Réseaux (R)k-1 et groupes d'automorphismes non transitifs

Pierre Lecointe

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1977, XXII, fasc. 3-4, 43 - 56

RESEAUX $(R)_{k-1}$ ET GROUPES D'AUTOMORPHISMES NON TRANSITIFS

Pierre LECOINTE

Nous allons dégager un procédé de construction de tableaux orthogonaux d'indice unité à partir de tableaux déjà construits en étudiant la structure d'incidence qui leur correspond.

I. RAPPELS ET DEFINITIONS.

1) Définition d'un réseau $(R)_{k-1}$.

Soit E un ensemble fini d'éléments désignés par des points. Soit F un sous-ensemble d'éléments de $P(E)$ désignés par des plans. Soit $\mathcal{f}$ une partition de F en N classes F_i (Card $[F_i] \geq 2$, $i \in [1,N]$). Soient q et k deux nombres entiers positifs ($2 \leq k \leq N$). Le système $(E, F, \mathcal{f}, N, k, q)$ constitue un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k si l'on a :

(i) - Tout point x de E appartient à un plan y et un seul de chaque classe F_i.

(ii) - h plans quelconques de h classes différentes se coupent en q^{k-h} points, si $h \leq k$ ou alors, si $h > k$ soit en un point, soit en 0 point.

2) Définition d'un arrangement (T_k).

Soit X un ensemble de q éléments. Soit k un entier ≥ 2. Soit f une application de X^k dans X :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k \xrightarrow{f} y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X$$

possédant la propriété suivante :

$\forall (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in X^{k-1}$, $\forall\, i \in [1,k]$, l'application $g(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_i, \ldots, a_k)$ est une bijection de X sur X.

On définit ainsi un arrangement (T_k) noté :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k \; ; \; f(x_1, \ldots, x_k)] \quad , x_i \in X \quad \forall \; i \in [1,k]$$

3) Définition des arrangements (T_k) orthogonaux.

Soit une famille de h arrangements (T_k) construits sur un ensemble X de q éléments :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k \; ; \; f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)] \; , x_j \in X \quad \forall \; j \in [1,k] \; i \in [1,h]$$

On dit que ces h arrangements (T_k) forment une famille d'arrangements orthogonaux si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a^1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a^2 \\ \ldots. \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a^h \end{cases}$$

Tous les systèmes extraits de I à i équations et à i inconnues $(x_{t_1} \; x_{t_2} \; \ldots \; x_{t_i}) \in X^i$ ont une solution et une seule et ceci pour tout i et pour tout a^j , $i \in [1, 2, \ldots, \min [h,k] \,]$
$\forall \; a^j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, h$, les autres x_i ayant des valeurs fixées quelconques dans X.

4) Théorème [référence [2]]

L'existence de h arrangements (T_k) orthogonaux construits sur un ensemble X de q éléments est équivalente à l'existence d'un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k, de q^k points et de N = k+h classes de q plans parallèles (E, F, $\mathcal{J}$, N, k, q).

L'intérêt de ce théorème est exprimé dans le résultat suivant (référence [2]) : l'existence d'un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k de q^k points et de N classes de q plans parallèles est équivalente à l'existence d'un tableau orthogonal de caractéristiques (1, N, q, k).

5) Automorphismes.

Soit Γ un groupe de permutations agissant sur un ensemble X de q éléments. Supposons que Γ ne soit pas transitif sur X et soient $X_1, X_2, \ldots, X_s$ les classes d'équivalence de $X/_\Gamma$. Supposons d'autre part que Γ soit un groupe d'automorphismes sur le réseau $(R)_{k-1}$ défini ci-dessus et correspondant à X. On doit avoir pour cela :

(i) - $\forall \alpha \in \Gamma$, $\forall\ x \in E$, $\forall\ y \in F$, $\forall\ F_i \in \mathcal{F}$ tels que $x \in y \in F_i$,
on a : $x\alpha \in y\alpha \in F_i\alpha$ (avec $x\alpha \in E$, $y\alpha \in F$, $F_i\alpha \in \mathcal{F}$)

(ii) - $\forall \alpha \in \Gamma$, α est une bijection de E sur E, (resp^t de F sur F), (resp^t de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$).

