Chainesde Markov non homogènes à causalité constante : matrices d'écart d'homogénéité

G. Mauffrey, B. Lemaire

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1977, XXII - 83 - 107

CHAINES DE MARKOV NON HOMOGENES A CAUSALITE CONSTANTE : MATRICES D'ECART D'HOMOGENEITE

B.LE MAIRE G.MAUFFREY

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de Markov (à nombre fini d'états) ayant pour suite de vecteurs d'états la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et pour suite de matrices de transition, à une étape, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Nous supposerons, dans toute la suite, que la suite (M_n) n'est pas nécessairement constante, c'est-à-dire que la chaîne n'est pas nécessairement homogène, mais que l'on a du moins l'hypothèse restrictive suivante :

<u>*Hypothèse*</u> : $\exists C$,matrice , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = C\,M_n$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice C , dite de *"causalité" markovienne,* telle que la matrice de transition pour la période n+1 se déduit de la matrice de transition pour la période n par prémultiplication de M_n par C .

<u>Définition</u> : Nous dirons que nous avons *une chaîne à causalité constante.* (Le cas $C=I$ nous ramenant au cas particulier des chaînes homogènes).

<u>Remarque</u> : S'il existe au moins une matrice M_n inversible, C sera obtenu immédiatement de M_n et de M_{n+1} , puisque : $C = M_{n+1} \cdot M_n^{-1}$;

I - <u>*QUELQUES DEFINITIONS ET PROPRIETES GENERALES*</u>

<u>Définition 1</u> : Une matrice *pseudo-stochastique* est une matrice dont la somme de *chaque ligne* est égale à 1 .

Lemme : i) L'ensemble des *matrices carrées pseudo-stochastiques* (de même ordre) est un *demi-groupe* (*) possédant un élément neutre, la matrice unité

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(*) Pour la multiplication matricielle.

ii) Le sous-ensemble des matrices *carrées pseudo-stochastiques inversibles* est un groupe (*)

iii) L'ensemble des *matrices carrées pseudo-stochastiques* est un ensemble *convexe*.

Les démonstrations, élémentaires, ne seront pas données ici.

II - ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : N *(nombre d'états) =2*

A - Quelques notations : (La chaîne considérée, à 2 états, est supposée à causalité constante).

Posons

$$\begin{cases} M_1 = M_2 + \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & +\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & +\varepsilon_2 \end{pmatrix} = C^{-1} M_2 & \text{(si on suppose que } C \text{ est } \textit{inversible}^{**}) \\ \qquad = DM_2 \quad \text{, en posant } D = C^{-1} \\ M_2 = M_3 + \begin{pmatrix} -\varepsilon_3 & +\varepsilon_3 \\ -\varepsilon_4 & +\varepsilon_4 \end{pmatrix} = DM_3 \\ D = \begin{pmatrix} d_1 & 1-d_1 \\ d_2 & 1-d_2 \end{pmatrix} & \text{(D est en effet pseudo-stochastique)} \end{cases}$$

Nous allons maintenant relier $\varepsilon_i, i=1,2,3,4$ à $d_i, i=1,2$

---

* Voir note en fin de page précédente.

** Cette restriction n'est pas très forte et, de plus, correspond à un cas particulier très facile à étudier directement : en effet, dans le cas N=2, C non inversible signifie, puisque C est pseudo-stochastique, que les 2 lignes de C sont identiques. On peut alors voir, immédiatement, que l'on a $M_{n+1} = M_n$, dès que $n \geq 1$, avec, de *plus*, les 2 lignes de M_n identiques.
On a alors, toujours pour $n \geq 1$, non seulement un processus homogène, mais aussi un processus stationnaire.

* B - Théorème : Si $d_1 \neq d_2$ (voir note en bas de page pour le cas contraire) alors :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 & -\varepsilon_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{d_1-d_2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix} = (C_1-C_2) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

dans le cas où M_2 est *inversible*. Si M_2 n'est pas inversible, la chaîne est *homogène et stationnaire*.

** Démonstration du théorème

1°) Posons $M_2 = \begin{pmatrix} m_2 & 1-m_2 \\ p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix}$ $\left(M_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 1-m_1 \\ p_1 & 1-p_1 \end{pmatrix} \right)$

La relation $D \times M_2 = M_2 + \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & +\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & +\varepsilon_2 \end{pmatrix}$ $(=M_1)$ donne

immédiatement, par identification :

$$d_1 m_2 + (1-d_1)p_2 = m_2 - \varepsilon_1$$

$$d_2 m_2 + (1-d_2)p_2 = p_2 - \varepsilon_2$$

c'est-à-dire :

$$d_1(m_2-p_2) = m_2-p_2-\varepsilon_1$$

$$d_2(m_2-p_2) = -\varepsilon_2$$

et, en supposant M_2 *inversible*.

$$(E_1) \quad \boxed{\begin{array}{lll} d_1 = 1 - \dfrac{\varepsilon_1}{m_2-p_2} & \text{ou} & \varepsilon_1 = (m_2-p_2)(1-d_1) \\ d_2 = \dfrac{-\varepsilon_2}{m_2-p_2} & \text{ou} & \varepsilon_2 = (p_2-m_2)d_2 \end{array}}$$

---

* Si on pose $k=d_1-d_2$ on peut voir immédiatement, de la démonstration du théorème que $k = \dfrac{m_1-p_1}{m_2-p_2}$

** Une démonstration plus rapide sera donnée dans la partie E de ce même paragraphe, mais les liens entre les d_i, les c_j et les ε_k ont paru intéressants à étudier directement.

