



HAL
open science

Réseaux $(\mathbb{R})k-1$ et groupes d'automorphismes non transitifs

Pierre Lecoïnte

► **To cite this version:**

Pierre Lecoïnte. Réseaux $(\mathbb{R})k-1$ et groupes d'automorphismes non transitifs. Annales de l'ISUP, 1977, XXII (3-4), pp.43-56. hal-04080876

HAL Id: hal-04080876

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-04080876v1>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

RESEAUX (R)_{k-1} ET GROUPES D'AUTOMORPHISMES
NON TRANSITIFS

Pierre LECOINTE

Nous allons dégager un procédé de construction de tableaux orthogonaux d'indice unité à partir de tableaux déjà construits en étudiant la structure d'incidence qui leur correspond.

I. RAPPELS ET DEFINITIONS.

1) Définition d'un réseau (R)_{k-1}.

Soit E un ensemble fini d'éléments désignés par des points. Soit F un sous-ensemble d'éléments de P(E) désignés par des plans. Soit \mathcal{f} une partition de F en N classes F_i ($\text{Card}[F_i] \geq 2$, $i \in [1, N]$). Soient q et k deux nombres entiers positifs ($2 \leq k \leq N$). Le système (E, F, \mathcal{f} , N, k, q) constitue un réseau (R)_{k-1} de dimension k si l'on a :

(i) - Tout point x de E appartient à un plan y et un seul de chaque classe F_i .

(ii) - h plans quelconques de h classes différentes se coupent en q^{k-h} points, si $h \leq k$ ou alors, si $h > k$ soit en un point, soit en 0 point.

2) Définition d'un arrangement (T)_k.

Soit X un ensemble de q éléments. Soit k un entier ≥ 2 . Soit f une application de X^k dans X :

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k \xrightarrow{f} y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X$$

possédant la propriété suivante :

$\forall (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k) \in X^{k-1}$, $\forall i \in [1, k]$, l'application $g(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_i, \dots, a_k)$ est une bijection de X sur X.

On définit ainsi un arrangement (T_k) noté :

$$[x_1, x_2, \dots, x_k ; f(x_1, \dots, x_k)] , x_i \in X \quad \forall i \in [1, k]$$

3) Définition des arrangements (T_k) orthogonaux.

Soit une famille de h arrangements (T_k) construits sur un ensemble X de q éléments :

$$[x_1, x_2, \dots, x_k ; f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)] , x_j \in X \quad \forall j \in [1, k] \quad i \in [1, h]$$

On dit que ces h arrangements (T_k) forment une famille d'arrangements orthogonaux si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :

$$I \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = a^1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = a^2 \\ \dots \\ f_h(x_1, x_2, \dots, x_k) = a^h \end{cases}$$

Tous les systèmes extraits de I à i équations et à i inconnues $(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_i}) \in X^i$ ont une solution et une seule et ceci pour tout i et pour tout a^j , $i \in [1, 2, \dots, \min[h, k]]$
 $\forall a^j \in X$, $j = 1, 2, \dots, h$, les autres x_i ayant des valeurs fixées quelconques dans X .

4) Théorème [référence [2]]

L'existence de h arrangements (T_k) orthogonaux construits sur un ensemble X de q éléments est équivalente à l'existence d'un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k , de q^k points et de $N = k+h$ classes de q plans parallèles (E, F, \dots, N, k, q) .

L'intérêt de ce théorème est exprimé dans le résultat suivant (référence [2]) : l'existence d'un réseau $(R)_{k-1}$ de dimension k

de q^k points et de N classes de q plans parallèles est équivalente à l'existence d'un tableau orthogonal de caractéristiques $(1, N, q, k)$.

5) Automorphismes.

Soit Γ un groupe de permutations agissant sur un ensemble X de q éléments. Supposons que Γ ne soit pas transitif sur X et soient X_1, X_2, \dots, X_s les classes d'équivalence de X/Γ . Supposons d'autre part que Γ soit un groupe d'automorphismes sur le réseau $(R)_{k-1}$ défini ci-dessus et correspondant à X . On doit avoir pour cela :

- (i) - $\forall \alpha \in \Gamma, \forall x \in E, \forall y \in F, \forall F_i \in \mathcal{F}$ tels que $x \in y \in F_i$,
 on a : $x^\alpha \in y^\alpha \in F_i^\alpha$ (avec $x^\alpha \in E, y^\alpha \in F, F_i^\alpha \in \mathcal{F}$)
- (ii) - $\forall \alpha \in \Gamma, \alpha$ est une bijection de E sur E , (resp^t de F sur F), (resp^t de \mathcal{F} sur \mathcal{F}).

