Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes

Paul Deheuvels

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1978, XXIII, fasc. 3-4, 1-36

CARACTERISATION COMPLETE DES LOIS EXTREMES MULTIVARIEES ET DE LA CONVERGENCE DES TYPES EXTREMES

par Paul DEHEUVELS, Maître de Conférences
à l'Université Paris VI (Institut de Statistique)

Mots clés: Lois extrêmes, lois multivariées, loi de Frechet, loi de Weibull, loi de Gumbel, types de distributions de probabilité, convergence des types, convergence faible des mesures de probabilité, maxima et minima de suites de vecteurs aléatoires, fonctions de dépendance et de liaison.

Key words: Extreme values distributions, multivariate distributions, Frechet & Gumbel & Weibull probability distributions, type of a probability distribution, type convergence, weak convergence of probability measures, extremes of sequences of independent idemdistributed random vectors, distribution & dependence & association functions.

English Summary: This paper deals with the weak asymptotic convergence of the extreme values $\left\{\operatorname{Max}_{1\leq i\leq n} X_i(1),\ldots,\operatorname{Max}_{1\leq i\leq n} X_i(p)\right\} = Y_n \in \mathbb{R}^p$, of i.i.d.r.v. $\{X_m(1),\ldots,X_m(p)\} = X_m \in \mathbb{R}^p$.

It is shown that it is possible to define a continuous dependence function D, defined by $G(x_1,\ldots,x_p) = P(X(1)\leq x_1,\ldots,X(p)\leq x_p) = D(G_1(x_1),\ldots,G_p(x_p))$, $G_i(x_i) = P(X(i)\leq x_i)$, at each continuity point of $\{G_i, 1\leq i\leq p\}$, without any continuity assumption on G.

Except in the degenerate case where at least a coordinate $X(i)$ has a finite maximum w.p. >0, it is shown that any dependence function associated to X uniquely determines the limit set of D_n, dependence function associated to Y_n, $n\to\infty$, and that this limit set is a closed connex set either infinite, or reduced to a single point. Simple necessary and sufficient conditions are given in order that D_n has a unique limit.

The set of all possible limit dependence functions is completely characterised by the following representation:

$$D(y_1,\ldots,y_p) = y_1\ldots y_p \exp\left\{\sum_{2\leq k\leq p}\ \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq p} (-1)^k \int_{v\in S_{k;i_1,\ldots,i_k}} \operatorname{Sup}_{1\leq j\leq k}\left\{v_{i_j}\operatorname{Log} u_{i_j}\right\} d\mu_{k;i_1,\ldots,i_k}(v_1,\ldots,v_p)\right\}$$

where $\mu_{k;i_1,\ldots,i_k}$ is a positive measure on the simplex $S_{k;i_1,\ldots,i_k} = \left\{v\ ;\ v_{i_1}+\ldots+v_{i_k}=1,\ v_{i_j}\geq 0,\ v_i=0,\ i\notin\{i_1,\ldots,i_k\}\right\}$, satisfying boundedness and ordering conditions.

It is shown that this representation cannot be reduced to a single term ($k = p$) except in particular cases, and that the decomposition is unique, with boundary conditions.

As a by-result, the set of all possible types limits of extreme values of sequences of i.i.r.v. is characterised.—

...

0.– Introduction:

Le problème de la convergence faible asymptotique de $Y_n = \left\{ \sup_{1\leq i\leq n} X_i(1),\dots, \sup_{1\leq i\leq n} X_i(p)\right\}$,
pour $n \mapsto \infty$, où $X_m = \{X_m(1),\dots,X_m(p)\}$ est pour $m \geq 1$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et de même loi de $\mathbb{R}^p$, a été résolu dans le cas univarié, $p=1$, par Gnedenko, [9], 1943. Il a montré, notamment, que les seules distributions possibles, limites faibles de $(Y_n - b_n)/a_n$, $a_n > 0$, étaient, dans ce cas, les distributions de fonctions de répartition:

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R}, \text{ loi de Gumbel ;}$$

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-a}) & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}, \ a > 0, \text{ loi de Frechet ;}$$

$$\Psi_a(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ \exp(-(-x)^a) & , x < 0 \end{cases}, \ a > 0, \text{ loi de Weibull.}$$

Dans le cas multivarié, le problème n'a pas été, à notre connaissance, résolu en général, sauf pour le cas bivarié, étudié principalement par Finkelshteyn,[5], 1953, Geffroy,[8], 1958-9, Sibuya,[14], 1960, Tiago de Oliveira,[15], 1958-75. La référence de synthèse la plus récente sur le sujet est le livre de Galambos,[7], 1978, où l'historique du cas multivarié est esquissée p.271-273.

L'introduction de la fonction de dépendance, définie pour une fonction de répartition F de X_m, de lois marginales $F_1,\dots,F_p$ continues, par l'identité:

$D(F_1(x_1),\dots,F_p(x_p)) = F(x_1,\dots,x_p)$, permet de résoudre partiellement le problème en montrant que Y_m converge asymptotiquement vers une loi limite, si et seulement si c'est le cas pour chaque coordonnée, et si $D_n(u_1,\dots,u_p)=D^n(u_1^{1/n},\dots,u_p^{1/n})$ converge vers une fonction de répartition limite. Les problèmes restés en suspens sont:

(i) Sous quelle condition D_n converge vers une limite ?

(ii) Comment caractériser toutes les limites possibles de D_n ?

(iii) Que se passe-t-il lorsque X n'a plus une distribution continue, D n'étant pas nécessairement alors définie ?

Nous résolvons complètement ici les problèmes précédents, en montrant que D_n a soit une limite unique, lorsque:

$$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[,\quad \lim_{n\infty} n\,(1 - D(1 - z_1/n,\dots, 1 - z_p/n)) \text{ existe },$$

soit un ensemble de valeurs d'adhérences connexe et compact pour la topologie de la convergence uniforme. Nous explicitons complètement la structure des fonctions de dépendance possibles, infirmant un résultat annoncé et non publié de Pickands ([7], th.5.4.3, p.265). Nous résolvons enfin le cas de v.a. non continues, en montrant que les résultats du cas continu subsistent toujours, sauf dans le cas dégénéré, où une coordonnée atteint son maximum avec probabilité >0.

...

1.– Généralités sur les fonctions de répartition:

Soit $Y = (Y(1),\dots,Y(p)) \in \mathbb{R}^p$ un vecteur aléatoire (v.a.) de fonction de répartition (fr) $G(y) = G(y_1,\dots,y_p) = P(Y(1) < y_1,\dots,Y(p) < y_p)$, et de fonctions de répartition marginales:

1) $$\forall\, 1 \leq i \leq p,\ G_i(y_i) = P(Y(i) < y_i) = G(+\infty,\dots,y_i,\dots,+\infty),\ \forall\, y_i \in [-\infty,+\infty]\ ;$$

Un point de continuité de G (pdc G) est $y \in [-\infty,+\infty]^p$, tel que $\lim\limits_{z \to y} G(z) = G(y)$;

Un point de continuité pour les lois marginales de G (pdclm G) est $y = (y_1,\dots,y_p) \in [-\infty,+\infty]^p$, tel que, $\forall\, 1 \leq i \leq p$, y_i soit point de continuité de G_i.