2°) Si M_2 *n'est pas inversible*, c'est-à-dire si $m_2=p_2$, on a alors, nécessairement :

$$M_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 1-d_1 \\ d_2 & 1-d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & 1-m_2 \\ m_2 & 1-m_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_2 & 1-m_2 \\ m_2 & 1-m_2 \end{pmatrix} = M_2$$

Le processus est alors *homogène et stationnaire.*

3°) De même, en utilisant la relation :

$$C.M_2 = M_2 + \begin{bmatrix} \varepsilon_3 & -\varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 & -\varepsilon_4 \end{bmatrix} \quad (=M_3)$$

on obtient (pour $m_2 \neq p_2$)

$$(E_2) \quad \boxed{\begin{array}{lll} C_1 = 1 + \dfrac{\varepsilon_3}{m_2-p_2} & \text{ou} & \varepsilon_3 = (1-C_1)\ (p_2-m_2) \\ C_2 = \dfrac{\varepsilon_4}{m_2-p_2} & \text{ou} & \varepsilon_4 = C_2\ (m_2-p_2) \end{array}} \quad (*)$$

4°) Les relations (E_3) $\boxed{C_1 = \dfrac{1-d_2}{d_1-d_2} \quad \text{et} \quad C_2 = \dfrac{-d_2}{d_1-d_2}}$ liant les coefficients des matrices inverses C et D , jointes aux relations (E_1) et (E_2) donnent alors :

$$\boxed{\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1}{d_1-d_2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_2}{d_1-d_2}}$$

c.q.f.d.

---

* Rappelons que l'on peut montrer aisément que :

$$C_1 - C_2 = \frac{m_2-p_2}{m_1-p_1}$$

C - Corrolaire :

i) Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (M_2 inversible) alors

1°) si $\boxed{0<|C_1-C_2|<1}$ $\quad M_n \to M_1 + \frac{1}{1-(C_1-C_2)} \begin{pmatrix} +\varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ +\varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$

→ * ·2°) si $\boxed{|C_1-C_2|>1}$ $\quad \lim M_n$ n'existe pas

3°) si $\boxed{C_1-C_2=1}$ $\begin{cases} 1 & C_1=1 \quad M_n=M_1, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ 2 & C_1 \neq 1 \quad \lim M_n \text{ n'existe pas} \end{cases}$

→ (*)

4°) si $\boxed{C_1-C_2=-1}$ $\begin{cases} M_{2n+1} = M_1, & \forall n \in \mathbb{N} \\ M_{2n+2} = M_2, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5°) si $\boxed{C_1-C_2=0}$, le processus est homogène, et stationnaire

ii) Si $\alpha_1 = \alpha_2$ $\quad M_n=M_2$, $\forall n \geq 2$ (Le processus est homogène, et stationnaire).

Démonstration : La preuve du corrolaire est immédiate, puisque reposant sur les propriétés bien connues de la série géométrique.

D - Stochasticité de la limite (éventuelle) de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Nous allons maintenant nous intéresser, dans le cas où (M_n) converge, aux propriétés nécessaires de cette limite.

Les propriétés des matrices de transition sont telles que l'on doit avoir, $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n stochastique. On a d'abord le lemme suivant :

Lemme : *Si lim M_n existe, alors cette limite est stochastique.*

Preuve : La limite éventuelle de cette suite doit aussi être stochastique, l'ensemble des matrices stochastiques étant un sous-ensemble convexe borné fermé.

---

* Ce cas ne peut d'ailleurs se produire dans la pratique, car pour n suffisamment grand, M_n ne serait plus stochastique.

Remarque : Nous avons vu, dans le paragraphe C , dans quelles conditions la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire en fait la suite $\left(C^{n-1}.M_1\right)$

convergeait, au moins dans le cas N=2 , N étant le nombre d'états.

Nous allons généraliser ce résultat dans le cas N quelconque, en montrant que si toutes les valeurs propres de C , en dehors d'une seule (qui est toujours égale à 1), sont *strictement inférieures, en module, à 1,* alors la suite (M_n) converge : de plus, quelle que soit la matrice C , si la suite (M_n) converge, c'est nécessairement vers une matrice stochastique dans le cas où toutes les M_n sont stochastiques.

Avant d'établir ce résultat, très général, nous allons donner une autre démonstration du théorème B .

E – Autre forme du théorème B

Théorème : Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont *les différentes matrices d'écart,* alors : $\boxed{E_n = \lambda^{n-1} E_1}$, λ et 1(*) étant les *2 valeurs propres* de la matrice C , avec $\lambda = \frac{1}{k} = C_1 - C_2$

Rappels : $M_2 = C . M_1 = M_1 + E_1, \dots, M_{n+1} = C.M_n = M_n + E_n$

Preuve : D'après le théorème de Cayley, nous avons :

$$(C - I)\ (C - \lambda I) = 0$$

d'où, en post multipliant par M_1 , première matrice de transition

$$(C - I)\ CM_1 = \lambda(C-I)M_1$$

$$\Leftrightarrow (C - I)\ M_2 = \lambda(C-I)M_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_2 = \lambda E_1}$$

C^n ayant les mêmes valeurs propres que C , nous aurions, de même : $\boxed{E^{n+1} = \lambda^n E}$

Puisque $\begin{pmatrix} C_1 & 1-C_1 \\ C_2 & 1-C_2 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et λ , on a , par identification : $\boxed{C_1 - C_2 = \lambda = \frac{1}{k}}$ $\left(= \frac{m_2 - p_2}{m_1 - p_1} \right)$ c.q.f.d

* C a toujours 1 comme valeur propre, puisqu'elle est pseudo-stochastique.

III - EXISTENCE D'UNE MATRICE LIMITE DANS LE CAS GENERAL D'UNE CHAINE CAUSALE A N ETATS

A - *POSITION DU PROBLEME (conjecture de LIPSTEIN)*

Soit C une matrice de causalité *régulière* d'ordre N. Soit M_1 une matrice carrée *stochastique* d'ordre N. Nous nous proposons de trouver une condition *nécessaire* et *suffisante* pour que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ soit *convergente*, avec $\boxed{M_n = C^{n-1} M_1}$

Nous aurons, pour cela, besoin de quelques propriétés des polynomes *minimaux* d'une matrice.