En usant du théorème 4), on constate facilement que :
 en désignant par y le plan d'équation $f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = a^i$ de la classe F_i et passant par le point $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, la propriété $x^\alpha \in y^\alpha \in F_i^\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma$ s'écrit :

$$x^\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_k^\alpha) \in [f_i(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_k^\alpha)]^\alpha = a_i^\alpha \in F_i^\alpha$$

$$\text{soit : } x^\alpha \in f_i^\alpha [x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_k^\alpha] = a_i^\alpha \in F_i^\alpha$$

En notant alors φ_i la bijection existant entre les plans de la classe F_i et les éléments de X , on a :

$$\underline{x \in y \in F_i \implies x^\alpha \in y^\alpha = [\varphi_i(a_i)]^\alpha = \varphi_i^\alpha(a_i^\alpha) \in F_i^\alpha}$$

6) Structure quotient [référence [1]]

Nous savons que les orbites des points et des plans du réseau $(R)_{k-1}$ forment une décomposition tactique par Γ de ce réseau $(R)_{k-1}$ étudié en tant que structure d'incidence. Nous nous proposons dans cet article d'étudier la structure quotient de $(R)_{k-1}$ par Γ .

II. STRUCTURE QUOTIENT D'UN RESEAU (R)_{k-1}.

Soit Γ un groupe de permutations agissant sur un ensemble X de q éléments. Supposons que Γ ne soit pas transitif sur X et soient alors X_1, X_2, \dots, X_s les s classes d'équivalence de X/Γ . (La relation d'équivalence R est évidemment la suivante : $(x_1, x_2) \in R \iff \exists \alpha \in \Gamma$ avec $x_1 \alpha = x_2$).

Supposons d'autre part que Γ soit un groupe d'automorphismes sur un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathcal{F}, N, k, q)$ correspondant à X . Nous nous proposons d'étudier la structure quotient de $(R)_{k-1}$ par Γ , que l'on désigne par $(R)_{k-1}/\Gamma$. Précisons que l'on a :

- $E/\Gamma = E_1, E_2, \dots, E_n$ avec $E_i = \{x_i^\alpha : x_i \in E_i, \alpha \in \Gamma\}$
- $F/\Gamma = F^1, F^2, \dots, F^m$ avec $F^j = \{y_j^\alpha : y_j \in F^j, \alpha \in \Gamma\}$
- $\mathcal{F}/\Gamma = F_{I_1}, F_{I_2}, \dots, F_{I_s}$ avec $F_{I_j} = \{F_j^\alpha : F_j \in F_{I_j}, \alpha \in \Gamma\}$

et :

- $E_i \in F^j \iff \forall x \in E_i, \forall y \in F^j \quad \exists \alpha \in \Gamma$ tel que $x^\alpha \in y$
- $F^j \in F_{I_j} \iff \forall y \in F^j, \forall F_j \in F_{I_j} \quad \exists \alpha \in \Gamma$ tel que $y^\alpha \in F_j$

Soient alors les q plans d'une classe quelconque F_i de $(R)_{k-1}$. On sait que F_i est en correspondance biunivoque avec X . On peut écrire : $\forall i \in [1, N], F_i = \varphi_i(X)$ (φ_i désignant une bijection). Si $y \in F_i$ et si y correspond à l'élément a de X , on a donc $y = \varphi_i(a)$. Alors $\forall \alpha \in \Gamma : y^\alpha \in F_i^\alpha$. Nous allons distinguer deux cas suivant que $F_i^\alpha = F_i, \forall i \in [1, N]$ ou que $F_i^\alpha \neq F_i$ sont possibles.

1er Cas

$$\underline{\forall \alpha \in \Gamma, \forall i \in [1, N] : F_i^\alpha = F_i}$$

\mathcal{F}/Γ est composée des N classes F^1, F^2, \dots, F^N . Par ailleurs, la décomposition de X en classes suivant Γ entraîne la même

décomposition pour chaque classe de plans F_i , à savoir :

$$F_i/\Gamma = F_{i,j} \quad \forall j \in [1,s] \quad \text{et} : F_{i,j} = \varphi_i(X_j)$$

$\forall i \in [1,N]$, $\forall j \in [1,s]$. (φ_i désignant une bijection).

