Sur les variances attachées aux quelques familles d'ovaloides dans l'espace R3

Marius I Stoka

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1977, XXII, fasc. 3-4, 99 - 105

SUR LES VARIANCES ATTACHEES AUX QUELQUES FAMILLES D'OVALOIDES DANS L'ESPACE R_3

Marius I. STOKA *

Soit R_3 l'espace euclidien à trois dimensions de coordonnées x,y,z .

La mesure élémentaire cinématique dans cet espace est [3]

$$dK = dP \wedge d\Omega \wedge d\Psi$$

où $dP = dx \wedge dy \wedge dz$, $d\Omega = |\sin\theta|\, d\varphi \wedge d\theta$ est l'élément d'aire sur la sphère unité et Ψ est un angle de rotation.

Soit K_o un ovaloïde fixe de volume V_o , d'aire S_o et pour lequel l'intégrale de la courbure moyenne est $\bar{H}_o$ et $K_1,\ldots,K_m$ un système de m ovaloïdes aléatoires comme position, indépendants, uniformément répartis dans R_3 , congruents avec un ovaloïde K de volume V_o , d'aire S_o et pour lequel l'intégrale de la courbure moyenne est $\bar{H}$ et rencontrant K_o .

Notons $\mathcal{K}_m = K_o \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)$ et soit v_m le volume de $\mathcal{K}_m$.

L.A. Santalo a déterminé [3] l'espérance mathématique de v_m

$$E[v_m] = \frac{(8\pi^2 V)^m\, V_o}{[8\pi^2(V_o+V)+2\pi(S_o\bar{H}+S\bar{H}_o)]^m} \quad . \tag{1}$$

---

* Travail élaboré en qualité de Maître de Recherche à l'Institut de Statistique des Universités de Paris.

Dans ce travail, nous déterminerons la variance de v_m .

1. - Soit :

$$I = \int_{\{K_i \cap K_o = \emptyset\,;\, P_1, P_2 \in \mathcal{K}_m\}} dP_1\, dP_2\, dK_1 \ldots dK_m$$

où P_1 et P_2 sont deux points indépendants.

Nous avons :

$$I = \int_{\{K_i \cap K_o \neq \emptyset\}} dK_1 \ldots dK_m \int_{\{P_1 \in \mathcal{K}_m\}} dP_1 \int_{\{P_2 \in \mathcal{K}_m\}} dP_2 = \int_{\{K_i \cap K_o \neq \emptyset\}} v_m^2\, dK_1 \ldots dK_m\ . \quad (2)$$

En échangeant l'ordre de l'intégration et compte tenu que $K_1, \ldots, K_m$ sont indépendants entre eux, nous avons :

$$I = \int_{\{P_1, P_2 \in K_o\}} dP_1\, dP_2 \int_{\{\overline{P_1P_2} \subset K_1\}} dK_1 \ldots \int_{\{\overline{P_1P_2} \subset K_m\}} dK_m$$

$$= \int_{\{P_1, P_2 \in K_o\}} \left[\int_{\{\overline{P_1P_2} \subset K\}} dK \right]^m dP_1\, dP_2\ ,$$

où $\overline{P_1P_2}$ est le segment déterminé par les points P_1 et P_2 .

Si nous notons par $\mu(K, \ell)$ la mesure de l'ensemble des segments de longueur ℓ intérieurs au K , compte tenu des propriétés d'invariance de la mesure cinématique [3] , nous avons :

$$\int_{\{P_1P_2 \subset K\}} dK = \mu(K, \overline{P_1P_2})\ ,$$

donc :

$$I = \int_{\{P_1, P_2 \in K_o\}} [\mu(K\,, \overline{P_1P_2})]^m\, dP_1\, dP_2\ . \quad (3)$$

Notons maintenant par G la droite qui passe par P_1 et P_2 et soient t_1 , t_2 les distances entre P_1 (respectivement P_2) et la projection orthogonale de l'origine O sur la droite G.

Alors, nous avons la formule de Blaschke [1] :

$$dP_1 \wedge dP_2 = (t_1 - t_2)^2 \, dG \wedge dt_1 \wedge dt_2 \ ,$$

où $dG = |\sin\theta \cos\theta| \, dx \wedge dy \wedge d\varphi \wedge d\theta$, x et y étant les coordonnées du point d'intersection de la droite G avec le plan $x0y$ et (φ, θ) étant la direction de G .