Une fonction de répartition (fr) d'une loi de probabilité est une fonction F, telle qu'existe un v.a. de fr G, tel que, $\forall\, y$ pdc G, $F(y) = G(y)$.

Plus généralement, si M est une mesure sur $\mathbb{R}^p$, la fonction de répartition de M, si elle existe, est définie en tout point de continuité par:

2) $$G(y_1,\dots,y_p) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_p} dM(s_1,\dots,s_p).$$

Nous utiliserons souvent, par la suite, les propriétés suivantes des fonctions de répartition:

– Si F est une fonction de répartition associée à une mesure bornée M sur $\mathbb{R}^p$:

3) $$F(y_1,\dots,-\infty,\dots,y_p) = 0\ ,\ \forall\, y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_p \in \mathbb{R}\,;$$

De plus, $+\infty$ et $-\infty$ sont points de continuité des fonctions de répartition marginales:

$$F_i(y_i) = F(+\infty,\dots,y_i,\dots,+\infty)\,;$$

Enfin,

4) $$F(+\infty,\dots,+\infty) = M(\mathbb{R}^p),\ \text{soit } 1,\ \text{dans le cas où M est une probabilité.}$$

– On a l'inégalité, dans le cas où F est la fr d'une mesure bornée positive sur $\mathbb{R}^p$:

5) $$\forall\, 1 \leq i \leq p,\ \forall\, y_i', y_i'' \in [-\infty,+\infty]\ ,$$
$$\left|F(y_1'',\dots,y_p'') - F(y_1',\dots,y_p')\right| \leq \sum_{i=1}^{p} F_i(\mathrm{Sup}(y_i',y_i'')+0)) - F_i(\mathrm{Inf}(y_i',y_i'')-0)\ ;$$

En effet, en se ramenant à la fr G d'un v.a. dans $\mathbb{R}^p$, on constate que:

$$\left|P(Y(1) < y_1'',\dots,Y(p) < y_p'') - P(Y(1) < y_1',\dots,Y(p) < y_p')\right| \leq \sum_{i=1}^{p} P(Y(i) \in [y_i', y_i''])\,;$$

pour montrer cette inégalité, ramenons nous au cas où $y_i' \leq y_i''$, $1 \leq i \leq k$, $y_i' \geq y_i''$, $\forall\, k+1 \leq i \leq p$; on se ramène alors à l'inégalité évidente (fig.1):

$$\forall\, A \subset A',\ B \subset B'\ ,\quad (A \cap B') \Delta (B \cap A') \subset (A' - A) \cup (B' - B).$$

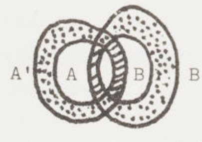


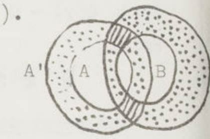
Figure 1 :

...

On se ramène ainsi à la majoration de $\left|P(Y(1) < y_1'',\ldots,Y(p) < y_p'') - P(Y(1) < y_1',\ldots,\right.$ $\left.Y(p) < y_p')\right|$, lorsque, $\forall 1 \leq i \leq p,\ y_i' \leq y_i''$. On conclut par l'inégalité évidente (fig.2):

$$\forall A \subset A',\ B \subset B',\quad (A' \cap B') - (A \cap B) \subset (A - A') \cup (B - B').$$

Figure 2:



— Tout pdclm G est pdc G ; en particulier, la continuité des fonctions de répartition marginales implique celle de la fonction de répartition ; Une fr est parfaitement déterminée sur l'ensemble de ses pdclm, égal à $\mathbb{R}^p$ moins un ensemble au plus dénombrable de points, (et donc partout dense dans $\mathbb{R}^p$).
(Ceci se déduit directement des propriétés usuelles des fr univariées, et de (1.5)).

— Pour que $F(y_1,\ldots,y_p)$ soit fonction de répartition d'une mesure bornée positive, il est nécessaire que (1.3) et (1.4) soient vérifiés, ainsi que F soit une fonction croissante au sens large de chaque coordonnée. Cette dernière condition n'est cependant pas encore suffisante; compte tenu de (1.3) et (1.4), une CNS est que (voir p. ex. Billingsley, [2], p.226), si on note:

$$\forall h_1,\ldots,h_p \in [-\infty,+\infty],\ \forall y_1,\ldots,y_p \in \mathbb{R},$$

$$\Delta_{i;h_i} F(y_1,\ldots,y_p) = F(y_1,\ldots,y_i+h_i,\ldots,y_p) - F(y_1,\ldots,y_p),$$

(1.6)
$$\Delta_{h_1,\ldots,h_p} F(y_1,\ldots,y_p) = F(y_1+h_1,\ldots,y_p+h_p) - \sum_{1\leq i\leq p} F(y_1+h_1,\ldots,y_i,\ldots,y_p+h_p) + \ldots$$
$$+(-1)^k \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq p\\ \text{distincts}}} F(\ldots,y_{i_1},\ldots,y_{i_k},\ldots) + \ldots + (-1)^p F(y_1,\ldots,y_p) = \Delta_{1;h_1}\circ\ldots\circ\Delta_{p;h_p} F,$$

(1.7)
$$\forall y_1,\ldots,y_p \in \mathbb{R},\ \forall h_1,\ldots,h_p > 0,\ \Delta_{h_1,\ldots,h_p} F(y_1,\ldots,y_p) \geq 0.$$

Il sera utile, par la suite, de faire usage des notations suivantes:

$$\forall y_1,\ldots,y_p \in \mathbb{R},\ \forall h_1,\ldots,h_p > 0,\ \forall e_1,\ldots,e_p = 0 \text{ ou } 1,$$

$F(y_1+e_1h_1,\ldots,y_p+e_ph_p) = \varphi(e_1,\ldots,e_p)$; on constate qu'on peut, si (1.3),(1.4),(1.6) sont vrais, écrire de manière unique:

(1.8)
$$\varphi(e_1,\ldots,e_p) = \varphi(0,\ldots,0) + \sum_{1\leq i\leq p} C_i e_i + \ldots + \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq p\\ \text{distincts}}} C_{i_1\ldots i_k} e_{i_1}\ldots e_{i_k}$$
$$+ \ldots + C_{1\ldots p} e_1 \ldots e_p,$$

où tous les $C_{i_1\ldots i_k}$ sont positifs; réciproquement, cette condition implique (1.7).

...

Remarquons que la condition (1.7) reste suffisante, si elle est vérifiée au voisinage de tout point $(y_1,..,y_p)$. Lorsque F est n fois continûment différentiable au voisinage de $(y_1,..,y_p)$, elle peut être remplacée par:

$$\forall\, 1\leq k\leq p,\quad \underset{\text{distincts}}{1\leq i_1,..,i_k\leq p},\quad \frac{\partial^k F(y_1,..,y_p)}{\partial y_{i_1}\ldots\partial y_{i_k}}\geq 0\ ; \tag{1.9}$$

Lorsque F est n fois continûment différentiable partout et vérifie (1.3), (1.9) est suffisante si elle est vraie seulement pour $k = p$.