Cela signifie finalement que : $\forall y \in F_{i,j} : y^\alpha \in F_{i,j} \quad \forall \alpha \in \Gamma$.

Nous avons donc dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} E/\Gamma = E_1, E_2, \dots, E_n \\ F/\Gamma = \{F_{i,j}\} \quad \forall i \in [1,N] \quad \forall j \in [1,s] \quad (\text{soient sn "plans"}) \\ \mathcal{F}/\Gamma = F^1, F^2, \dots, F^N \end{array} \right.$$

c'est à dire que chaque "classe" F^i de \mathcal{F}/Γ est composée des s plans $F_{i,j}$, $\forall j \in [1,s]$.

Nous supposons dans toute la suite que Γ possède la propriété (P) suivante :

Propriété (P).

Soit $(X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k})$ un élément quelconque de $(X/\Gamma)^k$. Soient $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ deux éléments quelconques de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Alors $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que : $b = a^\alpha$.

On a alors les résultats suivants :

Propriété 1

E/Γ est isomorphe à $(X/\Gamma)^k$. (Card $[E/\Gamma] = s^k$).

Démonstration.

Soit $x \in E_1$. Soit $\forall i \in [1,k]$ y_i le plan de F_i passant par x : $x \in y_i \in F_i$. On a $\forall \alpha \in \Gamma : x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_i^\alpha = F_i$. Supposons que y_i corresponde à l'élément a_i de X_{j_i} . On a alors :

$y_i \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$. En résumé : $x \in y_i \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$.

48.

D'autre part, y_i^α correspondant à a_i^α de X_{j_i} , on a également : $x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_{i,j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$. On met donc ici x^α en correspondance avec $(a_1^\alpha, a_2^\alpha, \dots, a_k^\alpha)$ élément de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Cette correspondance est une application. En effet, si $x = x^\alpha$, $y_i = y_i^\alpha \quad \forall i \in [1, k]$ (y_i et y_i^α sont parallèles puisque $F_i^\alpha = F_i$; s'ils passent tous deux par x , ils sont confondus). Nous avons donc une application de E_1 dans $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. On en déduit que l'on peut mettre en relation chaque élément de E/Γ avec $(X/\Gamma)^k$. Il reste à montrer que cette relation est une application bijective. Tout d'abord, c'est une application puisque l'on a défini une application de E_1 dans $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et que ceci peut être répété pour tout élément de E/Γ . D'autre part, cette application est surjective : en effet : $\forall (a'_1, a'_2, \dots, a'_k) \in X_{j_1} \dots X_{j_k}$ on a : $\varphi_i(a'_i) = y'_i$ ($y'_i \in F_{i,j_i}$) et $y'_1 y'_2 \dots y'_k$ définissent un point x' et un seul de E . Utilisons alors la propriété (P). On sait qu'il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_i = a_i^\alpha \quad \forall i$; d'où $y'_i = y_i^\alpha$ et finalement $x' = x^\alpha$. En résumé $x' \in E_1$.

Il est d'autre part, bien évident que l'application est injective. Effectivement, si $E_1 \neq E_2$ la construction ci-dessus fait correspondre à ces deux éléments de E/Γ des éléments différents de $(X/\Gamma)^k$.

Propriété 2

Supposons que les k classes F_1, F_2, \dots, F_k servent à caractériser l'isomorphisme de la propriété 1, alors, chacune des $N-k$ classes de plans restant correspond à un arrangement (T_k) . En outre, elles constituent dans leur ensemble $N-k$ arrangements (T_k) orthogonaux.