En usant du théorème 4), on constate facilement que : en désignant par y le plan d'équation $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a^i$ de la classe F_i et passant par le point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, la propriété $x\alpha \in y\alpha \in F_i\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma$ s'écrit :

$$x\alpha = (x_1\alpha\ , x_2\alpha\ , \ldots\ , x_k\alpha\ ) \in [f_i(x_1\alpha\ , x_2\alpha, \ldots, x_k\alpha)]^\alpha = a_i\alpha \in F_i\alpha$$

$$\text{soit : } x\alpha \in f_i\alpha\ [x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_k\alpha] = a^i\alpha \in F_i\alpha$$

En notant alors φ_i la bijection existant entre les plans de la classe F_i et les éléments de X, on a :

$$\underline{x \in y \in F_i \implies x\alpha \in y\alpha = [\varphi_i(a_i)]^\alpha = \varphi_i\alpha(a_i\alpha) \in F_i\alpha}$$

6) Structure quotient [référence [1]]

Nous savons que les orbites des points et des plans du réseau $(R)_{k-1}$ forment une décomposition tactique par Γ de ce réseau $(R)_{k-1}$ étudié en tant que structure d'incidence. Nous nous proposons dans cet article d'étudier la structure quotient de $(R)_{k-1}$ par Γ .

II. STRUCTURE QUOTIENT D'UN RESEAU $(R)_{k-1}$.

Soit Γ un groupe de permutations agissant sur un ensemble X de q éléments. Supposons que Γ ne soit pas transitif sur X et soient alors $X_1\ X_2 \ldots X_s$ les s classes d'équivalence de $X/_{\Gamma}$. (La relation d'équivalence R est évidemment la suivante : $(x_1, x_2) \in R \iff \exists \alpha \in \Gamma$ avec $x_1\alpha = x_2$).

Supposons d'autre part que Γ soit un groupe d'automorphismes sur un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathcal{F}, N, k, q)$ correspondant à X. Nous nous proposons d'étudier la structure quotient de $(R)_{k-1}$ par Γ, que l'on désigne par $(R)_{k-1/_{\Gamma}}$. Précisons que l'on a :

- $E/_{\Gamma} = E_1, E_2, \ldots, E_n$ avec $E_i = \{x_i\alpha : x_i \in E_i, \alpha \in \Gamma\}$
- $F/_{\Gamma} = F^1, F^2, \ldots, F^m$ avec $F^j = \{y_j\alpha : y_j \in F^j, \alpha \in \Gamma\}$
- $\mathcal{F}/_{\Gamma} = FI_1, FI_2, \ldots, FI_s$ avec $FI_j = \{F_j\alpha : F_j \in FI_i, \alpha \in \Gamma\}$

et :

- $E_i \in F^j \iff \forall x \in E_i, \forall y \in F^j \quad \exists \alpha \in \Gamma$ tel que $x\alpha \in y$
- $F^j \in FI_j \iff \forall y \in F^j, \forall F_j \in FI_j \quad \exists \alpha \in \Gamma$ tel que $y\alpha \in F_j$

Soient alors les q plans d'une classe quelconque F_i de $(R)_{k-1}$. On sait que F_i est en correspondance biunivoque avec X. On peut écrire : $\forall i \in [1,N]$, $F_i = \varphi_i(X)$ (φ_i désignant une bijection). Si $y \in F_i$ et si y correspond à l'élément a de X, on a donc $y = \varphi_i(a)$. Alors $\forall \alpha \in \Gamma : y\alpha \in F_i\alpha$. Nous allons distinguer deux cas suivant que $F_i\alpha = F_i$, $\forall i \in [1,N]$ ou que $F_i\alpha \neq F_i$ sont possibles.

1er Cas

$$\underline{\forall \alpha \in \Gamma \ , \forall i \in [1,N] : F_i\alpha = F_i}$$

$\mathcal{F}/_{\Gamma}$ est composée des N classes $F^1, F^2, \ldots, F^N$. Par ailleurs, la décomposition de X en classes suivant Γ entraîne la même décomposition pour chaque classe de plans F_i, à savoir :

$$F_i/\Gamma = F_{i,j} \quad \forall\, j \in [1,s] \quad \text{et : } F_{i,j} = \varphi_i(X_j)$$

$\forall\, i \in [1,N]$, $\forall\, j \in [1,s]$. (φ_i désignant une bijection).

Cela signifie finalement que : $\forall\, y \in F_{i,j}$: $y^\alpha \in F_{i,j}$ $\forall \alpha \in \Gamma$.

