1 a \alpha_1 \cap \Delta_1 a \alpha_2 = \phi , \quad a \in \Gamma_{x_1} \quad , \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_i} \quad (y_i = y_1 a)}$

Par l'absurde, on a : $\Gamma_{x_1} \gamma_i a \alpha_1 = \Gamma_{x_1} \gamma_j a \alpha_2$.

Soit : $\Gamma_{x_1} \gamma_i a = \Gamma_{x_1} \gamma_j a \alpha_2 \alpha_1^{-1}$

Or, $\beta = \alpha_2 \alpha_1^{-1} \in \Gamma_1 - \Gamma_{y_i}$.

On est donc ramené à β).

c) Intersection des plans.

Soient $a_2\ a_3 \ldots a_N \in \Gamma_2$, tels que : $y_i = y_1 a_i \quad \forall\, i \in [1,N]$

(Autrement dit : $\Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^{N} N_1 a_i$ avec $a_1 = 1$).

Nous allons étudier, pour commencer, le cas particulier de l'intersection de deux plans.

α) Intersection de deux plans.

Démontrons tout d'abord que : $\underline{\text{Card}\,[\Delta_1 \cap \Delta_1 a_i] = n_1 N q^{k-2}}$

Nous allons utiliser la condition sous la forme :

$$\text{Card } \Gamma_{y_1 y_i} = n_1 q^{k-2}$$

On a :

$$\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i} = \Gamma_{y_1} \cap \left[a_i^{-1}\, \Gamma_{y_1}\, a_i\right] = \left(\bigcup_j N_1\, \gamma_j\right) \cap \left(a_i^{-1}\left(\bigcup_j N_1\, \gamma_j\right) a_i\right)$$

Or $\Gamma_{x_1} = \bigcup_k N_1\, a_k$. (1)

On a :

$$a_k\left[\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i}\right] = \left[a_k\left(\bigcup_j N_1\, \gamma_j\right)\right] \cap \left[a_k\, a_i^{-1}\left(\bigcup_j N_1\, \gamma_j\right) a_i\right]$$

N_1 étant invariant dans Γ_{x_1} :

$$a_k(\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i}) = \left[\bigcup_j N_1\, a_k\, \gamma_j\right] \cap \left[\bigcup_j N_1\, a_k\, a_i^{-1}\, \gamma_j\, a_i\right]$$

et :

$$\bigcup_k a_k\left[\Gamma_{y_1} \cap \Gamma_{y_i}\right] = \left[\bigcup_k \bigcup_j N_1\, a_k\, \gamma_j\right] \cap \left[\bigcup_k \bigcup_j N_1\, a_k\, a_i^{-1}\, \gamma_j\, a_i\right]$$

$$= \left[\bigcup_j \Gamma_{x_1}\, \gamma_j\right] \cap \left[\bigcup_j \Gamma_{x_1}\, a_i^{-1}\, \gamma_j\, a_i\right]$$

$$= \left[\bigcup_j \Gamma_{x_1}\, \gamma_j\right] \cap \left[\bigcup_j \Gamma_{x_1}\, \gamma_j\, a_i\right]$$

(Ceci , vu (1)).

Finalement :

$$\boxed{\bigcup_k a_k\, \Gamma_{y_1\, y_i} = \Delta_1 \cap \Delta_1\, a_i}$$

Or $\mathrm{Card} \bigcup_k \Gamma_{y_1\, y_i} = \sum_{k=1}^{N} n_1\, q^{k-2} = n_1 N\, q^{k-2}$

<u>REMARQUES</u>.

On a utilisé (1) $a(S_1 \cup S_2) = a\, S_1 \cup a\, S_2$

(2) $a(S_1 \cap S_2) = a\, S_1 \cap a\, S_2$.

(3) $a_j\, \Gamma_{y_1\, y_i} \cap a_k\, \Gamma_{y_1\, y_i} = \phi \qquad \forall\, j \neq k$.