Démonstration.

a) Soit $x \in E_1$ isomorphe à $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Soit F_i une classe de plans quelconque avec $i > k$. Soit y_i le plan de F_i passant par x . Soit $a_\lambda \in X_\lambda$ la valeur de X correspondant à y_i . On a : $\forall \alpha \in \Gamma : x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_{i,\lambda} = \varphi_i(X_\lambda)$. Faisons alors correspondre à $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}, X_\lambda$ soit :

$$\underline{f_i(X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}) = X_\lambda \quad (1) \quad \forall i > k.}$$

On définit ainsi $N-k$ arrangements (T_k) . En effet, tout d'abord (1) est une application à savoir que X_λ dépend de i (classe choisie) et de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et est ainsi parfaitement définie $\forall \alpha \in \Gamma$, $x^\alpha \in X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$, $x^\alpha \in y_i^\alpha \in F_{i, \lambda} = \varphi_i(X_\lambda)$.

b) Soit $x \in X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et $x' \in X_{j'_1} X_{j'_2} \dots X_{j'_k}$ (avec $j_1 \neq j'_1$). Supposons par l'absurde que les plans y_i et y'_i de F_i passant respectivement par x et x' appartiennent à une même classe $F_{i, \lambda}$. Nous pouvons alors définir x (resp^t x') comme l'intersection des plans $(y_2 y_3 \dots y_k y_i)$ (resp^t $y'_2 y'_3 \dots y'_k y'_i$) appartenant aux mêmes classes $F_{2, j_2} \dots F_{k, j_k} F_{i, \lambda}$. Mais alors en vertu de la propriété (P) $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que : $(y'_2 \dots y'_i) = (y_2 \dots y_k y_i)^\alpha$, c'est à dire : $x' = x^\alpha$. Donc x et x' sont dans une même classe, ce qui est contraire à l'hypothèse. (Ceci est valable $\forall i > k$).

On a donc bien défini des arrangements (T_k) en nombre $N-k$.

c) On peut répéter le même type de raisonnement pour montrer que les arrangements définis ci-dessus sont orthogonaux. En effet, soient $i_1 i_2 \dots i_t > k$ et les classes $F_{i_1} F_{i_2} \dots F_{i_t}$.

Soit $x \in X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_t} X_{j_{t+1}} \dots X_{j_k}$

et $x' \in X_{j'_1} \dots X_{j'_t} X_{j_{t+1}} \dots X_{j_k}$

(avec $j_1 \neq j'_1$ $j_2 \neq j'_2$ $j_t \neq j'_t$).

Soient $y_{t+1} \dots y_k y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_t}$ les plans de $F_{t+1} \dots F_k F_{i_1} \dots F_{i_t}$ passant par x . De même, soient $y'_{t+1} \dots y'_k y'_{i_1} y'_{i_2} \dots y'_{i_t}$ les plans des classes $F_{t+1} \dots F_k F_{i_1} \dots F_{i_t}$ passant par x' . Supposons que ces plans appartiennent tous aux mêmes sous-classes $F_{t+1, j_{t+1}} \dots F_{k, j_k} F_{i_1, j_{i_1}} \dots F_{i_t, j_{i_t}}$.

En vertu de la propriété (P) $\exists \alpha \in \Gamma$ tel que :

$(y'_{t+1} \dots y'_{i_t}) = (y_{t+1} \dots y_{i_t})^\alpha$. Donc $x' = x^\alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, on peut énoncer le résultat suivant :

-THEOREME 1-

Soit un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathcal{F}, N, q, k)$ admettant un groupe d'automorphismes Γ non transitif possédant la propriété (P) sur X et tel que : $\forall \alpha \in \Gamma, \forall i \in [1, N]$
 $\forall F_i \in \mathcal{F} : F_i^\alpha = F_i$. La structure d'incidence quotient $(R)_{k-1}/\Gamma = \{E/\Gamma, F/\Gamma, \mathcal{F}/\Gamma, N, s, k\}$ est un réseau $(R)_{k-1}$.

2ème Cas

Cas général : $F_i^\alpha = F_i$ ou bien $F_i^\alpha \neq F_i$

Dans ce cas $\mathcal{F}/\Gamma = F_{I_1}, F_{I_2}, \dots, F_{I_{s_1}}$ avec :

$$\text{Card } [F_{I_j}] = i_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{s_1} i_j = N.$$

Nous supposons dans toute cette partie que $s_1 > k$.