Nous montrons maintenant quelques propriétés utiles des fonctions de répartition:

Lemme (1.1): Si F est fonction de répartition d'une loi de probabilité dans $\mathbb{R}^p$, et si $h_1,..,h_p$ sont p fonctions réelles à variable réelle, croissantes au sens large, et de limites $+\infty$ ou $-\infty$, si la variable tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $F(h_1(x_1),..,h_p(x_p))$ définit une fonction de répartition d'une loi de probabilité.-

Preuve: On vérifie directement que (1.3),(1.4),(1.7) sont vérifiés. En termes de v.a., $F(x_1,..,x_p)$ étant la fr de $(X(1),..,X(p))$, $F(h_1(x_1),..,h_p(x_p))$ est fr de $(h_1^{-1}(X(1)),..,h_p^{-1}(X(p)))$, où $h^{-1}(y) = \operatorname{Inf}\{t : h(t) > y\}$.-

Lemme (1.2): Le produit de deux fonctions de répartition de lois de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ est toujours une fonction de répartition.-

Preuve: Si F est fr de $(X(1),..,X(p))$, et G, fr de $(Z(1),..,Z(p))$, alors, si X et Z sont indépendants, FG est fr de $(\operatorname{Sup}(X(1),Z(1)),..,\operatorname{Sup}(X(p),Z(p)))$.-

Lemme (1.3): Si $H(u)$ est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $H(0) = 0$, et $H(1) = 1$, n fois continûment dérivable sur $[0,1]$, et telle que $H^{(k)}(u)\geq 0$, $\forall\, 1\leq k\leq p$, $\forall\, 0\leq u\leq 1$, alors, si F est la fr d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^p$, $H(F)$ possède aussi cette propriété. En particulier, F^r est une fr, si r est un nombre réel $\geq p-1$ (et aussi > 0).-

Preuve: Tout d'abord, il suffit, compte tenu des conditions aux limites, que

$$H\Big(\eta_0+\sum_{1\leq i\leq p}\eta_i x_i+..+\sum \eta_{i_1..i_k}x_{i_1}..x_{i_k}+..+\eta_{1..p}x_1..x_p\Big)$$

admette lorsque les $\eta_{i_1..i_k}$ sont positifs, et les x_i infiniment petits, un développement du type (1.8) à coefficients positifs. Or ceci s'obtient directement, en écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour H au voisinage de η_0, formule qui aura des coefficients positifs, les dérivées étant positives.

Dans le cas particulier où $H(u) = u^r$, la positivité des dérivées d'ordre $\leq p$ n'est réalisée que si r est entier ≥ 1, ou si r est réel > 0, et $\geq p-1$.-

...

<u>Exemple</u> (1.1): Sur $\mathbb{R}^2$, F définie par: $F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathrm{Inf}(x,1)+\mathrm{Inf}(y,1)) \\ \quad \text{si} \quad \mathrm{Inf}(x,y) > 0, \\ 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{Inf}(x,y) \leq 0, \end{cases}$

est la fr d'une probabilité uniformément distribuée sur les segments (0,0),(0,1) et (0,0),(1,0). Lorsque $0 < x,y < 1$, $F(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)$, et, si on considère $F^r(x,y)=(\frac{1}{2}(x+y))^r$, $2^r\frac{\partial^2 F^r(x,y)}{\partial x \partial y} = r(r-1)(x+y)^{r-2}$; on vérifie que si $r < 1$, F^r n'est pas une fonction de répartition, ne vérifiant pas (1.9).-

<u>Lemme</u> (1.4):(Inégalités de Frechet) Si $G(y_1,..,y_p)$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^p$, de fonctions de répartition marginales G_i, $1 \leq i \leq p$, alors G vérifie les inégalités:

(1.10)
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ y_i \in \mathbb{R},\quad G(y_1,..,y_p) \leq \mathrm{Inf}(G_1(y_1),..,G_p(y_p)) \ ;$$
$$\mathrm{Sup}(0,\ 1 - p + \sum_{i=1}^{p} G_i(x_i)) \leq G(y_1,..,y_p).-$$

<u>Preuve</u>: Voir Frechet,[6], ou Galambos,[7], th.5.1.1 p.245.-

2.- <u>Fonctions de dépendance et de liaison</u>:

Etant donné G, fonction de répartition d'une loi de probabilité dans $\mathbb{R}^p$, de fonctions de répartition marginales G_i, $1 \leq i \leq p$, on appelle <u>fonction de dépendance de G</u> (<u>fd G</u>), toute fonction satisfaisant à l'identité:

(2.1)
$$\forall y = (y_1,..,y_p) \text{ pdclm } G,\quad G(y_1,..,y_p) = D(G_1(y_1),..,G_p(y_p)).$$

Si on note I_i l'ensemble des points de continuité de G_i, et J_i son image par G_i, celà signifie que D est déterminée par (2.1) sur $\prod_{i=1}^{p} J_i$, et peut être prolongée arbitrairement à l'extérieur.

Considérons tout d'abord le cas où les G_i sont toutes continues; dans ce cas, D est définie sur $[0,1]^p$; on constate alors que D y définit la fonction de répartition d'une loi de probabilité de support $\subset [0,1]^p$, et de lois marginales uniformes sur $[0,1]$, c'est à dire:

(2.2)
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ \forall y_i \in [0,1] \ ,\ D_i(y_i) = D(1,..,y_i,..,1) = y_i \ .$$

En effet, on sait que si les G_i sont continues, et si $(Y(1),..,Y(p))$ est un v.a. de fr G, $\forall 1 \leq i \leq p$, $G_i(Y(i))$ est uniformément distribué sur $[0,1]$; de plus (lemme (1.1)), la fr de $(G_1(Y(1)),..,G_p(Y(p))$est une fonction D qui satisfait (2.1).

Considérons maintenant le cas général; sur $\prod_{i=1}^{p} J_i$, D vérifie par (2.1), les propriétés caractéristiques d'une fr (1.3),(1.7),(1.8), ainsi que (2.2); nous montrons:

Théorème (2.1): Pour toute fonction de répartition G, il existe une fonction de dépendance D, fonction de répartition d'une loi de probabilité dans $[0,1]^p$, de lois marginales uniformes sur $[0,1]$, telle que:

$$\forall 1 \leq i \leq p\ ,\quad u_i \in [0,1]\ ,\ D_i(u_i) = D(1,..,u_i,..,1) = u_i\ ;$$

(2.3)
$$(y_1,..,y_p) \text{ pdclm } G,\ G(y_1,..,y_p) = D(G_1(y_1),..,G_p(y_p)).-$$

Preuve: On ne perd aucune généralité à se ramener au cas du v.a. $(G_1(Y(1),..G_p(Y(p))$, et le problème est alors de montrer que si D possède toutes les propriétés d'une fr d'une loi de probabilité de lois marginales uniformes sur $[0,1]$, sur $\prod_{i=1}^{p} J_i$, on peut interpoler D en une fr d'une loi de probabilité de lois marginales uniformes, dans $[0,1]^p - \prod_{i=1}^{p} J_i$. Nous allons établir cette interpolation par récurrence.