Ceci est exact ; effectivement : si $a_j\, u = a_k\, v$, on a :

$a_k^{-1}\, a_j = v\, u^{-1} = w$; le seul cas possible est celui où $w \in N_1$;

alors $a_j = a_k w$ et a_j serait dans la même classe que a_k, ce qui est contraire à l'hypothèse.

- Démontrons maintenant de façon générale que :

$$\mathrm{Card}[\Delta_1 a_i \alpha \cap \Delta_1 a_j \beta] = n_1 N q^{k-2} \quad \begin{cases} a_i, a_j \in \Gamma_2. \\ \alpha, \beta \in \Gamma_1. \end{cases}$$

$$y'_i = y_1 a_i \alpha = y_i \alpha \quad ; \quad y'_j = y_1 a_j \alpha = y_j \alpha.$$

Vu la transitivité, $\exists \gamma \in \Gamma_1$ avec $y'_i = y_i \gamma$ et $y'_j = y_j \gamma$

Il suffit donc d'étudier :

$\mathrm{Card}\,[\Delta_1 a_i \gamma \cap \Delta_1 a_j \gamma]$, que l'on ramène au cas précédent (ce problème va être vu en détail maintenant dans l'étude du cas général).

β) Intersection de h plans.

Tout d'abord $\underline{\mathrm{Card}\,[\Delta_1 a_{i_1} \cap \Delta_1 a_{i_2} \cap \ldots \cap \Delta_1 a_{i_h}] = n_1 N q^{k-h}}$.

On utilise la condition sous la forme :

$$\mathrm{Card}\,[\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}}] = n_1 q^{k-h}$$

$$\Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}} = \bigcap_{j=1}^{h} a_{i_j}^{-1} \Gamma_{y_1} a_{i_j} = \bigcap_{j=1}^{h} a_{i_j}^{-1} \Big(\bigcup_k N_1 \gamma_k \Big) a_{i_j}$$

$$a_i \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}} = \bigcap_{j=1}^{h} a_i a_{i_j}^{-1} \Big(\bigcup_k N_1 \gamma_k \Big) a_{i_j}$$

$$= \bigcap_{j=1}^{h} \Big[\bigcup_k N_1 a_i a_{i_j}^{-1} \gamma_k a_{i_j} \Big]$$

$$\bigcup_i a_i \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_h}} = \bigcup_i \bigcap_j \bigcup_k N_1 a_i a_{i_j}^{-1} \gamma_k a_{i_j}$$

$$= \bigcap_j \bigcup_k \Big(\bigcup_i N_1 a_i \Big) a_{i_j}^{-1} \gamma_k a_{i_j}$$

$$= \bigcap_j \bigcup_k \Gamma_{x_1} a_{i_j}^{-1} \gamma_k a_{i_j}$$

$$= \bigcap_j \bigcup_k \Gamma_{x_1} \gamma_k a_{i_j}$$

$$= \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\bigcup_i a_i \,\Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}}$$

D'où :

$$\mathrm{Card}\left[\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}\right] = \sum_{i=1}^{N} n_1 q^{k-h} = n_1 N q^{k-h}.$$

REMARQUE.

On justifie facilement le résultat :

$$a_i \,\Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} \cap a_k \,\Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} = \phi$$

En effet :

$$a_i u = a_k v$$

$$a_k^{-1} a_i = v u^{-1} = w \in \Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}.$$

Le seul cas possible est celui où $w \in N_1$. Mais alors a_i et a_k appartiendraient à une même classe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

- Démontrons enfin :

$$\underline{\mathrm{Card}\left[\Delta_1 a_{i_1} \alpha_1 \cap \Delta_1 a_{i_2} \alpha_2 \cap \dots \cap \Delta_1 a_{i_h} \alpha_h\right] = n_1 N q^{k-h}}$$

avec $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \in \Gamma_1$.

Par la transitivité, on peut ramener ce résultat au précédent : en effet, si $y'_{i_j} = y_{i_j} \alpha_i = y_1 a_{i_j} \alpha_i$ on sait qu'il existe $\alpha \in \Gamma_1$ tel que : $y'_{i_j} = y_{i_j} \alpha \quad \forall j$.