Tout d'abord, tout se passe comme si $[1, N]$ avait été décomposé par Γ en s_1 classes I_1, I_2, \dots, I_{s_1} . On a alors :

$$- E/\Gamma = E_1, E_2, \dots, E_n.$$

$$- F/\Gamma = F_{I_i, j} \quad \forall i \in [1, s_1] \quad \forall j \in [1, s] \quad (\text{soient } s_1 s \text{ plans})$$

$$- \mathcal{F}/\Gamma = F_{I_i} \quad \forall i \in [1, s_1] \quad (\text{soient } s_1 \text{ classes de } s \text{ plans})$$

En effet, soit y un plan de la classe F_i ; On a $y^\alpha \in F_i^\alpha$. Soit F_{I_i} la classe à laquelle appartiennent F_i et F_i^α et supposons que y corresponde à l'élément a de X_{j_i} . Alors y^α correspond à a^α de X_{j_i} . Autrement dit : $\forall \alpha \in \Gamma, y^\alpha \in F_{I_i, j_i}$. ($y^\alpha \in F_{i^\alpha, j_i} \in F_{I_i, j_i}$).

Comme d'autre part, on sait que : $F_i = \varphi_i(X)$, on peut écrire :
 $\forall \alpha \in \Gamma, F_{i^\alpha, j_i} = \varphi_{i^\alpha}(X_{j_i})$ soit en résumé :

$$\underline{F_{I_i, j_i} = \varphi_{I_i}(X_{j_i})}$$

ce qui signifie que le plan F_{I_i, j_i} est en correspondance biunivoque avec X_{j_i} . En effet, soit Γ_{F_i} le stabilisateur de F_i dans Γ . On a :

$$\Gamma = \bigcup_{h \in I_i} \Gamma_{F_i} \alpha_h$$

pour la décomposition de Γ suivant Γ_{F_i} .

Il lui correspond la partition suivante de X_{j_i} :

$$X_{j_i} = \bigcup_{h \in I_i} X_{j_i}^h$$

c'est à dire : si α_1 et $\alpha_2 \in \Gamma_{F_i} \alpha_h$, alors :

$$[\psi_i(a_i)]^{\alpha_1} = \psi_h[a_i \alpha_1]$$

$$[\psi_i(a_i)]^{\alpha_2} = \psi_h[a_i \alpha_2]$$

$y_i \alpha_1$ et $y_i \alpha_2 \in F_h$ avec $a_i \alpha_1$ et $a_i \alpha_2 \in X_{j_i}^h$

avec : $F_{h, j_i} = \psi_h[X_{j_i}^h]$, $\forall h \in I_i$

et finalement :

$$F_{I_i, j_i} = \psi_{I_i}(X_{j_i}).$$

Dans ces conditions, soit a élément de X_{j_i} appartenant à $X_{j_i}^h$; il lui correspond le plan $y = \psi_h(a)$ appartenant à la classe F_h et inversement.

Nous allons démontrer maintenant les résultats suivants (avec $s_1 > k$ et, rappelons-le, la propriété (P)).

$$\left| \begin{array}{l} \text{Propriété 3.} \\ E/\Gamma \text{ est isomorphe à } (X/\Gamma)^k \quad (\text{Card } E/\Gamma = s^k). \end{array} \right.$$

Démonstration.

Faisons le choix de F_1, F_2, \dots, F_k dans $F_{I_1} F_{I_2} \dots F_{I_k}$
 (pour les autres démonstrations, on fixera de la même façon
 une classe F_j dans chaque F_{I_j} , $\forall j > k$).

Choisissons également de façon arbitraire un point x_i dans
 chaque classe E_i .

Soit alors E_1 et $x_1 \in E_1$. $\forall i \in [1, k]$ soit y_i le plan de F_i
 passant par x_1 . On a $\forall \alpha \in \Gamma : x_1^\alpha \in y_i^\alpha \in F_i^\alpha \in F_{I_i}$.

(Remarquons tout de suite que maintenant x_1^α peut être confon-
 du avec x_1 sans qu'il en soit de même pour y_i^α).

Supposons que y_i corresponde à l'élément a_i de X_{j_i} ($\forall i \in [1, k]$),
 c'est à dire : $y_i = \varphi_i(a_i) \in F_{i, j_i} = \varphi_i(X_{j_i})$.

On sait que y_i^α , $\forall \alpha \in \Gamma$ correspond à a_i^α de X_{j_i} ; plus préci-
 sément, $x_1^\alpha \in y_i^\alpha \in F_i^\alpha$; $j_i = \varphi_{i^\alpha}(X_{j_i})$.

On met ainsi x_1^α en correspondance avec $(a_1^\alpha, a_2^\alpha, \dots, a_k^\alpha)$
 de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. C'est à dire que l'on fait correspondre à E_i
 l'élément $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ de $(X/\Gamma)^k$.