Nous avons donc dans ce cas :

$$\begin{cases} E/_\Gamma = E_1, E_2, \dots, E_n \\ F/_\Gamma = \{F_{i,j}\} \quad \forall\, i \in [1,N] \quad \forall\, j \in [1,s] \quad \text{(soient sn "plans")} \\ \mathfrak{F}/_\Gamma = F^1, F^2, \dots, F^N \end{cases}$$

c'est à dire que chaque "classe" F^i de $\mathfrak{F}/_\Gamma$ est composée des s plans $F_{i,j}$, $\forall\, j \in [1,s]$.

Nous supposerons dans toute la suite que Γ possède la propriété (P) suivante :

> Propriété (P).
>
> Soit $(X_{j_1}\, X_{j_2} \dots X_{j_k})$ un élément quelconque de $(X/_\Gamma)^k$. Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ deux éléments quelconques de $X_{j_1}\, X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Alors $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que : $b = a\alpha$.

On a alors les résultats suivants :

> Propriété 1
>
> $E/_\Gamma$ est isomorphe à $(X/_\Gamma)^k$. (Card $[E/_\Gamma] = s^k$).

Démonstration.

Soit $x \in E_1$. Soit $\forall\, i \in [1,k]$ y_i le plan de F_i passant par x : $x \in y_i \in F_i$. On a $\forall \alpha \in \Gamma$: $x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_i^\alpha = F_i$. Supposons que y_i corresponde à l'élément a_i de X_{j_i}. On a alors :

$y_i \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$. En résumé : $x \in y_i \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$.

D'autre part, y_i^α correspondant à a^α de X_{j_i}, on a également : $x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$. On met donc ici x^α en correspondance avec $(a_1^\alpha, a_2^\alpha, \ldots, a_k^\alpha)$ élément de $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$. Cette correspondance est une application. En effet, si $x = x^\alpha$, $y_i = y_i^\alpha$ $\forall i \in [1,k]$ (y_i et y_i^α sont parallèles puisque $F_i^\alpha = F_i$; s'ils passent tous deux par x, ils sont confondus). Nous avons donc une application de E_1 dans $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$. On en déduit que l'on peut mettre en relation chaque élément de $E/_\Gamma$ avec $(X/_\Gamma)^k$. Il reste à montrer que cette relation est une application bijective. Tout d'abord, c'est une application puisque l'on a défini une application de E_1 dans $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$ et que ceci peut être répété pour tout élément de $E/_\Gamma$. D'autre part, cette application est surjective : en effet : $\forall (a'_1, a'_2, \ldots, a'_k) \in X_{j_1} \ldots X_{j_k}$ on a : $\varphi_i(a'_i) = y'_i$ ($y'_i \in F_{i,j_i}$) et $y'_1 y'_2 \ldots y'_k$ définissent un point x' et un seul de E. Utilisons alors la propriété (P). On sait qu'il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_i = a_i^\alpha$ $\forall i$; d'où $y'_i = y_i^\alpha$ et finalement $x' = x_\alpha$. En résumé $x' \in E_1$.

Il est d'autre part, bien évident que l'application est injective. Effectivement, si $E_1 \neq E_2$ la construction ci-dessus fait correspondre à ces deux éléments de $E/_\Gamma$ des éléments différents de $(X/_\Gamma)^k$

> <u>Propriété 2</u>
>
> Supposons que les k classes $F_1, F_2, \ldots, F_k$ servent à caractériser l'isomorphisme de la propriété 1, alors, chacune des N-k classes de plans restant correspond à un arrangement (T_k). En outre, elles constituent dans leur ensemble N-k arrangements (T_k) orthogonaux.

<u>Démonstration</u>.

a) Soit $x \in E_1$ isomorphe à $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$. Soit F_i une classe de plans quelconque avec $i > k$. Soit y_i le plan de F_i passant par x. Soit $a_\lambda \in X_\lambda$ la valeur de X correspondant à y_i. On a : $\forall \alpha \in \Gamma$: $x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_{i,\lambda} = \varphi_i(X_\lambda)$. Faisons alors correspondre à $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$, X_λ soit :

$$f_i(X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}) = X_\lambda \quad (1) \quad \forall i > k.$$

On définit ainsi N-k arrangements (T_k). En effet, tout d'abord (1) est une application à savoir que X_λ dépend de i (classe choisie) et de $X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$ et est ainsi parfaitement définie $\forall \alpha \in \Gamma$, $x\alpha \in X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$, $x\alpha \in y_i{}^\alpha \in F_{i,\lambda} = \varphi_i(X_\lambda)$.