Considérons $u_i \in [0,1]$; si u_i n'appartient pas à J_i, alors nécessairement, il existe $A_i \leq u_i \leq B_i$, avec $A_i < B_i$, et deux suites de pdc G_i, $y'_{i,n} \uparrow y_i$ et $y''_{i,n} \downarrow y_i$, telles que $G_i(y'_{i,n}) \nearrow G_i(y_i - 0) = A_i$, $G_i(y''_{i,n}) \searrow G_i(y_i + 0) = B_i$.

Etant donné un point de $[0,1]^p - \prod_{i=1}^{p} J_i$, nous appellerons ordre de ce point, le nombre de ses composantes qui ne sont pas pdc de la fr G_i correspondante.

On introduit alors la relation d'équivalence suivante entre deux points $(u_1,..,u_p),(v_1,..,v_p)$ de $[0,1]^p$:

$$\begin{aligned} u \sim v \iff \forall 1 \leq i \leq p,\quad & \operatorname{Sup}\,(G_i(y_i)\ ;\ G_i(y_i) \leq u_i,\ y_i \text{ pdc } G_i) \\ &= \operatorname{Sup}\,(G_i(y_i)\ ;\ G_i(y_i) \leq v_i,\ y_i \text{ pdc } G_i)\ ,\ \text{et} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Inf}\,(G_i(y_i);\ G_i(y_i) \geq u_i,\ y_i \text{ pdc } G_i) = \operatorname{Inf}\,(G_i(y_i);\ G_i(y_i) \geq v_i, y_i \text{ pdc } G_i);$$

Deux points d'une même classe d'équivalence ont même ordre; de plus, $[0,1]^p - \prod_{j=1}^{p} J_i$ est réunion disjointe des classes d'ordre 1,2,..,p.

Considérons tout d'abord une classe d'ordre 1; on se ramène au cas où cette classe est de la forme $[A,B]\{u_2\}..\{u_p\}$, $u_i \in J_i$ pour $i \geq 2$; dans ce cas, la $f^{\underline{on}}$ D devant être continue par (1.5) et (2.2), on doit nécessairement imposer $D(A,u_2,..,u_p) = \lim\limits_{y'_n \uparrow y} D(G_1(y'_n),u_2,..,u_p)$, et de même pour $D(B,u_2,..,u_p)$, avec une suite $y''_n \downarrow y$ de pdc G_1. On interpole alors linéairement D par:

$$D(v,u_2,..,u_p) = D(A,u_2,..,u_p) + \frac{(v-A)}{(B-A)}\,(D(B,u_2,..,u_p) - D(A,u_2,..,u_p))\ .$$

On vérifie que cette interpolation prolonge D dans la réunion des classes d'ordre ≤ 1. De plus, sur cet ensemble, D vérifie encore les propriétés des fr (1.3),(1.4),(1.7). La démonstration de (1.7) se fait en considérant dans (1.6), tout d'abord le cas où y_1 et y_1+h_1 appartiennent au même intervalle de discontinuité de G_1 , soit $[A,B]$, on montre alors que $\Delta_{h_1,..,h_p} D(y_1,..,y_p)$ est proportionnel à $\Delta_{B-A,h_2,..,h_p} D(A,y_2,..,y_p)$; on utilise après le fait qu'il suffit de vérifier (1.8) localement.

On raisonne après pour les classes d'ordre 2 ; on se ramène au cas où une telle classe est de la forme $(A,B).(C,D).\ u_3,..,u_p$; considérons successivement les faces $D(A,\ v_2\ ,\ u_3,..,u_p)$, $C \leq v_2 \leq D$; $D(B,\ v_2\ ,\ ..\ )$; $D(v_1\ ,\ C\ ,\ ..\ )$, $A \leq v_1 \leq B$; $D(v_1\ ,\ D\ ,\ ..\ )$; le fait d'avoir déterminé D sur les classes d'ordre 1 impose nécessairement les valeurs de D sur ces faces. On vérifie que D est alors linéaire en v_1 , v_2 , sur chaque face, et vérifie, par passage à la limite (1.8) sur ces faces.

Par transformation de (A,B) et (C,D), en $[0,1]$, on se ramène au problème de l'interpolation d'une fonction $f(v_1,v_2)$, définie et linéaire aux bord du carré $[0,1]^2$, à l'intérieur du carré.

Or, par (1.8), $f(v_1,v_2)$ peut être interpolée sous la forme:

$f(v_1,v_2) = a + bv_1 + cv_2 + dv_1v_2$, où respectivement:

$a = f(0,0) \geq 0$; $b = f(1,0) - f(0,0) \geq 0$; $c = f(0,1) - f(0,0) \geq 0$;
$d = f(1,1) - f(1,0) - f(0,1) + f(0,0) \geq 0.$

On interpole ainsi D sur la réunion des classes d'ordre ≤ 2 ; sur ces classes, D vérifie de même que précédemment (1.3),(1.4),(1.7); la démonstration de ce dernier point se ramenant alors à montrer que $a + bv_1 + cv_2 + dv_1v_2$, avec $a,b,c,d \geq 0$, définit une fr de mesure positive, ce qui est le cas par (1.8).

Considérons maintenant la récurrence, en admettant qu'on puisse prolonger D sur l'ensemble des classes d'ordre $k-1$; on prolonge alors D par une interpolation du même type que précédemment, en se ramenant à une fonction $f(v_1,...,v_k)$, sur $[0,1]^k$, telle que $f(v_1,..,1,..,v_k)$ et $f(v_1,..,0,..,v_k)$ soient connus et de la forme:

$\sum a_i v_i + \sum a_{ij} v_i v_j + ..$; on montre aisément que tous les coefficients précédents sont uniquement déterminés par la connaissance de f sur les sommets et par (1.8), qu'on peut prolonger f de manière unique par:

$f(v_1,..,v_k) = e + h_i v_i + .. + g\ v_1..v_k$, avec des coefficients tous positifs par l'hypothèse de récurrence. On obtient ainsi un prolongement compatible à l'ordre k.

Enfin, ayant prolongé D sur $[0,1]^p$, on constate que l'interpolation est linéaire pour les marges, ce qui fait que les fr marginales de D sont nécessairement de la forme (2.3), d'où le résultat.–

...