Il s'agit de montrer que cette correspondance entre E/Γ et $(X/\Gamma)^k$
 est une bijection.

- Du moment où y_i correspond à a_i de X_{j_i} , y_i^α correspond à
 un élément de X_{j_i} $\forall i \in [1, k]$ et x_1^α correspondra à un élément
 (ou plusieurs) de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. On a donc bien une application.

- C'est une surjection. En effet, soit $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ un élément
 quelconque de $(X/\Gamma)^k$ et soit : $F_{I_i, j_i} = \varphi_{I_i}(X_{j_i})$ et ceci $\forall i \in [1, k]$.
 Soit $(a'_1 a'_2 \dots a'_k)$ un élément quelconque de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$.
 A a'_i ($\forall i$) de X_{j_i} correspond un plan y'_i de F_{I_i, j_i} .

En vertu de la propriété (P), il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_i = a_i^\alpha$
 $\forall \alpha$ et à a_i correspond $y_i \quad \forall i$.

On a donc $y'_i = y_i^\alpha \quad \forall \alpha$ et x'_1 intersection de y'_i est lié
à x_1 par $x'_1 = x_1^\alpha$.

- Nous avons enfin défini une injection. Soit en effet x'_2 un
point quelconque de E_2 avec $E_2 \neq E_1$. Il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que
 $x'_2^\alpha = x_2$, x_2 désignant le point arbitrairement choisi dans E_2 .
Soient alors $y'_1 y'_2 \dots y'_k$ les plans de $F_1 F_2 \dots F_k$ passant
par x_2 . Supposons par l'absurde que y'_i corresponde à a'_i de X_{j_i}
 $\forall i$. En vertu de la propriété (P), $a'_i = a_i^\alpha$. D'où $y'_i = y_i^\alpha$
 $\forall \alpha$ et finalement $x_2 = x_1^\alpha$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Propriété 4.

Supposons que k classes $F_{I_1} F_{I_2} \dots F_{I_k}$
servent à caractériser l'isomorphisme
de la propriété 3 ; alors chacune des
 s_1-k classes restantes correspond à un
arrangement (T_k) . En outre, elles cons-
tituent dans leur ensemble s_1-k arrange-
ments (T_k) orthogonaux.

Démonstration.

$\forall i > k$, soit la classe F_i de F_{I_i} . Soit y_i le plan de F_i passant
par le point x_1 de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Soit a_λ la valeur de X
correspondant à y_i . Plus précisément, supposons que $a_\lambda \in X_\lambda$.
Dans ces conditions : $\forall \alpha \in \Gamma : x_1^\alpha \in y_i^\alpha \in F_i^\alpha, \lambda = \varphi_{i_\alpha}(X_\lambda)$
($a_\lambda^\alpha \in X_\lambda$). On met donc ainsi X_λ en correspondance avec
 $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$. Cette correspondance est une application puis-
que X_λ est déterminé par le point x_1 de $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et par
l'indice i de I_i , c'est-à-dire par $X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et I_i . On
peut donc poser :

$$\underline{f_{I_i}(X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}) = X_\lambda \quad \forall i > k}$$

Nous allons montrer qu'ainsi sont définis (s_1-k) arrangements (T_k) orthogonaux.

a) Effectivement, voyons tout d'abord que l'on a obtenu des arrangements (T_k) . En effet, soit $x_1 \in X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k} \approx E_1$ et $x'_1 \in X_{j'_1} X_{j'_2} \dots X_{j'_k} \approx E_2$. Tout d'abord, il existe α tel que $x'_1 = x_2^\alpha$. Remplaçons donc x'_1 par x_2 . Soient alors $(y_2, y_3, \dots, y_k, y_i)$ et $(y'_2, y'_3, \dots, y'_k, y'_i)$ les plans de $F_2 F_3 \dots F_k F_i$ passant respectivement par x_1 et x_2 .

Supposons par l'absurde que y_i et y'_i correspondent à a_i et a'_i de la même classe X_λ . D'où les valeurs $(a_2 a_3 \dots a_k a_i)$ et $(a'_2 \dots a'_k a'_i)$ de $X_{j_2} \dots X_{j_k} X_\lambda$. En vertu de la propriété (P), il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_h = a_h^\alpha \quad (\forall h \in [2 \dots k, i])$. D'où $y'_h = y_h^\alpha \quad (\forall h)$ et $x_2 = x_1^\alpha$, ce qui infirme l'hypothèse $x_2 \in E_2 \neq E_1$.