b) Soit $x \in X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$ et $x' \in X_{j'_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$ (avec $j_1 \neq j'_1$). Supposons par l'absurde que les plans y_i et y'_i de F_i passant respectivement par x et x' appartiennent à une même classe $F_{i,\lambda}$. Nous pouvons alors définir x (resp^t x') comme l'intersection des plans $(y_2\, y_3 \ldots y_k\, y_i)$ (resp^t $y'_2\, y'_3 \ldots y'_k\, y'_i$) appartenant aux mêmes classes $F_{2,j_2} \ldots F_{k,j_k}\, F_{i,\lambda}$. Mais alors en vertu de la propriété (P) $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que : $(y'_2 \ldots y'_i) = (y_2 \ldots y_k\, y_i)\alpha$, c'est à dire : $x' = x\alpha$. Donc x et x' sont dans une même classe, ce qui est contraire à l'hypothèse. (Ceci est valable $\forall\ i > k$).

On a donc bien défini des arrangements (T_k) en nombre N-k.

c) On peut répéter le même type de raisonnement pour montrer que les arrangements définis ci-dessus sont orthogonaux. En effet, soient $i_1\, i_2 \ldots i_t > k$ et les classes $F_{i_1}\, F_{i_2} \ldots F_{i_t}$.

Soit $x \in X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_t} X_{j_{t+1}} \ldots X_{j_k}$

et $x' \in X_{j'_1} \ldots X_{j'_t} X_{j_{t+1}} \ldots X_{j_k}$

(avec $j_1 \neq j'_1$ $j_2 \neq j'_2$ .... $j_t \neq j'_t$).

Soient $y_{t+1} \ldots y_k\, y_{i_1}\, y_{i_2} \ldots y_{i_t}$ les plans de $F_{t+1} \ldots F_k\, F_{i_1} \ldots F_{i_t}$ passant par x. De même, soient $y'_{t+1} \ldots y'_k\, y'_{i_1}\, y'_{i_2} \ldots y'_{i_t}$ les plans des classes $F_{t+1} \ldots F_k\, F_{i_1} \ldots F_{i_t}$ passant par x'. Supposons que ces plans appartiennent tous aux mêmes sous-classes $F_{t+1,j_{t+1}} \ldots F_{k,j_k}\, F_{i_1,j_{i_1}} \ldots F_{i_t,j_{i_t}}$.

En vertu de la propriété (P) $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que : $(y'_{t+1} \ldots y'_{i_t}) = (y_{t+1} \ldots y_{i_t})\alpha$. Donc $x' = x\alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, on peut énoncer le résultat suivant :

-THEOREME 1-
Soit un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathfrak{F}, N, q, k)$ admettant un groupe d'automorphismes Γ non transitif possédant la propriété (P) sur X et tel que : $\forall \alpha \in \Gamma$, $\forall i \in [1,N]$ $\forall F_i \in \mathfrak{F} : F_i \alpha = F_i$. La structure d'incidence quotient $(R)_{k-1}/\Gamma = \{E/_\Gamma , F/_\Gamma , \mathfrak{F}/_\Gamma , N, s, k\}$ est un réseau $(R)_{k-1}$.

2ème Cas

Cas général : $F_i\alpha = F_i$ ou bien $F_i\alpha \neq F_i$

Dans ce cas $\mathfrak{F}/_\Gamma = F_{I_1}, F_{I_2}, \ldots, F_{I_{s_1}}$ avec :

$$\text{Card } [F_{I_j}] = i_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{s_1} i_j = N.$$

Nous supposerons dans toute cette partie que $s_1 > k$.
Tout d'abord, tout se passe comme si $[1,N]$ avait été décomposé par Γ en s_1 classes $I_1, I_2, \ldots, I_{s_1}$. On a alors :

- $E/_\Gamma = E_1, E_2, \ldots, E_n$.
- $F/_\Gamma = F_{I_{i,j}}$ $\quad \forall i \in [1,s_1] \quad \forall j \in [1,s]$ (soient $s_1 s$ plans)
- $\mathfrak{F}/_\Gamma = F_{I_i}$ $\quad \forall i \in [1,s_1]$ (soient s_1 classes de s plans)

En effet, soit y un plan de la classe F_i ; On a $y\alpha \in F_i\alpha$. Soit F_{I_i} la classe à laquelle appartiennent F_i et $F_i\alpha$ et supposons que y corresponde à l'élément a de X_{j_i}. Alors $y\alpha$ correspond à $a\alpha$ de X_{j_i}. Autrement dit : $\forall \alpha \in \Gamma$, $y\alpha \in F_{I_{i,j_i}}$. $(y\alpha \in F_{i^\alpha, j_i} \in F_{I_{i,j_i}})$.