Exemple (2.1): Considérons la fonction de répartition F, introduite dans l'exemple (1.1), et définie, si $0 \leqslant x,y \leqslant 1$, par:

$F(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$; ses fr marginales sont :

$F_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $F_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;

Sa fonction de dépendance est définie sur

$\prod_{i=1}^{2} J_i = \left[\{0\} \cup \left]\frac{1}{2},1\right]\right]^2$ par $D(u,v) = u+v-1$;

Le prolongement du théorème (2.1) prolonge D sur $[0,1]^2$ par:

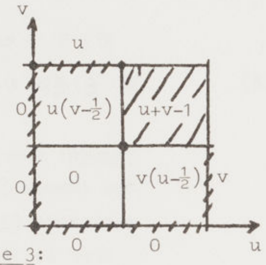


Figure 3:

$$D(u,v) = u(v-\tfrac{1}{2}) \text{ , si } \begin{array}{l} 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 1 \end{array} \text{ , et } v(u-\tfrac{1}{2}) \text{ , si } \begin{array}{l} 0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1 \end{array} \text{ , } 0 \text{ , si } \begin{array}{l} u \leqslant \frac{1}{2} \\ v \leqslant \frac{1}{2}. \end{array}$$

Remarques (2.1): 1°) Pour une fonction de répartition non continue, il existe plusieurs fonctions de dépendance possibles; par exemple, pour une distribution concentrée en un point, toutes les fonctions de dépendance sont acceptables.

2°) Le théorème (2.1) permet d'affirmer que tout v.a. dans $\mathbb{R}^p$ peut être obtenu à partir d'une transformation fonctionnelle sur chaque coordonnée à partir d'un v.a. suivant une distribution de lois marginales uniformes sur $[0,1]$. Ce résultat généralise le cas univarié, ou on sait que toute v.a., même discrète, peut être considérée comme une fonction d'une v.a. uniformément distribuée sur $[0,1]$ (voir par exemple, [3], p;707).

Nous énonçons maintenant quelques propriétés essentielles des fonctions de dépendance; nous supposerons dans toute la suite qu'une fonction de dépendance est toujours une fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $[0,1]^p$, de lois marginales uniformes sur $[0,1]$.

Théorème (2.2): 1°) Si D_1, D_2 sont deux fonctions de dépendance, alors:

(4) - $\forall\, 0 \leqslant q \leqslant 1$, $qD_1 + (1-q)D_2$ est une fonction de dépendance ;

- Si D_1^q et D_2^{1-q} sont des fonctions de répartition de lois de probabilité, alors:

([illegible]) $D_1^q\, D_2^{1-q}$ est une fonction de dépendance.

2°) Si r est ou bien un nombre entier $\geqslant 1$, ou bien un réel $\geqslant p-1$, ou bien tel que D^r soit la fonction de répartition d'une loi de probabilité, alors:

([illegible]) $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant u_i \leqslant 1$, $D_r(u_1,\ldots,u_p) = D^r(u_1^{1/r},\ldots,u_p^{1/r})$ est une fonction de dépendance.

3°) Toute fonction de dépendance vérifie les inégalités:

...

(2.7) $$\forall\, 1 \leq i \leq p,\ 0 \leq u_i \leq 1,\quad \operatorname{Sup}\left(0\ ,\ 1 - p + \sum_{i=1}^{p} u_i\right) \leq D(u_1,..,u_p) \leq \operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p} u_i\ .$$

4°) Si D est une fonction de dépendance,

(2.8) $$\forall\, 1 \leq i \leq p,\ 0 \leq u_i', u_i'' \leq 1,\quad \left| D(u_1',..,u_p') - D(u_1'',..,u_p'') \right| \leq \sum_{i=1}^{p} \left| u_i' - u_i'' \right|\ .$$

Preuve: Pour le 1° et le 2°, ce sont des applications directes de (1.2), et des lemmes (1.1),(1.2),(1.3); il suffit de montrer que les fr obtenues satisfont (2.2) pour obtenir le résultat.

Pour le 3° et le 4°, on applique (1.5) et le lemme (1.4).–

Nous étudions maintenant les propriétés topologiques de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions de dépendance:

Théorème (2.3): Sur l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions de dépendance, les topologies suivantes sont équivalentes:

– Topologie faible des mesures de probabilité ;

– Topologie de la convergence simple ;

– Topologie de la convergence uniforme sur $[0,1]^p$;

Pour la topologie commune précédente, $\mathcal{D}$ est un espace métrisable compact. Cet espace est également une partie convexe de l'espace des fonctions de répartition des mesures bornées sur $[0,1]^p$, pour sa structure naturelle d'espace vectoriel.–

Preuve: On sait que l'espace des fr de lois de probabilité sur $[0,1]^p$ est en bijection avec les mesures de probabilité qui leur sont associées. Or l'espace des probabilités sur le métrique compact $[0,1]^p$ est un espace métrisable compact (voir p. ex. Parthasarathy,[13], p.45, th. 6.4)(on pourra prendre par ex. la métrique de Prokhorov (voir p.ex. Billingsley, [2], p.237)). Or la topologie de la convergence faible des mesures est équivalente à la topologie de la convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité. Comme les fd. sont continues, cette topologie est équivalente à celle de la convergence simple sur $\mathcal{D}$, et les conditions aux limites (2.2) sont stables. Par conséquent, $\mathcal{D}$ est une partie compacte de l'ensemble des fr. Elle est convexe par (2,4).

Il reste à montrer que la convergence simple sur $\mathcal{D}$ implique la convergence uniforme; notons que cette propriété n'est pas vraie en général pour des fonctions monotones quelconques des coordonnées. Supposons que D_n, $n\uparrow\infty$, converge simplement vers $D\in\mathcal{D}$. Construisons maintenant dans $[0,1]^p$ un treillis composé de tous les points de composantes $(k_1/N,..,k_p/N)$, $1\leq i\leq p$ $0\leq k_i \leq N$. Choisissons N entier, pour $\varepsilon>0$ fixé, tel que $p/N \leq \frac{1}{4}\varepsilon$;

Pour n assez grand, pour tout point $u_T = (k_1/N,..,k_p/N)$ du treillis, $\left| D_n(u_T) - D(u_T)\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, ces points étant en nombre fini, $(N+1)^p$, fixé.

Ainsi, si $u \in [0,1]^p$ est quelconque, comme il existe toujours un point u_T du treillis, tel que la différence de chacune de ses coordonnées avec les coordonnées correspondantes de u n'excède pas 1/N, on a:

$$|D_n(u) - D(u)| \leq |D_n(u) - D_n(u_T)| + |D_n(u_T) - D(u_T)| + |D(u_T) - D(u)|$$

$$\leq p/N + \tfrac{1}{2}\varepsilon + p/N .$$ D'où le résultat.–

<u>Remarques</u> (2.2): 1°) Par le théorème de Choquet (voir p. ex. Alfsen, [1], p.36, Cor. 1.4.9) toute fonction de dépendance est barycentre des éléments extrémaux de l'ensemble convexe compact des fonctions de dépendance, par une mesure de pondération positive normalisée.

2°) La caractérisation des éléments extrémaux précédents est délicate. On peut obtenir les résultats suivants:

<u>Lemme</u> (2.1): La fonction $D_{Max}(u_1,..,u_p) = \mathrm{Inf}(u_1,..,u_p)$ qui majore, par (2.7), toute fonction de dépendance, est une fonction de dépendance.