On a donc bien des arrangements (T_k) .

b) Soit maintenant $I_{i_1} I_{i_2} \dots I_{i_t}$ et soient $F_{i_1} F_{i_2} \dots F_{i_t}$ les classes choisies arbitrairement dans $F_{I_1} F_{I_2} \dots F_{I_t}$. Soit $x_1 \in E_1 \approx X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$ et $x'_1 \in E_i \approx X_{j'_1} X_{j'_2} \dots X_{j'_t} X_{j_{t+1}} \dots X_{j_k}$ avec $j_1 \neq j'_1 \dots j_t \neq j'_t$.

$\exists \alpha \in \Gamma$ tel que $x_i = x'_1^\alpha$. Intéressons-nous à x_1 et x_i . Soient $(y_{t+1} \dots y_k y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_t})$ et $(y'_{t+1} y'_{t+2} \dots y'_k y'_{i_1} \dots y'_{i_t})$ les plans de $F_{t+1} \dots F_k F_{i_1} \dots F_{i_t}$ passant respectivement par x_1 et x_2 .

Supposons alors par l'absurde que y_{i_j} et $y'_{i_j} \quad \forall j \in [1, t]$ correspondent à a_{i_j} et $a'_{i_j} \quad \forall j \in [1, t]$ des mêmes classes $X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots X_{\lambda_t}$.

D'où les valeurs $(a_{t+1} \dots a_k a_{i_1} \dots a_{i_t})$ et $(a'_{t+1} \dots a'_k a'_{i_1} \dots a'_{i_t})$ de $(X_{j_t} \dots X_{j_k} X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_t})$. En vertu de la propriété (P), il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $a'_h = a_h^\alpha \quad \forall h \in (t+1 \dots k, i_1 \dots i_t)$. D'où : $y'_h = y_h^\alpha \quad (\forall h)$ et $x_i = x_1^\alpha$. Ce qui infirme l'hypothèse suivant laquelle $E_i \neq E_1$. On a donc bien des arrangements (T_k) orthogonaux.

En résumé, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

-THEOREME 2-

Soit un réseau $(R)_{k-1} = (E, F, \mathcal{F}, N, q, k)$ admettant un groupe d'automorphismes Γ non transitif, possédant la propriété (P). La structure d'incidence quotient $(R)_{k-1}/\Gamma = \{ E/\Gamma, F/\Gamma, \mathcal{F}/\Gamma, s_1, s, k \}$ avec $(s_1 > k)$ est un réseau $(R)_{k-1}$.

I. APPLICATIONS.

1) Constructions de tableaux orthogonaux.

A partir d'un tableau d'indice unité, on pourra par application des théorèmes 1 et 2 déduire de nouveaux tableaux orthogonaux d'indice unité.

2) Construction de plans en blocs incomplets partiellement équilibrés. (PBIBD)

Il est facile de constater que la structure d'incidence duale (référence [1]) d'un réseau $(R)_{k-1}$ constitue un PBIBD : les points sont assimilés aux blocs, les plans aux variétés. D'autre part, deux variétés sont λ_0 -associées si les plans correspondants sont parallèles ; deux variétés sont λ_1 -associées si les plans correspondants se coupent :

D'où :

$$\begin{cases} v = qN, k = N, b = q^k, r = q^{k-1}, \lambda_0 = 0, \lambda_1 = q^{k-2} \\ n_0 = q-1, n_1 = (N-1)q. \\ p_{00}^0 = q-2, p_{10}^0 = p_{01}^0 = p_{00}^1 = 0, p_{11}^0 = (N-1)q \\ p_{01}^1 = p_{10}^1 = q-1, p_{11}^1 = (N-2)q. \end{cases}$$

On pourra donc associer des familles de PBIBD à chaque tableau orthogonal construit en 1).

P. LECOINTE

56.

REFERENCES.

- [1] Dembowski. Finite Geometries (1970).
- [2] Lecoïnte. Thèse (1970).

-o-

Reçu en Juillet 1974

Pierre LECOINTE

30, Rue Desaix

75015 PARIS