Comme d'autre part, on sait que : $F_i = \varphi_i(X)$, on peut écrire : $\forall \alpha \in \Gamma$, $F_{i^\alpha, j_i} = \varphi_{i\alpha}(X_{j_i})$ soit en résumé :

$$\underline{F_{I_{i,j_i}} = \varphi_{I_i}(X_{j_i})}$$

ce qui signifie que le plan F_{I_i, j_i} est en correspondance biunivoque avec X_{j_i}. En effet, soit Γ_{F_i} le stabilisateur de F_i dans Γ. On a :

$$\Gamma = \bigcup_{h \in I_i} \Gamma_{F_i} \alpha_h$$

pour la décomposition de Γ suivant Γ_{F_i}.
Il lui correspond la partition suivante de X_{j_i} :

$$X_{j_i} = \bigcup_{h \in I_i} X_{j_i}^h$$

c'est à dire : si α_1 et $\alpha_2 \in \Gamma_{F_i} \alpha_h$, alors :

$$[\varphi_i(a_i)]^{\alpha_1} = \varphi_h[a_i \alpha_1]$$
$$[\varphi_i(a_i)]^{\alpha_2} = \varphi_h[a_i \alpha_2]$$

$y_i \alpha_1$ et $y_i \alpha_2 \in F_h$ avec $a_i \alpha_1$ et $a_i \alpha_2 \in X_{j_i}^h$

avec : $F_{h, j_i} = \varphi_h[X_{j_i}^h]$, $\forall h \in I_i$

et finalement :

$$F_{I_i, j_i} = \varphi_{I_i}(X_{j_i}).$$

Dans ces conditions, soit a élément de X_{j_i} appartenant à $X_{j_i}^h$; il lui correspond le plan $y = \varphi_h(a)$ appartenant à la classe F_h et inversement.

Nous allons démontrer maintenant les résultats suivants (avec $s_1 > k$ et, rappelons-le, la propriété (P)).

> <u>Propriété 3</u>.
> $E/_\Gamma$ est isomorphe à $(X/_\Gamma)^k$ (Card $E/_\Gamma = s^k$).

Démonstration.

Faisons le choix de F_1, F_2, ..., F_k dans F_{I_1} F_{I_2} ... F_{I_k} (pour les autres démonstrations, on fixera de la même façon une classe F_j dans chaque F_{I_j}, $\forall j > k$).

Choisissons également de façon arbitraire un point x_i dans chaque classe E_i.

Soit alors E_1 et $x_1 \in E_1$. $\forall i \in [1,k]$ soit y_i le plan de F_i passant par x_1. On a $\forall \alpha \in \Gamma$: $x_1{}^\alpha \in y_i{}^\alpha \in F_i{}^\alpha \in F_{I_i}$.

(Remarquons tout de suite que maintenant $x_1{}^\alpha$ peut être confondu avec x_1 sans qu'il en soit de même pour $y_i{}^\alpha$).

Supposons que y_i corresponde à l'élément a_i de X_{j_i} ($\forall i \in [1,k]$), c'est à dire : $y_i = \varphi_i(a_i) \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$.

On sait que $y_i{}^\alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma$ correspond à $a_i{}^\alpha$ de X_{j_i} ; plus précisément, $x_1{}^\alpha \in y_i{}^\alpha \in F_i{}^\alpha$; $j_i = \varphi_{i_\alpha}(X_{j_i})$.

On met ainsi $x_1{}^\alpha$ en correspondance avec $(a_1{}^\alpha$, $a_2{}^\alpha$, ..., $a_k{}^\alpha)$ de X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k}. C'est à dire que l'on fait correspondre à E_1 l'élément X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k} de $(X/_\Gamma)^k$.

Il s'agit de montrer que cette correspondance entre $E/_\Gamma$ et $(X/_\Gamma)^k$ est une bijection.