Alors, en notant par α et β les valeurs du t correspondant aux points d'intersection de la droite G avec K_o , nous avons :

$$\int_{\{P_1, P_2 \in K_o\}} [\mu(K, \overline{P_1P_2})]^m \, dP_1 \, dP_2$$

$$= \int_{\{G \cap K_o \neq \emptyset\}} dG \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta [\mu(K, |t_2 - t_1|)]^m (t_1 - t_2)^2 \, dt_1 \, dt_2 \tag{4}$$

$$= 2 \int_{\{G \cap K_o \neq \emptyset\}} \Phi(K, m, \lambda) \, dG$$

où nous avons noté :

$$\Phi(K, m, \lambda) = \int_0^\lambda \int_0^v [\mu(K, u)]^m u^2 \, du \, dv \tag{5}$$

$\lambda = \beta - \alpha$ étant la longueur de la corde interceptée par K_o sur G .

Les formules (2) , (3) et (4) nous donnent :

$$\int_{\{K_i \cap K_o \neq \emptyset\}} v_m^2 \, dK_1 \ldots dK_m = 2 \int_{\{G \cap K_o \neq \emptyset\}} \Phi(K, m, \lambda) \, dG \ . \tag{6}$$

Les ovaloïdes $K_1, \ldots, K_m$ étant indépendants, nous avons :

$$\int_{\{K_i \cap K_o \neq \emptyset\}} dK_1 \ldots dK_m = \int_{\{K_1 \cap K_o \neq \emptyset\}} dK_1 \ldots \int_{\{K_m \cap K_o \neq \emptyset\}} dK_m = \left[\int_{\{K \cap K_o \neq \emptyset\}} dK \right]^m \ .$$

Nous avons la formule de Santalo [3] :

$$\int_{\{K \cap K_o \neq \emptyset\}} dK = 8\pi^2 (V_o + V) + 2\pi (S_o \bar{H} + S \bar{H}_o) \ ,$$

donc :

$$\int_{\{K_i \cap K_o \neq \phi\}} dK_1 \ldots dK_m = [8\,\pi^2(V_o + V) + 2\,\pi(S_o\bar{H} + SH_o)]^m \quad . \quad (7)$$

Les formules (6) et (7) nous donnent :

$$E[v_m^2] = \frac{2 \displaystyle\int_{\{G \cap K_o \neq \phi\}} \Phi(K,m,\lambda)\, dG}{[8\,\pi^2(V_o + V) + 2\,\pi(S_o\bar{H} + S\bar{H}_o)]^m}$$

Donc, la variance de v_m est :

$$\sigma^2(v_m) = \frac{1}{[8\,\pi^2(V_o + V) + 2\,\pi(S_o\bar{H} + S\bar{H}_o)]^m} \tag{8}$$

$$\left\{ 2 \int_{\{G \cap K_o \neq \phi\}} \Phi(K,m,\lambda)\, dG - \frac{(8\,\pi^2\, V_o)^{2m}\, V_o^2}{[8\,\pi^2(V_o + V) + 2\,\pi(S_o\bar{H} + S\bar{H}_o)]^m} \right\},$$

où $\Phi(K,m,\lambda)$ est donné par (5) .

2. - Nous considérons maintenant le cas particulier K_o = sphère de rayon R_o , K = cube de côté a .

Nous avons [4] :

$$\mu(K,\ell) = \pi^2\, a^3 - \frac{3\,\pi^2 a^2}{2}\,\ell + 2\,\pi\, a\, \ell^2 - \frac{\pi}{4}\,\ell^3 \quad .$$

Alors, (5) nous donne :

$$\Phi(K,m,\lambda) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^m \int_0^{\lambda} \left[\int_0^{v} (4\,\pi\, a^3 - 6\,\pi\, a^2 u + 8\, a u^2 - u^3)^m\, u\, du \right] dv$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^m \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=m} \frac{m!}{j_1!\,j_2!\,j_3!\,j_4!} \tag{9}$$

$$\frac{(-1)^{j_2+j_4}\; 2^{2j_1+j_2+3j_3}\; 3^{j_2}\; \pi^{j_1+j_2}\; a^{3j_1+2j_2+j_3}\; \lambda^{3j_4+2j_3+j_2+4}}{(3j_4+2j_3+j_2+3)(3j_4+2j_3+j_2+4)}.$$

Nous avons besoin de calculer les intégrales de la forme :

$$\mathfrak{J}_n = \int_{\{G \cap K_o \neq \phi\}} \lambda^n\, dG \quad .$$

Les équations de la droite G sont :

$$\frac{X - x}{\cos\varphi \sin\theta} = \frac{Y - y}{\sin\varphi \sin\theta} = \frac{Z}{\cos\theta} \ ,$$

donc, la corde interceptée par la sphère K_o sur G a la longueur :

$$\lambda = 2\sqrt{\sin^2\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - x^2 - y^2 + R_o^2} \ .$$

Il en résulte :

$$\mathfrak{I}_n = 2^n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$\iint_D [\sin^2\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - x^2 - y^2 + R_o^2]^{\frac{n}{2}} \, dx\, dy \qquad (10)$$

où $D : \sin^2\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - x^2 - y^2 + R_o^2 \geq 0$.