Donc que : $\Gamma y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h} = \alpha^{-1} \,\Gamma y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h} \alpha$

Si $x_1 \xi \in \bigcap_j y'_{i_j}$, on a : $x_1 \xi \in \bigcap_j y_{i_j} \alpha$ soit :

$x_1 \xi \alpha^{-1} \in \bigcap_j y_{i_j}$, donc : $\xi \alpha^{-1} \in \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}$

et $\xi \in (\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j}) \alpha$. D'où le résultat.

Mais l'on peut opérer par un raisonnement direct

$$\bigcap_j \Gamma_{y'_{i_j}} = \bigcap_j \alpha^{-1} \Gamma_{y_{i_j}} \alpha = \bigcap_j \alpha^{-1} a_{i_j}^{-1} \Gamma_{y_1} a_{i_j} \alpha$$

$$= \bigcap_j \alpha^{-1} a_{i_j}^{-1} \left(\bigcup_i N_1 \gamma_i \right) a_{i_j} \alpha .$$

Multiplions par $\beta_k \alpha$ et formons $\bigcup_k$.

$$\bigcup_k \beta_k \alpha \left[\bigcap_j \Gamma'_{y_{i_j}}\right] = \bigcup_k \left[\bigcap_j \beta_k \alpha\alpha^{-1} a_{i_j}^{-1} \left(\bigcup_i N_1 \gamma_i \right) a_{i_j} \alpha \right]$$

$$= \bigcap_j \left[\bigcup_i \bigcup_k N_1 \beta_k a_{i_j}^{-1} \gamma_i a_{i_j} \alpha \right]$$

$$= \bigcap_j \left[\bigcup_i (\Gamma_{x_1} a_{i_j}^{-1} \gamma_i a_{i_j} \alpha) \right]$$

$$= \bigcap_j \left[\bigcup_i \Gamma_{x_1} \gamma_i \right] a_{i_j} \alpha = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \alpha$$

Donc :

$$\boxed{\bigcup_k \beta_k \alpha \left[\bigcap_j \Gamma_{y'_{i_j}} \right] = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \alpha}$$

et Card $\left[\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \alpha \right] = \sum_{k=1}^{N} n_1 q^{k-h} = n_1 N q^{k-h}$

<u>Remarques</u> :

1) On a encore utilisé le résultat

$$\beta_i \alpha \Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}} \cap \beta_k \alpha \Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}} = \phi \quad \forall i \neq k$$

c'est à dire :

$$\beta_i \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} \alpha \cap \beta_k \Gamma_{y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_h}} \alpha = \phi .$$

(Par multiplication à droite par α^{-1}, ce résultat est analogue à celui de la dernière remarque).

2) La formule :

$$\bigcup_k \beta_k \propto [\Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}}] = \bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \propto$$

permet de remarquer qu'une multiplication à droite par $\propto' \in \Gamma_{y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_h}}$ ne change rien.

Ceci est exact également pour :

$\bigcup_k \beta_k \propto \Gamma_{y'_{i_j}} = \Delta_1 a_{i_j} \propto$ avec $\propto' \in \Gamma_{y'_{i_j}}$

c'est à dire : $\Delta_1 a_{i_j} \propto \propto_j = \Delta_1 a_{i_j} \propto \quad \forall \propto_j \in \Gamma_{y'_{i_j}}$.

Soit en posant $\propto'_j = \propto \propto_j$.

$\Delta_1 a_{i_j} \propto'_j = \Delta_1 a_{i_j} \propto$.

Ce qui permet de ramener $\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \propto_j$ à $\bigcap_j \Delta_1 a_{i_j} \propto$ qui lui est égal.

REFERENCES.

[1] Lecointe : Thèse 1970.

[2] Dembowski : Kombinatorik 1970.

-o-

Reçu en Juillet 1974

- Pierre LECOINTE -
30, Rue Desaix
75015 PARIS