B - *POLYNOME MINIMAL D'UNE MATRICE*

Etant donné une matrice A il *existe un polynome* $P(X)$, *normé, de degré minimum* tel que $P(A) = 0$. Ce polynome, dit *polynome minimal*, divise, en particulier, le polynome caractéristique de A.

On a, plus précisément :

$$P(X) = (X-z_0)^{\beta_0}(X-z_1)^{\beta_1}\dots(X-z_k)^{\beta_k}$$

avec $\left\{\begin{array}{l} z_0, z_1, \dots, z_k \text{ valeurs propres, } z_i \text{ de } \textit{multiplicité } \alpha_i \text{ , } \textit{d'indice } \beta_i \\ \text{et} \quad i=0,1,\dots k,\ 1\leq\beta_i\leq\alpha_i \end{array}\right.$

DEFINITION : z_i est valeur propre à *spectre simple* ssi la dimension du sous-espace vectoriel propre associé à z_i est α_i.
On peut démontrer que :

Théorème : z_i est à *spectre simple* ssi z_i est *d'indice 1* (i.e l'exposant de $(X-z_i)$ dans le polynome *minimal* est égal à 1)

Remarque : Si *toutes* les valeurs propres d'une matrice d'ordre N sont à *spectre simple*, la matrice est dite *scindée*. Cela signifie que R^N est somme directe des sous-espaces *propres*, qui sont, ici égaux aux sous-espaces *spectraux*.

C – *PROPRIETES GENERALES DES MATRICES D'ECART*

Rappelons qu'une matrice *d'écart* E est une matrice dont la somme des éléments de chaque ligne vaut zéro.

La chaîne de Markov, à N états, étudiée ici étant supposée à causalité constante, nous avons :

$$M_{n+1} = C^n M_1$$

et nous *poserons* :

$$\boxed{E_{n+1} = M_{n+2} - M_{n+1} = (C-I)\, C^n M_1}$$

Soit : $X^r + A_{r-1} X^{r-1} + \ldots + A_o$ le polynome minimal de C .

1 *étant valeur propre de* C , nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} A_{r-1} = -1 + B_{r-2} \\ A_{r-2} = -B_{r-2} + B_{r-3} \\ \vdots \\ A_p = -B_p + B_{p-1} \\ \vdots \\ A_1 = -B_1 + B_o \\ A_o = -B_o \end{cases}$$

L'équation minimale peut donc s'écrire en faisant intervenir C :

$$\boxed{(C-I)C^{r-1} + B_{r-2}(C-I)C^{r-2} + \ldots + B_o(C-I) = 0} \qquad \text{(Eq4)}$$

D'où :

Lemme 1 : *Les matrices d'écart* E_n *vérifient une équation de récurrence linéaire à coefficients constants, d'ordre* r-1 , r *étant le degré du polynome minimal de* C .

En effet l'équation (E_n) devient, en la multipliant par C^nM_1 :

$$(C-I)C^{r+n-1}M_1 + B_{r-2}(C-I)C^{r+n-2}+\ldots+B_o(C-I)C^nM_1=0$$

et, en remplaçant $(C-I)C^nM_1$ par E_{n+1}

$$\boxed{E_{n+r} + B_{r-2}\, E_{n+r-1}+\ldots+ B_o\, E_{n+1} = 0} \qquad \text{(Eq5)}$$

c.q.f.d

Lemme 2 : *Quelque soit* $n\geq 1$, E_n *peut s'écrire comme combinaiso linéaire des* (r-1) *premières matrices d'écart*

$$E_n = \sum_{i=1}^{r-1} a(i,n)\, E_i$$

les $a(i,n)$ *étant déterminés de façon unique par des équations de récurrence linéaire à coefficients constants, lorsque les* E_i ,$i=1$ *à* $r-1$ *sont indépendants.*

Démonstration :

i) Par récurrence il est évident que les E_n peuvent s'exprimer comme *combinaisons linéaires* des r-1 premières matrices d'écart, c.a.d :

$$E_n = \sum_{i=1}^{r-1} a\,(i,n)E_i$$

ii) Par identification(*), les a(i,n) doivent donc vérifier les équations :

$$\boxed{1\leq i\leq r-1 \;,\; a(i,n+r-1)+ B_{r-2}\, a(i,n+r-2) + \ldots+ B_o\, a(i,n) = 0} \qquad \text{(Eq}$$

Remarque : Cette équation de récurrence se résoud de façon *simple*.

En effet : B_{r-2} représente *l'opposé* de la somme des r-1 valeurs spectrales de C (différentes ou non), 1 étant exclu (1 fois).

B_{r-3} représente le produit 2 à 2 des r-1 valeurs spectrales.

B_{r-4} représente l'opposé du produit 3 à 3 .

....

(*) Cette identification étant possible, puisque les $(E_i)_{i=1,\ldots r-1}$ sont supposées indépendantes.

Ces racines (spectrales) étant notées $z_i, 0\leq i\leq k$, z_i étant d'indice β_i , avec $\sum_{i=0}^{k} \beta_i = r-1$, il est bien connu que les solutions de l'équation de récurrence (Eq6) sont de la forme :

$$\text{(Eq7)} \quad \boxed{a(p,n) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{\beta_i} \lambda(i,j,p) n^{j-1} z_i^n \quad \text{pour } 1\leq p\leq r-1}$$

les $\lambda(i,j,p)$ *étant déterminés* par les conditions initiales :

$(a(p,k) = \delta_{pk}$ pour $1\leq k\leq r-1$

Lemme 3 : $\forall\, i=0,1,\ldots k\ \forall\, j=1,\ldots,\ \beta_i \exists p$ t.q. $\lambda(i,j,p)\neq 0$