La fonction $D_{Min}(u_1,..,u_p) = \mathrm{Sup}(0,\ 1-p+\sum_{i=1}^{p} u_i)$, qui minore par (2.7) toute fonction de dépendance, est une fonction de dépendance pour p = 1 ou 2, mais cesse de l'être pour $p \geq 3$. Elle possède la propriété d'être telle que:

$$D_{Min}^{p-1}(u_1^{1/(p-1)},..,u_p^{1/(p-1)})$$ est une fonction de dépendance.

En général, pour $p \geq 3$, il n'existe pas de fonction de dépendance minorant toutes les autres fonctions de dépendance.–

<u>Preuve</u>: Tout d'abord, D_{Max} est fr de la v.a. (U ,..,U), dont toutes les composantes sont égales à une v.a. uniforme sur $[0,1]$.

Considérons maintenant une v.a. uniformément distribuée sur l'ensemble des points $(u_1,..,u_p)$ de $\mathbb{R}^p$, tels que $\forall 1 \leq i \leq p,\ u_i \in [0,1]$, et $\sum_{i=1}^{p} u_i = p-1$; on vérifie que la fr de cette v.a. est, pour $\forall\ 1 \leq i \leq p,\ u_i \in [0,1]$, $\mathrm{Sup}(0\ ,\ 1-p+\sum_{i=1}^{p} u_i)^{p-1}$; la fonction de dépendance associée est alors $\mathrm{Sup}(0\ ,\ 1-p+\sum_{i=1}^{p} u_i^{1/(p-1)})^{p-1}$, d'où le résultat. La non existence, pour $p \geq 3$, d'une fd minorante, s'obtient, d'une part, en constatant que, si elle existe, cette fd ne peut être que D_{Min}, car autrement, on aurait une inégalité stricte $D_{Min}(u_1^{1/(p-1)},..,u_p^{1/(p-1)})^{p-1} < D(u_1^{1/p-1},..,u_p^{1/p-1})^{p-1}$, contredisant la minimalité de D ; d'autre part, pour $p \geq 3$, D_{Min} n'est pas une fr, ce qui peut se prouver en constatant que si c'était le cas, D_{Min} serait la fr d'une v.a. telle que celle qui a été précédemment utilisée.–

<u>Lemme</u> (2.2): Pour qu'une fonction de dépendance D_f appartienne à la frontière du convexe $\mathcal{D}$, ensemble des fonctions de dépendance, il faut et il suffit qu'existe une fonction de dépendance D, telle que, $\forall \alpha > 0$, $(1+\alpha)D_f - \alpha D$ ne soit pas une mesure positive sur $[0,1]^p$.–

<u>Preuve</u>: $(1+\alpha)D_f - \alpha D$ est une fd, si c'est une mesure positive.–

...

Lemme (2.3): Si D est une fonction de dépendance de mesure associée dD, et si le support de dD n'est pas $[0,1]^p$, alors D appartient à la frontière de $\mathcal{D}$.-

Preuve: On applique ici le lemme (2.2), en prenant pour D la fr de la loi uniforme sur $[0,1]^p$.-

Lemme (2.4): Si $D \in \mathcal{D}$, et si dD est absolûment continue relativement à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^p$, alors D appartient à la frontière du convexe $\mathcal{D}$.-

Preuve: On considère ici $(1+\alpha)D - \alpha D'$, où $D' = D_{Max}$.-

Ces résultats permettent de déterminer partiellement la frontière du convexe; à l'intérieur de cette frontière, les points extrémaux du convexe sont tels qu'ils ne peuvent pas être les barycentres à coefficients positifs d'autres points qu'eux même. On peut vérifier, par (2, 7) et le lemme (2.1), que les points D_{Max}, et $D_{Min}, p \leq 2$, possèdent cette propriété; le problème de la détermination exhaustive des autres points extrémaux n'est pas résolu; sa solution permettrait d'expliciter complètement la structure des lois multivariées.-

Nous introduisons maintenant la notion de fonction de liaison, dont l'usage sera très commode pour l'étude des lois limites extrêmes:

Définition (2.1): Etant donné une fonction de dépendance D, on appelle fonction de liaison de D (fl D), la fonction $L(z_1,..,z_p)$ définie dans $[0,+\infty]^p$, et à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$, par l'une des identités équivalentes suivantes:

(2.9)
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ y_i \in]0,1] \ , \quad D(y_1,\dots,y_p) = y_1..y_p \exp(-L(-\mathrm{Log}\, y_1,\dots,-\mathrm{Log}\, y_p$$
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[, \quad L(z_1,\dots,z_p) = -\sum_{i=1}^{p} z_i - \mathrm{Log}(D(e^{-z_1},\dots,e^{-z_p}))$$

On posera, le cas échéant dans les relations précédentes, $\mathrm{Log}\ 0 = -\infty$, et $\exp(-\infty) = 0$.-

On remarquera que (2.9) permet toujours d'attribuer une valeur limite de $+\infty$ à $\sum_{i=1}^{p} z_i + L(z_1,\dots,z_p)$ lorsque l'un des $z_i \to +\infty$; les propriétés principales des fonction de liaison se déduisent des propriétés correspondantes des fonctions de dépendance (théorèmes (2.2) et (2.3)); nous énonçons:

Corollaire (2.1): Une fonction de dépendance est déterminée de manière unique par sa fonction de liaison, et réciproquement; une fonction de liaison L est telle que:

(2.10) 1°) $\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \geq 0$, $L(z_1,\dots,z_p) + \sum_{i=1}^{p} z_i$ est une fonction croissante au sens large de chaque variable, de limite $+\infty$, si l'une au moins des variables tend vers $+\infty$, et continue à valeurs dans $[0,+\infty]$.

(2.11) 2°) $\forall 1 \leq i \leq p,\ L(0,\dots,z_i,\dots,0) = 0$.

(2.12) 3°) $\forall$ L_1, L_2 fonctions de liaison, $\forall\ 0 \leq q \leq 1$, $-\mathrm{Log}(q \exp(-L_1(-\mathrm{Log}\, y_1,\dots -\mathrm{Log}\, y_p) + (1-q) \exp(-L_2(-\mathrm{Log}\, y_1,\dots,-\mathrm{Log}\, y_p))$ est une fonction de liaison.

...

4°) $\forall L$ fonction de liaison, si r est un nombre entier $\geqslant 1$, ou un nombre réel $\geqslant p-1$, alors:

(2.13) $$L_r(z_1,..,z_p) = r\ L(z_1/r\ ,\ ..\ ,\ z_p/r) \text{ définit pour } z_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant p,$$

une fonction de liaison ;

5°) $\forall L_1, L_2$ fonctions de liaison, $\forall\ 0 \leqslant q \leqslant 1$, si $qL_1(z_1/q\ ,..,z_p/q)$, et $(1-q)L_2(z_1/(1-q),..,z_p/(1-q))$ sont des fonctions de liaison, ou si $q=0$ ou 1, avec la convention $0.L = 0$, même pour $L = \infty$, alors:

(2.14) $$qL_1(z_1,..,z_p) + (1-q)L_2(z_1,..,z_p) \text{ est une fonction de liaison.}$$

6°) $\forall L$ fonction de liaison, L vérifie les inégalités, $z_i \geqslant 0$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant p$,

(2.15) $$\sup_{1 \leqslant i \leqslant p} z_i - \sum_{i=1}^{p} z_i \leqslant L(z_1,..,z_p) \leqslant -\sum_{i=1}^{p} z_i - \text{Log Sup}(0\ ,\ 1-p+\sum_{i=1}^{p} e^{-z_i}).-$$

<u>Preuve</u>: (2.10) s'obtient en constatant que $-\text{Log } u$ est décroissante, que $D(e^{-z_1},..,e^{-z_p})$; la limite est due à (1.3).