En passant à des coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{cases} \ ,$$

le domaine D devient :

$$D' : 0 \leq \omega < 2\pi \ , \quad 0 \leq \rho \leq \frac{R_o}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \cos^2(\omega - \varphi)}} \ ,$$

et nous avons :

$$\mathfrak{J} = \iint_D [\sin^2\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - x^2 - y^2 + R_o^2]^{\frac{n}{2}} \, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\frac{R_o}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2(\omega-\varphi)}}} (R_o^2 - \rho^2[1 - \sin^2\theta\cos^2(\omega - \varphi)]^{\frac{n}{2}} \rho \, d\rho$$

ou en notant :

$$\sqrt{R_o^2 - \rho^2[1 - \sin^2\theta\cos^2(\omega - \varphi)]} = \xi \ ,$$

$$\mathfrak{J} = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - \sin^2\theta\cos^2(\omega - \varphi)} \int_0^{R_o} \xi^{n+1} \, d\xi$$

$$\mathcal{J} = \frac{R_o^{n+2}}{n+2} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1-\sin^2\theta\cos^2(\omega-\varphi)} .$$

Donc, (10) devient :

$$\mathcal{J}_n = \frac{2^n R^{n+2}}{n+2} . C ,$$

où :

$$C = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta\cos^2(\omega-\varphi)}$$

est une constante.

Compte tenu que pour $n = 1$, on a la formule de Czuber [2]

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\{G\cap K_o \neq \emptyset\}} \lambda\, dG = 2\pi V_o$$

il en résulte $C = 4\pi^2$, donc :

$$\mathcal{J}_n = \frac{\pi^2 (2R_o)^{n+2}}{n+2} . \tag{11}$$

Avec cette formule et tenant compte de (9), nous avons :

$$\int_{\{G\cap K_o\neq\emptyset\}} \Phi(K,m,\lambda)\, dG = 2^6 \pi^{m+2} \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=m} \frac{m!}{j_1!j_2!j_3!j_4!}$$

$$\frac{(-1)^{j_2+j_4} 2^{3j_3+j_4} 3^{j_2} \pi^{j_1+j_2} a^{3j_1+2j_2+j_3} R_o^{3j_4+2j_3+j_2+6}}{(3j_4+2j_3+j_2+3)(3j_4+2j_3+j_2+4)(3j_4+2j_3+j_2+6)}$$

Alors, compte tenu de formules de Blaschke [1] :

$$\bar{H}_o = 4\pi R_o \quad , \quad H = 3\pi a \quad ,$$

la formule (8) nous donne :

$$\sigma^2(v_m) = \frac{3^m R_o^6}{2^{3m-7}\pi^{m-2}(4\pi R_o^3+3\pi a R_o^2+6a^2R_o+3a^3)}$$

$$\left[\sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=m} \frac{m!}{j_1!j_2!j_3!j_4!}\right.$$

$$\times \frac{(-1)^{j_2+j_4} 2^{3j_3+j_4} 3^{j_2} \pi^{j_1+j_2} a^{3j_1+2j_2+j_3} R_o^{3j_4+2j_3+j_2}}{(3j_4+2j_3+j_2+3)(3j_4+2j_3+j_2+4)(3j_4+2j_3+j_2+6)}$$

$$- \frac{2^{3m-3}\, 3^{m-2}\, \pi^{m}\, a^{6m}}{(4\pi R_o + 3\pi a R_o^2 + 6 a^2 R_o + 3 a^3)^m} \Bigg] .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLASCHKE W., Vorlesungen über Integralgeometrie, 3e éd., V.E.B Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1955.

[2] CZUBER E., Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, Sitz. Akad. Wiss., Wien, 90 (2), pp.719-742, 1884.

[3] SANTALO L.A., Über das Kinematische Mass in Raum, Act. Sci. et Ind., n° 357, Hermann, Paris, 1936.

[4] STOKA M.I., Une extension du problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien R^n , Boll. della Un. Mat. Ital., (4), 10, pp.386-389, 1974.

Reçu en janvier 1973

Université des Sciences Sociales

Place Anatole France

31070 Toulouse