En effet, dans $\mathbb{R}^{r-1}$ les vecteurs $e_p = (\delta_{p\ell})_{\ell=1,\ldots r-1}$ représentent la base canonique : si le lemme était faux cela signifierait que ces r-1 vecteurs indépendants seraient chacun combinaison linéaire de r-2 vecteurs, ce qui est absurde c.q.f.d

On a donc, en particulier, $\forall i\ \exists j\ \exists p$ t.q. $\lambda(i,j,p) \neq 0$

On a donc le

Théorème 1 *La suite* $(M_n)_{n\geq 1}$, avec $M_{n+1} = M_1 + \sum_{i=1}^{n} E_i\ (= C^n M_1)$ *est convergente, dans le cas où les* r-1 *premières matrices* E_n *sont indépendantes, ssi les conditions suivante sont satisfaites.*

C_1 1 *est valeur propre à spectre simple*

C_2 *les valeurs propres de* C *différentes de* 1 *sont de module strictement inférieur à* 1.

Démonstration

On sait en effet que la série de terme général $u_n = n^a z_i^n$ est convergente ssi $|z_i| < 1$ (avec $a\geq 0$)

Du lemme 2, de l'équation (Eq7) et du lemme 3 on déduit alors le théorème précédent, puisque :

$$E_n = \sum_{p=1}^{r=1} \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{\beta_i} \lambda(i,j,p)\, n^{j-1} \right) E_p \qquad \text{(Eq7bis)}$$

Ce théorème correspond à la conjecture de Lipstein reprécisée dans l'article de HARARY-LIPSTEIN-STYAN "a matrix approach to nonstationary chains" (Op.Res. N-D 1970) dont la démonstration et les conditions de suffisance n'avaient pas encore été énoncées, à notre connaissance.

Corollaire :

Si 1 *est l'unique valeur propre de* C , *alors la suite* $(M_n)_{n\geq 1}$ *est convergente ssi* C = I

On a aussi le :

<u>*Théorème 2*</u> : *La suite* (M_n) *est convergente au sens de CESARO dans le cas des* $(E_n)_{n=1,\dots,r-1}$ *indépendantes ssi les conditions suivantes sont vérifiées.*

C_{1bis} : Toutes les valeurs propres de module 1 sont à spectre simple.

C_{2bis} : Les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

IV - RECHERCHE DE LA FORME DE LA MATRICE LIMITE DANS LE CADRE DU THEOREME C ETANT UNE MATRICE SCINDEE

A - NOTATIONS

Soit $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ les valeurs spectrales de C autres que 1.

Nous poserons : $\ell_i(z) = \prod_{j\neq i} \dfrac{z-z_j}{z_i-z_j}$ $(\ell_i(z_j) = \delta_{ij})$

B - EXPRESSION DES λ

L'équation Eq7 peut ici s'écrire, puisque $\beta_i = 1\ \forall i$ (donc j=1) en posant $\lambda(i,1,p) = \lambda(i,p)$

$$\boxed{a(p,n) = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda(i,p)\ z_i^n} \qquad \begin{matrix} 1\leq p\leq r-1 \\ 1\leq n\leq r-1 \end{matrix} \quad \text{(Eq8)}$$

Nous sommes donc ramenés à (r-1) systèmes de (r-1) équations pour déterminer les λ .

Pour p fixé nous avons r-1 équations à r-1 inconnues, qui peuvent se résoudre de façon simple :

Multiplions la n-ième équation par $\frac{1}{n!}\ \ell_i^{(n)}(0)$, où $\ell_i^{(n)}(0)$ désigne la valeur de la dérivée nième du polynome ℓ_i au point 0

En ajoutant alors membre à membre les $r-1$ équations nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{r-1}\left(\frac{1}{n!}\,\ell_i^{(n)}(0)\sum_{j=1}^{r-1}\lambda(j,p)\,z_j^n\right)=\ell_i^{(p)}(0)\times\frac{1}{p!}\quad\left(=\sum_{n=1}^{r-1}\frac{1}{n!}\,\ell_i^{(n)}(0)\,\delta_{pn}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{r-1}\lambda(j,p)\left(\sum_{n=1}^{r-1}\frac{1}{n!}\,\ell_i^{(n)}(0)\,z_j^n\right)=\ell_i^{(p)}(0)\times\frac{1}{p!}$$

De la formule de Taylor pour les polynomes de degré $r-1$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{r-1}\lambda(j,p)\,\ell_i(z_j)=\ell_i^{(p)}(0)\times\frac{1}{p!}$$

D'où $\boxed{\lambda(i,p)=\ell_i^{(p)}(0)\times\frac{1}{p!}}$

C – FORME DE LA MATRICE LIMITE DANS LE CAS OU LA MATRICE EST SCINDEE

L'équation 7bis s'écrit :

$$E_n=\sum_{p=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\ell_i^{(p)}(0)}{p!}\,z_i^n\right)E_p$$

c'est-à-dire que M_{n+1} est alors égal à :

$$M_{n+1}=M_1+\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{p=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\left(\frac{\ell_i^{(p)}(0)}{p!}\,z_i^k\right)\right)E_p\right]$$

$$=M_1+\sum_{p=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\ell_i^{(p)}(0)}{p!}\sum_{k=1}^{n}z_i^k\right)E_p$$

Soit, à la limite, puisque $|z_i|<1$, pour $i=1,2,\dots,r-1$

$$\boxed{M_\infty=M_1+\sum_{p=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{p!}\,\frac{\ell_i^{(p)}(0)}{1-z_i}\right)E_p}\qquad\text{(Eq9)}$$

Nous allons montrer que M_∞ peut s'exprimer uniquement en fonction des coefficients B_p ou A_p .