(2.11) s'obtient par (2.2). (2.12) est la transcription de (2.4); (2.13) celle de (2.6); (2.14) celle de (2.5); (2.15), celle des inégalités de Frechet (2.7).-

Nous énonçons maintenant le corollaire suivant du théorème (2.3):

<u>Corollaire</u> (2.2): La topologie de la convergence simple sur l'espace $\mathcal{L}$ des fonctions de liaison est équivalente (par la bijection $L \leftrightarrow D$) à la topologie (définie par le théorème (2.3)) sur $\mathcal{D}$. Pour cette topologie, $\mathcal{L}$ est un espace métrisable compact; La condition nécessaire et suffisante pour que la suite de fonctions de dépendance D_n converge vers une limite D, est que, $\forall z_i \in [0,+\infty[$, $1 \leqslant i \leqslant p$, L_n étant la fonction de liaison de D_n , $L_n(z_1,..,z_p)$ ait une limite (dans $]-\infty,+\infty]$) $L(z_1,..,z_p)$. Dans ce cas, $L(z_1,..,z_p)$ définit la fonction de liaison de la limite D de D_n .-

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède au cas des distributions extrêmes.-

3°) <u>Comportement asymptotique des fonctions de dépendance et de liaison des extrêmes</u>:

On considère dans ce qui suit une fonction de dépendance D sur $\mathbb{R}^p$, fonction de répartition du v.a. $(U(1),..,U(p))$. On pose:

(3.1) $$\forall 1 \leqslant i \leqslant p,\ 0 \leqslant u_i \leqslant 1\ ,\ \forall n \geqslant 1\ ,\ D_n(u_1,..,u_p) = D^n(u_1^{1/n},..,u_p^{1/n});$$

On sait, par (2.6), que D_n est une fonction de dépendance; plus précisément:

...

<u>Lemme</u> (3.1): Si $\{(X_n(1),\dots,X_n(p)),\ n\geq 1\}$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi, admettant D comme fonction de dépendance, alors D_n définie par (3.1) est fonction de dépendance de:

(3.2) $$\left\{ \sup_{1\leq r\leq n} X_r(1),\dots, \sup_{1\leq r\leq n} X_r(p)\right\} \ .-$$

<u>Preuve</u>: Si F est la fr du v.a., la fr de (3.2) est F^n , admettant comme fr marginales F_i^n , $1\leq i\leq p$, où F_i, $1\leq i\leq p$ sont les fr marginales de F ; le résultat découle alors de l'identité:

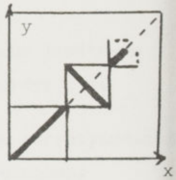
$$D^n((F_1^n)^{1/n},\dots,(F_p^n)^{1/n}) = D^n(F_1,\dots,F_p) = F^n \ .-$$

Nous étudions maintenant le problème de la convergence de D_n vers une limite, dans $\mathcal{D}$, lorsque $n\to+\infty$; le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette convergence ait lieu:

<u>Théorème</u> (3.1): Pour une fonction de dépendance D donnée, pour que D_n définie par $D_n(u_1,\dots,u_p) = D^n(u_1^{1/n},\dots,u_p^{1/n})$ converge vers une fonction de dépendance limite D_∞ , lorsque $n\to+\infty$, il faut et il suffit qu'existe une suite croissante d'indices $\{n_k, k\geq 1\}$, telle que $\{(n_{k+1}/n_k), k\geq 1\}$ soit bornée, et telle que $D_{n_k}(u_1,\dots,u_p)$ ait une limite pour tout $(u_1,\dots,u_p)$, $0\leq u_i\leq 1$, $1\leq i\leq p$.-

<u>Remarques</u> (3.1): 1°) Il est nécessaire d'imposer des conditions restrictives sur D pour que D_n ait une limite dans $\mathcal{D}$. Donnons le contrexemple suivant, d'une fonction de dépendance telle que D_n n'ait pas de limite:

<u>Exemple</u> (3.1): On considère la distribution suivante (voir fig. 4) sur $[0,1]^2$: étant donnée une suite croissant vers 1, $\{a_n, n\geq 1\}$, la distribution est uniforme sur le segment $\{y=x, a_{2n}\leq x\leq a_{2n+1}\}$, et uniforme sur le segment $\{y+x=a_{2n+1}+a_{2n+2}, a_{2n+1}\leq x\leq a_{2n+2}\}$; On pose $a_0 = 0$. Dans ce cas, la fonction de dépendance associée est:



<u>Figure 4</u>

$$D(x,y) = a_{2n}+ \mathrm{Inf}(x-a_{2n}, y-a_{2n}) \ , \ a_{2n}\leq x\leq a_{2n+1};\ a_{2n}\leq y\leq 1;$$

$$D(x,y) = a_{2n+2}+\mathrm{Sup}(0, x+y-(a_{2n+1}+a_{2n+2})),\ a_{2n+1}\leq x,y\leq a_{2n+2} \ ;$$

a) Supposons maintenant que n soit choisi de manière que:

$$a_{2n}^N\leq \frac{\varepsilon}{N},\quad a_{2n+1}^N\geq 1-\frac{\varepsilon}{N} \ ; \text{ fixons par ailleurs } \ x,y\in\left[\frac{\varepsilon}{N}, 1-\frac{\varepsilon}{N}\right];$$

On vérifie que $D^N(x^{1/N}, y^{1/N}) = (\mathrm{Inf}(x^{1/N}, y^{1/N}) - a_{2n})^N = \mathrm{Inf}(x,y)(1+c)$ où $c = \varepsilon\, o(1)$.

...

On en déduit que, pour a_{2n} fixé, on peut toujours choisir N assez grand, et a_{2n+1}, $a_{2n} < a_{2n+1} < 1$, tels que $D_N(x,y)$ soit arbitrairement proche de $\mathrm{Inf}(x,y)$;

b) On suppose pareillement que $a_{2n+1}^N \leq \frac{\varepsilon}{N}$ et $a_{2n+2}^N \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N}$; on fixe $x,y \in \left[\frac{\varepsilon}{N}, 1 - \frac{\varepsilon}{N}\right]$; dans ce cas, pour N assez grand, on vérifie pareillement que $D_N(x,y)$ est arbitrairement proche de xy ;

c) Pour réaliser ceci, il faut que la suite a_n soit telle qu'existe une suite $N_n \to +\infty$, telle que $N_n a_n^{N_n} \to 0$, et $N_n(1 - a_{n+1}^{N_n}) \to 1$;

Une telle suite peut être construite par récurrence, en choisissant successivement $a_n, a_{n+1}, \ldots$;

La suite N_n sera alors telle que $N_{n+1}/N_n \to +\infty$.–

2°) L'espace $\mathcal{D}$ étant métrisable et compact, il est complet ; toute suite dans $\mathcal{D}$ possède une valeur d'adhérence, et en particulier, D_n possède un ensemble de valeurs d'adhérence , non nécessairement réduit à un seul point, dans $\mathcal{D}$.