- Du moment où y_i correspond à a_i de X_{j_i}, $y_i{}^\alpha$ correspond à un élément de X_{j_i} $\forall i \in [1,k]$ et $x_1{}^\alpha$ correspondra à un élément (ou plusieurs) de X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k}. On a donc bien une application.

- C'est une surjection. En effet, soit X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k} un élément quelconque de $(X/_\Gamma)^k$ et soit : $F_{I_{i,j_i}} = \varphi_{I_i}(X_{j_i})$ et ceci $\forall i \in [1,k]$.

Soit $(a'_1$ a'_2 ... $a'_k)$ un élément quelconque de X_{j_1} X_{j_2} ... X_{j_k}.

A a'_i($\forall$ i) de X_{j_i} correspond un plan y'_i de $F_{I_{i,j_i}}$.

En vertu de la propriété (P), il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_i = a_i^\alpha$ $\forall \alpha$ et à a_i correspond y_i $\forall i$.
On a donc $y'_i = y_i \alpha$ $\forall \alpha$ et x'_1 intersection de y'_i est lié à x_1 par $x'_1 = x_1 \alpha$.

- Nous avons enfin défini une injection. Soit en effet x'_2 un point quelconque de E_2 avec $E_2 \neq E_1$. Il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $x'_2 \alpha = x_2$, x_2 désignant le point arbitrairement choisi dans E_2. Soient alors $y'_1\ y'_2 \dots y'_k$ les plans de $F_1\ F_2 \dots F_k$ passant par x_2. Supposons par l'absurde que y'_i corresponde à a'_i de X_{j_i} $\forall$ i. En vertu de la propriété (P), $a'_i = a_i \alpha$. D'où $y'_i = y_i \alpha$ $\forall \alpha$ et finalement $x_2 = x_1 \alpha$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

> Propriété 4.
> Supposons que k classes $F_{I_1}\ F_{I_2} \dots F_{I_k}$ servent à caractériser l'isomorphisme de la propriété 3 ; alors chacune des s_1-k classes restantes correspond à un arrangement (T_k). En outre, elles constituent dans leur ensemble s_1-k arrangements (T_k) orthogonaux.

Démonstration.
$\forall\ i > k$, soit la classe F_i de F_{I_i}. Soit y_i le plan de F_i passant par le point x_1 de $X_{j_1}\ X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Soit a_λ la valeur de X correspondant à y_i. Plus précisément, supposons que $a_\lambda \in X_\lambda$. Dans ces conditions : $\forall \alpha \in \Gamma$: $x_1\alpha \in y_i\alpha \in F_i\alpha$, $\lambda = \varphi_{i_\alpha}(X_\lambda)$ $(a_\lambda \alpha \in X_\lambda)$. On met donc ainsi X_λ en correspondance avec $X_{j_1}\ X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Cette correspondance est une application puisque X_λ est déterminé par le point x_1 de $X_{j_1}\ X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et par l'indice i de I_i, c'est-à-dire par $X_{j_1}\ X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et I_i. On peut donc poser :

$$\underline{f_{I_i}(X_{j_1}\ X_{j_2} \dots X_{j_k}) = X_\lambda \qquad \forall\ i > k}$$

Nous allons montrer qu'ainsi sont définis (s_1-k) arrangements (T_k) orthogonaux.

a) Effectivement, voyons tout d'abord que l'on a obtenu des arrangements (T_k). En effet, soit $x_1 \in X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k} \simeq E_1$ et $x'_1 \in X_{j'_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k} \simeq E_2$. Tout d'abord, il existe α tel que $x'_1 = x_2\alpha$. Remplaçons donc x'_1 par x_2. Soient alors $(y_2, y_3, \ldots, y_k, y_i)$ et $(y'_2, y'_3, \ldots, y'_k, y'_i)$ les plans de $F_2\ F_3 \ldots F_k\ F_i$ passant respectivement par x_1 et x_2.