<u>*Théorème 3*</u> *: Dans le cas où* C *est scindée, et sous les hypothèses du théorème* 1 *, on a :*

$$\boxed{M_\infty = M_1 + \frac{1}{1+\sum_{p=1}^{r-1} B_p}\left\{\sum_{k=1}^{r-1}\left(1+\sum_{n=k+1}^{r-1} B_n\right) E_k\right\}}$$

<u>Preuve</u> : Soit $P_i(z) = \frac{P(z)}{z-z_i}$

D'après la formule d'interpolation de LAGRANGE, tout polynome K de degré inférieur ou égal à r-1 peut s'écrire sous la forme :

$$K(z) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{P_i(z)}{P_i(z_i)} K(z_i) \qquad (\text{ici } z_o=1)$$

En prenant pour K le polynome *unité* nous obtenons :

$$1 = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{P_i(z)}{P_i(z_i)}$$

soit, en dérivant n fois :

$$\boxed{0 = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{P_i^{(n)}(z)}{P_i(z_i)}}$$

Remarquons que, puisque $P(z) = \prod_{i=0}^{r=1} (z-z_i) = \left(\prod_{i=1}^{r-1} (z-z_i)\right)(z-1)$

et que $\ell_i(z) = \prod_{o \neq i} \frac{z-z_j}{z_i-z_j}$

pour $1 \leq i \leq r-1$

$$(1-z)\frac{\ell_i(z)}{1-z_i} = \frac{P_i(z)}{P_i(z_i)}$$

$$\frac{P_i'(z)}{P_i(z_i)} = -\frac{\ell_i(z)}{1-z_i} + (1-z)\frac{\ell'_i(z)}{1-z_i}$$

De façon générale, on aurait :

$$(1-z)\frac{\ell_i^{(n)}(z)}{1-z_i} = \frac{P_i^{(n)}(z)}{P_i(z_i)} + N\frac{\ell_i^{(n-1)}(z)}{1-z_i}$$

Donc $\frac{\ell_i^{(n)}(0)}{1-z_i} = 0 \quad \frac{P_i^{(n)}(0)}{P_i(z_i)} + n\frac{P_i^{(n-1)}(0)}{P_i(z_i)} \ldots + n!\frac{P_i(0)}{P_i(z_i)}$

Alors $\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\ell_1^{(k)}(0)}{(1-z_i)k!} = \sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{P_i^{(k)}(0)}{P_i(z_i)} \ldots\ldots + k!\frac{P_i(0)}{P_i(z_i)}\right)$

$$-\frac{1}{k!}\left(\frac{P_o^k(0)}{P_o(1)} \ldots\ldots\ldots + k!\frac{P_o(0)}{P_o(1)}\right)$$

Or $P_0^{(n)}(0) = n!\, B_n$

Donc $\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\ell_i^{(k)}(0)}{(1-z_i)k!} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{k} B_n}{1+\sum_{n=0}^{r-1}} = \frac{1+\sum_{n=k+1}^{r-1} B_n}{1+\sum_{n=0}^{r-1} B_n}$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{M_\infty = M_o + \frac{1}{1+\sum_{n=0}^{r-1} B_n}\left(\sum_{k=1}^{r-1}\left(1+\sum_{n=k+1}^{r-1} B_n\right)E_k\right)}$$

V - CAS DES RACINES D'INDICE QUELCONQUE

A - PRELIMINAIRES

Nous sommes toujours dans les hypothèses du théorème 1. Soit $z_o=1$ et $z_1, z_2, \ldots, z_p$ les autres racines de l'équation minimale, respectivement d'ordre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ avec $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = r-1$

Nous noterons $R(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-z_i)^{\alpha_i} = X^r + B_{r-1}X^{r-1} \ldots + B_o$

$$\ell_i(z) = \prod_{j \neq i} (z-z_j)^{\alpha_j} \frac{1}{\prod_{j\neq i} (z_i-z_j)^{\alpha_j}}$$

$P(X) = (1-X)\, R(X)$ et à partir de R on définira de même

$$\begin{cases} i \neq 0 & L_i(z) = \ell_i(z) \times \dfrac{1-z}{1-z_i} \\ (i=0) & L_o(z) = \dfrac{R(z)}{R(1)} \end{cases}$$

Rappel : La base de Lagrange pour l'interpolation polynomiale de l'Hermite est l'ensemble des polynomes $\left\{ f_{i,j}(z) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq p \\ \text{et } 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \end{array} \right\}$

vérifiant les conditions

$$\forall j \quad 0 \leq j \leq \alpha_{i-1} \quad \forall k \neq i \quad \forall 0 \leq m \leq \alpha_k - 1 \quad \begin{cases} f_{i,j}^{(m)}(z_k) = 0 \\ f_{i,j}^{(m)}(z_i) = \delta_{jm} \end{cases}$$

Tout polynome de degré inférieur ou égal à $r-1$ s'écrit alors :

$$T(z) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_{i-1}} f_{ij}(z)\, T^{(j)}(z_i) \right)$$

Un calcul assez simple, donné en annexe, montre que :

$$f_{i,j}(z) = \left(\sum_{n=j}^{\alpha_{i-1}} C_h^j \left(\frac{1}{\ell_i}\right)^{(n-j)}(z_i)\, (z-z_i)^n \right) \ell_i(z)$$

Si $a(n,q)$ est le coefficient de E_q dans l'expression de E_n nous avons, en prenant comme base de l'espace vectoriel des suites solutions de l'équation de récurrence

$$u_{i,j}(n) = \frac{n!}{(n-j)!}\, z_i^n \qquad 0 \leq i \leq p \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \qquad \text{Si } n<j \ \frac{n!}{n-j!} = 0$$

$$a_{(n,q)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} (\lambda_{i,j,q}) \frac{n!}{(n-j)!}\, z_i^n \right)$$

Les $\lambda(i,j,q)$ étant déterminés par le système de r équations à r inconnues

$$0 \leq k \leq N-1 \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \lambda(i,j,q) \frac{k!}{(k-j)!}\, z_i^k \right) = \delta_{kq} \right)$$

Multiplions la $k^{\text{ème}}$ équation par $\frac{1}{k!} f_{i,j}^{(k)}(0)$, et additionnons les r équations. D'après les conditions imposées aux $f_{i,j}$, et la base choisie, le coefficient de $\lambda(m,n,q)$ est $z_m^n \times f_{i,j}^{(n)}(z_m)$

Donc seul le terme en $\lambda(i,j,q)$ a un coefficient non nul, égal à z_i^j.
D'où :

$$\lambda(i,j,q) = \frac{1}{q!} \; \frac{f_{i,j}^{(q)}(0)}{z_i^j}$$

B - DETERMINATION DE LA MATRICE LIMITE DES M_n

En remarquant que pour $|z_i| < 1$ (ce qui est supposé vrai ici).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!}\, z_i^n = z_i^j \; d_{z_i}^j \left(\frac{1}{1-z} \right) \qquad (*)$$

Nous obtenons :

$$M_\infty = M_0 + \sum_{q=0}^{-1} \frac{1}{q!} \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} d_{z_i}^j \left(\frac{1}{1-z} \right) f_{i,j}^{(q)}(0) \right) E_q$$

(*) $d_{z_i}^j \left(\frac{1}{1-z} \right)$ représente la dérivée d'ordre j de la fonction $1 \mapsto \frac{1}{1-z}$ au point z_i.

En considérant l'interpolation de l'Hermite par rapport au point z_i d'ordre α_i et $z_o=1$ d'ordre 1, nous avons une formule semblable à celle donnée dans le rappel, où nous noterons les polynomes d'interpolation avec des lettres majuscules.

En particulier pour le polynome constant égal à 1 nous avons :

$$1 = \sum_{i=1}^{p} F_{i,0}(z) + F_{0,0}(z).$$

avec
$$F_{i,0}(z) = \left[\sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \left(\frac{1}{L_i}\right)^{(p)}(z_i) \quad (z - z_i)^p\right] L_i(z)$$

et $F_{0,0}(z) = R(z)$

Pour trouver M_∞ nous allons tout d'abord démontrer que :

$$\boxed{(1-z) \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(j)}(z_i) \; f_{i,j}(z) = F_{i,0}(z)} \qquad (*)$$

En effet :

$$\ell_i(z) \; (1-z) \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(j)} (z_i) \sum_{m=j}^{\alpha_i - 1} C_m^j \left(\frac{1}{i}\right)^{(m-j)} (z_i) \; (z-z_i)^m \; (*)$$

$$= (1-z) \; \ell_i(z) \sum_{m=0}^{\alpha_i - 1} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j \; \frac{1}{\ell_i}^{(m-j)} \; \frac{1}{1-z}^{(j)} \; (z-z_i)^m\right] \; (*)$$

Or d'après la formule de Leibnitz

$$\sum_{j=0}^{m} C_m^j \left(\frac{1}{\ell_i}\right)^{(m-j)} (z_i) \times \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(j)} (z_i) = \left(\frac{1}{\ell_i \times (1-z)}\right)^{(m)} (z_i) = \left(\frac{1}{L_i}\right)^{(m)} (z_i) \times \frac{1}{1-z_i}$$

D'où

$$(1-z) \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(j)} (z_i) \; f_{i,j} \; (z) = \frac{1-z}{1-z_i} \; \ell_i(z) \sum_{m=0}^{\alpha_i - 1} \frac{1}{L_i}^{(m)} (z_i) \times (z-z_i)^m$$

c.q.f.d

(*) $\left(\frac{1}{1-z}\right)^{j} (z_i)$ ou $d_{z_i}^{j} \left(\frac{1}{1-z}\right)$

Un simple raisonnement par récurrence montre que :

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i=1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(j)}_{(z_i)} f_{ij}^{(k)}(0) = F_{i,0}^{(k)} + \ldots + k!\, F_{i,0}(0) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{!} F_{i,0}^{(\ell)}(0)$$

D'où :

$$\frac{1}{q!} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(j)}_{(z_i)} f_{ij}^{(q)}(0) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} \frac{1}{\ell!} F_{i,0}^{(\ell)}(0)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{q} \frac{1}{\ell!} \sum_{i=1}^{p} F_{i,0}^{(\ell)}(0)$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{p} F_{i,0}^{(\ell)}(0) = \delta_{1\ell} - F_{0,0}^{(\ell)}(0). \text{ avec } F_{0,0}^{(\ell)}(0) = \ell!\, B_\ell \times \frac{1}{R(1)}$$

D'où :

$$\frac{1}{q!} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{j} f_{ij}^{(q)}(0) = 1 - \sum_{\ell=0}^{q} \frac{B\ell}{R_{(1)}} = \frac{1}{R_1} + \sum_{\ell=q+1}^{r-1} \frac{B\ell}{R_{(1)}}$$

ce qui donne, en posant $B_r = 1$

$$= \frac{\sum_{\ell=q+1}^{r} B_e}{\sum_{\ell=0} B_e}$$

On retrouve donc, comme dans le cas des racines distinctes

$$M_\infty = M_o + \sum_{q=0}^{r-1} \frac{\sum_{\ell=q+1}^{r} B_e}{\sum_{\ell=0}^{r} B_e} E_q$$

Soit, en revenant à la définition des E_q

$$M_\infty = \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{r} B_e} \left(C^r + B_{r-1} C^{r-1} \ldots + B_o I \right) M_o$$

$$\boxed{M_\infty = \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{r} B_e} R(C).\, M_o}$$

(ce qui vérifie bien $(C-I)M_\infty = 0$

soit $CM_\infty = M_\infty$ comme on s'en doutait)

ANNEXE

Détermination des $f_{i,j}(z)$. Le premier système de conditions entraine que $f_{ij}(z)$ est divisible par $\ell_i(z)$.