Supposons par l'absurde que y_i et y'_i correspondent à a_i et a'_i de la même classe X_λ. D'où les valeurs $(a_2\ a_3 \ldots a_k\ a_i)$ et $(a'_2 \ldots a'_k\ a'_i)$ de $X_{j_2} \ldots X_{j_k}\ X_\lambda$. En vertu de la propriété (P), il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_h = a_h\alpha$ $(\forall\ h \in [2 \ldots k,i])$. D'où $y'_h = y_h\alpha$ $(\forall\ h)$ et $x_2 = x_1\alpha$, ce qui infirme l'hypothèse $x_2 \in E_2 \neq E_1$.
On a donc bien des arrangements (T_k).

b) Soient maintenant $I_{i_1}\ I_{i_2} \ldots I_{i_t}$ et soient $F_{i_1}\ F_{i_2} \ldots F_{i_t}$ les classes choisies arbitrairement dans $F_{I_1}\ F_{I_2} \ldots F_{I_t}$. Soit $x_1 \in E_1 \simeq X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_k}$ et $x'_1 \in E_i \simeq X_{j'_1} X_{j'_2} \ldots X_{j'_t} X_{j_{t+1}} \ldots X_{j_k}$ avec $j_1 \neq j'_1 \ldots j_t \neq j'_t$.
$\exists\, \alpha \in \Gamma$ tel que $x_i = x'_1\alpha$. Intéressons-nous à x_1 et x_i. Soient $(y_{t+1} \ldots y_k\ y_{i_1}\ y_{i_2} \ldots y_{i_t})$ et $(y'_{t+1}\ y'_{t+2} \ldots y'_k\ y'_{i_1} \ldots y'_{i_t})$ les plans de $F_{t+1} \ldots F_k\ F_{i_1} \ldots F_{i_t}$ passant respectivement par x_1 et x_2.

Supposons alors par l'absurde que y_{i_j} et y'_{i_j} $\forall\ j \in [1,t]$ correspondent à a_{i_j} et a'_{i_j} $\forall\ j \in [1,t]$ des mêmes classes $X_{\lambda_1}\ X_{\lambda_2} \ldots X_{\lambda_t}$.

D'où les valeurs $(a_{t+1} \ldots a_k\ a_{i_1} \ldots a_{i_t})$ et $a'_{t+1} \ldots a'_k\ a'_{i_1} \ldots a'$ de $(X_{j_t} \ldots X_{j_k}\ X_{\lambda_1} \ldots X_{\lambda_t})$. En vertu de la propriété (P), il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_h = a_h\alpha$ $\forall\ h \in (t+1 \ldots k\ i_1 \ldots i_t)$. D'où : $y'_h = y_h\alpha$ $(\forall\ h)$ et $x_i = x_1\alpha$. Ce qui infirme l'hypothèse suivant laquelle $E_i \neq E_1$. On a donc bien des arrangements (T_k) orthogonaux.

En résumé, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

-THEOREME 2-

Soit un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathfrak{F}, N, q, k)$ admettant un groupe d'automorphismes Γ non transitif, possédant la propriété (P). La structure d'incidence quotient $(R)_{k-1}/_{\Gamma} = \{ E/_{\Gamma} , F/_{\Gamma} , \mathfrak{F}/_{\Gamma} , s_1, s, k \}$ avec $(s_1 > k)$ est un réseau $(R)_{k-1}$.

I. APPLICATIONS.

1) Constructions de tableaux orthogonaux.

A partir d'un tableau d'indice unité, on pourra par application des théorèmes 1 et 2 déduire de nouveaux tableaux orthogonaux d'indice unité.

2) Construction de plans en blocs incomplets partiellement équilibrés. (PBIBD)

Il est facile de constater que la structure d'incidence duale (référence [1]) d'un réseau $(R)_{k-1}$ constitue un PBIBD : les points sont assimilés aux blocs, les plans aux variétés. D'autre part, deux variétés sont λ_o-associées si les plans correspondants sont parallèles ; deux variétés sont λ_1-associées si les plans correspondants se coupent :

D'où :

$$\begin{cases} v = qN \ , \ k = N \ , \ b = q^k \ , \ r = q^{k-1} \ , \ \lambda_o = 0 \ , \ \lambda_1 = q^{k-2} \\ n_o = q-1 \ , \ n_1 = (N-1)q. \\ p^o_{oo} = q-2 \ , \ p^o_{1o} = p^o_{o1} = p^1_{oo} = 0 \ , \ p^o_{11} = (N-1)q \\ p^1_{o1} = p^1_{1o} = q-1 \ , \ p^1_{11} = (N-2)q. \end{cases}$$

On pourra donc associer des familles de PBIBD à chaque tableau orthogonal construit en 1).

REFERENCES.

[1] Dembowski. Finite Geometries (1970).
[2] Lecointe. Thèse (1970).

-o-

Reçu en Juillet 1974

Pierre LECOINTE
30, Rue Desaix
75015 PARIS