Soit $f_{i,j}(z) = A_{i,j}(z)\ell_i(z)$ où $A_{i,j}$ est un polynome de degré α_{i-1}

Pour déterminer $A_{i,j}(z)$, il suffit d'utiliser la deuxième série de conditions et la formule de Newton. En effet :

$$A_{i,j}(z) = \frac{f_{i,j}(z)}{\ell_i(z)}$$

Soit :

$$A_{i,j}^{(p)}(z_i) = 0 \text{ si } p<j$$

$$A_{i,j}^{(p)}(z_i) = C_p^j \left[\frac{1}{\ell_i(z)}\right]^{(p-j)}(z_i) \qquad \text{(Formule de Liebnitz)}$$

$$\text{Donc } A_{i,j}(z) = \sum_{p=j}^{\alpha_i-1} \left(\frac{1}{\ell_i(z)}\right)^{(p-j)}(z_i)\times(z-z_i)^p$$

REMARQUES

1°) *Théorème : Si 1 est valeur propre simple la matrice limite M_∞ quand elle existe, a toutes ses lignes identiques.*

Démonstration : Puisque $M_\infty = CM_\infty$, toute colonne de M_∞ peut être considérée comme vecteur propre de C associé à la valeur propre 1. Dans le cas ou 1 est valeur propre simple, les vecteurs propres sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$, d'où le résultat.

En particulier dans le cas de deux états si $C \neq I$ et si M_n tend vers une limite stochastique, M_∞ peut être associée à un processus homogène *stationnaire*.

REMARQUE 2

Si M *est régulière les* $(E_i)_{i=1,..r-1}$ *sont indépendantes.*

REMARQUE 3

Cas où les $(E_i)_{i=1,..r-1}$ sont dépendantes (cf.2 exemples ci-après)

Alors, on peut écrire, les E_i étant indépendantes, $i=1,...,p-1$

avec $p<r$ $(C^p+a_{p-1}C^{p-1} \ldots + a_1 I)\ M=0$

le polynome $C^p+a_{p-1}C^{p-1}\ldots + a_1 I$ *divise le polynome minimal* (1) et pourra être appelé *polynome causatif* de M; il faut et il suffit alors de raisonner sur le polynome causatif de M (1 est toujours racine du polynome causatif).

Démonstration de (1): soit $\lambda_1,\lambda_2 \ldots \lambda_{p-1},\mu$ les racines du polynome causatif de M . Si par exemple μ n'était pas valeur propre de C alors $\exists$ un vecteur colonne de M, noté M_α, tel que :

$$\prod_{i=1}^{p-1}(C-\lambda_i I)\ M_\alpha \neq 0 \quad \text{et}\ (C-\mu I)\prod(C-\lambda_i I)\ M_\alpha = 0$$

$$\prod_{i=1}^{p-1}(C-\lambda_i I)\ M_\alpha = M_\beta \qquad \Longrightarrow (C-\mu I)\ M_\beta = 0$$

$$\Longrightarrow \mu \text{ valeur propre de } C \qquad \text{c.q.f.d}$$

Exemple 1 : Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Prenons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$

alors le polynome causatif est $(C-I)\ (C-\frac{1}{2}I)\ .\ M = 0$

$$\text{i.e } C^2M - CM = \frac{1}{2}(CM-M) \Longrightarrow E_2 = \frac{1}{2}E_1$$

C^nM converge, bien que C^n ne converge pas.

Dans le cas où les $(E_i)_{i=1,..r-1}$ sont dépendantes le polynôme causatif le rôle du polynôme minimal. On a donc l'extension du Théorème 1.

Théorème 1bis : La suite $(M_n)_{n\geq 1}$ *est convergente ssi les conditions suivantes sont satisfaites :*

C_1 : *1 est d'indice 1 dans le polynôme causatif*

C_2 : *les autres racines du polynome causatif sont de module strictement inférieur à 1 .*

REMARQUE 4 (Exemple 2)

Dans le cas de deux états le cas particulier se réduit au cas où M_1 est non régulière c'est-à-dire M_1 stationnaire.

REMARQUE 5

Si 1 est valeur propre a spectre simple et si toutes les valeurs propres de C apparaissent dans le "polynome causatif" de M_1 la limite M_∞ conserve la même valeur que celle trouvée dans le cas où le "polynome causatif" de M_1 était le polynome minimal de C.

Les conditions sont nécessaires pour que le passage à la limite fait pour le polynome minimal soit licite (on peut évidemment étendre ceci au cas où 1 est valeur propre à spectre simple et où toutes les valeurs propres de C sont de module strictement inférieur à 1).

En effet on a $M_\infty = \frac{K(c)}{K(1)} M_1$. où K est le "polynome causatif".

Montrons que R étant le polynome minimal de $C./C-I$

$$\left(\frac{R(C)}{R(1)} - \frac{K(C)}{K(1)}\right) M_o = 0$$ On peut écrire $R(C) = K(C)\times B(C)$.

Ce qui revient donc à démontrer que :

$$\frac{K(C)}{K(1)} \left(B(C) \frac{K(1)}{R(1)} - I \right) M_o = 0$$

c'est-à-dire que $C-I$ est en facteur dans le crochet.

$$\text{or } B(1) \frac{K(1)}{R(1)} = \frac{R(1)}{K(1)} \times \frac{K(1)}{R(1)} = 1 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Donc, si le polynome causatif fait intervenir toutes les valeurs propres de C, il suffit d'utiliser les résultats obtenus dans le cas général. On peut même par un raisonnement analogue à celui fait dans la remarque 2 utiliser le polynome caractéristique de C divisé par $C-I$ à la puissance β_o.

REMARQUE 6

Pour que $1, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ soient les valeurs propres de C qui interviennent dans le polynome causatif il faut et il suffit que si $F_o, F_1, \dots F_{p-1}$ sont les sous espaces propres associés à ces valeurs propres, tous les vecteurs colonnes de M soient des vecteurs de

$$F_o \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

VI- CAS DE TROIS ETATS

M matrice 3×3

C matrice 3×3

Nous allons donner la matrice limite dans le cas général et la matrice limite et la forme particulière de M dans le cas particulier.

CAS 1 : C a pour valeurs propres 1 ,α et β distinctes $|\alpha|<|\beta|<1$

Dans ce cas M_n converge, quelle que soit M

$$M_\infty = M + \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta} E_1 + \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} E_2$$

Soit encore

$$M_\infty = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} (C^2-(\alpha+\beta)C+\alpha\beta I)\ M .$$

avec $\alpha+\beta$ = Trace C − 1

$\alpha\beta$ = Det. C .

D'autre part M_∞ est une matrice dont toutes les lignes sont identiques.

Soit $C = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \\ a' & b' & 1-a'-b' \\ a'' & b'' & 1-a''-b'' \end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & 1-m_1-m_2 \\ m_1' & m_2' & 1-m_1'-m_2' \\ m_1'' & m_2'' & 1-m_1''-m_2'' \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ P & Q & R \\ P & Q & R \end{pmatrix} \qquad R = 1-P-Q$$

$$(1-\alpha)(1-\beta)\quad P = m_1(a'b''-a''b'+a'') + (b''+a''b-ab'')m_1' + (1-a''-b''+ba'-ab')m_1''$$

$$(1-\alpha)(1-\beta)\quad Q = m_2(a'b''-a''b'+a'') + (b''+a''b-ab'')m_2' + (1-a''-b''+ba'-ab')m_2''$$

CAS 2 : C a pour valeur propre 1,α,β distinctes $|\alpha|<1<|\beta|$.
En particulier α et β sont réelles soit (1,1,1) et (ℓ,m,n) les vecteurs propres associés respectivement à 1 et α . Pour que (M_n) soit convergente il faut et il suffit que M_1 soit de la forme .

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda+\mu\ell & \lambda'+\mu'\ell & 1-\lambda-\lambda'-(\mu+\mu')\ell \\ \lambda+\mu m & \lambda'+\mu' m & 1-\lambda-\lambda'-(\mu+\mu')\, m \\ \lambda+\mu n & \lambda'+\mu' n & 1-\lambda-\lambda'-(\mu+\mu')\, n \end{pmatrix}$$

La matrice M_∞ a pour forme

$$M_\infty = \frac{1}{1-\alpha}(C-\alpha I)\, M_1 = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\begin{pmatrix} \lambda(1-\alpha) & \lambda'(1-\alpha) & (1-\lambda-\lambda') & (1-\alpha) \\ \lambda(1-\alpha) & \lambda'(1-\alpha) & (1-\lambda-\lambda') & (1-\alpha) \\ \lambda(1-\alpha) & \lambda'(1-\alpha) & (1-\lambda-\lambda') & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$M_\infty = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & 1-\lambda-\lambda' \\ \lambda & \lambda' & 1-\lambda-\lambda' \\ \lambda & \lambda' & 1-\lambda-\lambda' \end{pmatrix}$$

<u>CAS 3</u> :

C a pour valeur propre simple 1 et double α , α étant à spectre simple et $|\alpha|<1$ (α est réel)

Dans ce cas la matrice limite existe quelle que soit M et on a

$$M_\infty = M + \frac{1}{1-\alpha} E_1 \quad \text{avec } 2\alpha = \mathrm{Tr}\ C-1$$

M_1 a toutes ses lignes égales

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \\ a' & b' & 1-a'-b' \\ a'' & b'' & 1-a''-b'' \end{pmatrix}$$

Pour que soit valeur propre à spectre simple il faut et il suffit que

$$\begin{cases} a-\alpha = a' = a'' \\ b = b'-\alpha = b'' \end{cases}$$

$$M_\infty = \begin{pmatrix} P = a\, m_1 + bm'_1 + (1-a-b)m''_1 \;. & Q = am_2 + bm'_2 + (1-a-b)m''_2 & 1-Q-P \\ P & Q & 1-Q-P \\ P & Q & 1-Q-P \end{pmatrix}$$

CAS 3bis

C a pour valeur propre simple 1 et une valeur propre double α à spectre non simple $|\alpha|<1$

Dans ce cas M_∞ existe quelle que soit M et on a

$$M_\infty = M + \frac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2} E_1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2} E_2$$

M_∞ a toutes ses lignes égales.

L'expression de M_∞ est la même que celle trouvée au cas 1 en remplaçant $(1-\alpha)(1-\beta)$ par $(1-\alpha)^2$

CAS 4

C a pour valeur propre simple 1 et double α, α étant à spectre simple ou non ! $|\alpha|>1$

Dans ce M_n est convergente si et seulement si M est stationnaire.

CAS 5

C a 1 comme valeur propre double à spectre non simple

Soit (ℓ,m,n) un vecteur propre à droite associée à la valeur propre α
On est dans le même cas que le cas 2 pour $|\alpha|<1$

Si $|\alpha|<1$ on est dans le cas 4.

CAS 6

C a 1 comme valeur propre double à spectre simple et $|\alpha|<1$; convergence quelque soit M

$$M_\infty = M_1 + \frac{1}{1-\alpha} E_1$$

M_∞ n'a plus obligatoirement toutes ses lignes égales.

CAS 7

C a 1 comme valeur propre double à spectre simple et $\alpha>1$. On se ramène au cas 2 ou (ℓ,m,n) désigne un deuxième vecteur propre associé à 1: Cas ou M_1 est la matrice associée à un processus homogène non stationnaire.

CAS 8

C a 1 comme valeur propre triple à spectre simple.

$$C = I$$

CAS 8bis

C a 1 comme valeur propre triple d'indice 2 ;
alors on est dans le cas 7.

CAS 8ter

C a 1 comme valeur propre triple d'indice 3 .
Alors il n'y a convergence que si M est stationnaire homogène.

Reçu en 1976