Preuve du Th. (3.1): La condition est, de toute évidence nécessaire; montrons qu'elle est suffisante; pour celà, supposons que D_{n_k} converge vers une limite D' dans $\mathcal{D}$, et supposons qu'une autre sous-suite D_{m_q} converge vers D" ; comme, par compacité, toute sous-suite possède une valeur d'adhérence dans $\mathcal{D}$, nous aurons montré le théorème si nous prouvons que D' = D". Pour celà, nous utilisons le lemme de base suivant:

Lemme (3.2): Si D est limite dans $\mathcal{D}$ d'une suite $\{D_n, n \geq 1\}$ de fonctions de dépendance, alors D vérifie l'identité:

(3.3) $$\forall r \text{ réel} > 0, \forall u_1,\ldots,u_p \in [0,1] \;,\; D^r(u_1^{1/r},\ldots,u_p^{1/r}) = D(u_1,\ldots,u_p).-$$

Preuve: (Voir p. ex. Galambos,[7], p.251-259) On écrit:

$$D(u_1,\ldots,u_p) = \lim_{n\infty} D^n(u_1^{1/n},\ldots,u_p^{1/n}) = \lim_{m\infty} D^{mq.p/q}(u_1^{q/p.mq},\ldots,u_p^{q/p.mq})$$

$$= D^{p/q}(u_1^{q/p},\ldots,u_p^{q/p}),\ \forall p,q \geq 1$$; on utilise alors la continuité de D pour passer à la limite: $(p/q) \to r$.–

Preuve du th. (3.1)(Suite): $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \;;\; k \geq k_0 \implies$

...

$$\forall u_1,\dots,u_p \in [0,1] \ , \ \left| D^{n_k}(u_1^{1/n_k},\dots,u_p^{1/n_k}) - D'(u_1,\dots,u_p)\right| < \varepsilon \ ;$$

Ceci implique que, $\forall q \geqslant 1$:

$$\left| D^{n_k}(u_1^{(n_k/m_q)/n_k},\dots,u_p^{(n_k/m_q)/n_k}) - D'(u_1^{(n_k/m_q)},\dots,u_p^{(n_k/m_q)})\right| < \varepsilon \ ,$$

et, par le lemme (3.2):

$$\left| D^{n_k}(u_1^{1/m_q},\dots,u_p^{1/m_q}) - D'^{\,n_k/m_q}(u_1,\dots,u_p)\right| < \varepsilon \ ;$$

On sait, d'autre part, que, $\forall r \geqslant 1, \forall\ 0 \leqslant a,b \leqslant A < 1,\ |a^r-b^r| \leqslant rA^{r-1}|a-b|$;

Posons ici $r = m_q/n_k$, qu'on suppose choisi tel que $m_q/n_k \geqslant 1$; supposons de plus que $(u_1,\dots,u_p)$ soit tel que $\left| D'^{\,n_k/m_q}(u_1,\dots,u_p)\right| \leqslant A-\varepsilon \leqslant A < 1$;

on a alors:

$$\left| D^{m_q}(u_1^{1/m_q},\dots,u_p^{1/m_q}) - D'(u_1,\dots,u_p)\right| \leqslant \varepsilon (m_q/n_k)\, A^{(m_q/n_k)-1} \ ;$$

Pour A fixé, $\sup_{r \geqslant 1} rA^{r-1} < \infty$; d'autre part, $\exists\, q_0 \ ; \forall q \geqslant q_0$,

$$\left| D^{m_q}(u_1^{1/m_q},\dots,u_p^{1/m_q}) - D''(u_1,\dots,u_p)\right| < \varepsilon \ ;$$

On en déduit que:

$$\forall k \geqslant k_0, \forall q \geqslant q_0 \ , \ \forall (u_1,\dots,u_p) \ , \ D'(u_1,\dots,u_p) < (A-\varepsilon)^{m_q/n_k} \ ,$$

$$\forall\, m_q/n_k \geqslant 1 \ , \ \left|D'(u_1,\dots,u_p) - D''(u_1,\dots,u_p)\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon(m_q/n_k)A^{(m_q/n_k)-1} \ ;$$

Utilisons maintenant l'hypothèse que n_{k+1}/n_k est borné; pour tout $q \geqslant q_0$ assez grand, il est possible de choisir $k \geqslant k_0$ tel que $n_k \leqslant m_q < n_{k+1}$; alors $m_q/n_k \leqslant n_{k+1}/n_k \leqslant C$; Ainsi, $\forall\, (u_1,\dots,u_p)$, tel que $D'(u_1,\dots,u_p) < 1, \forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{4}(1-D'^{1/C}(u_1,\dots,u_p))$, $\left|D'(u_1,\dots,u_p) - D''(u_1,\dots,u_p)\right| \leqslant \varepsilon(1 + C)$, en prenant, par exemple, $A = 1 - \frac{1}{2}(1-D'^{1/C}(u_1,\dots,u_p))$; on en déduit l'identité de D' et D".–

<u>Remarques</u>: 1°) Le raisonnement précédent n'est pas applicable lorsque n_{k+1}/n_k n'est pas borné; on peut conjecturer que le théorème (3.1) fournit la condition nécessaire et suffisante la plus générale portant sur l'ordre de croissance des sous-suites.

2°) L'étude de la convergence de D_n se ramène, par exemple, à celle de

...

$\{D_{k^n}\}$, où k est un entier quelconque. Dans le cas où il existe deux valeurs d'adhérence distinctes D' et D" de $\{D_n, n \geqslant 1\}$, nous avons montré le résultat suivant:

Proposition (3.1): Si $D_{n_k} \to D'$, et $D_{m_q} \to D''$, si $D' \neq D''$, alors:

(3.4) $$\liminf_{k,q\ \infty} |\operatorname{Log} n_k - \operatorname{Log} m_q| = +\infty \quad .-$$

Preuve: Si ce n'était pas le cas, on pourrait toujours choisir k et q assez grands, tels que $1 \leqslant m_q/n_k \leqslant C$, ou $1 \leqslant n_k/m_q \leqslant C$, C étant une constante fixée. La démonstration du théorème (3.1) montre alors que D' = D".–

Corollaire (3.1): L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{D_n, n \geqslant 1\}$ est ou bien infini, ou bien réduit à un seul point.–

Preuve: Soient D' et D" distinctes et valeurs d'adhérence de $\{D_n, n \geqslant 1\}$; Soit d une distance sur $\mathcal{D}$, définissant la topologie sur $\mathcal{D}$; supposons que D' et D" soient les seules valeurs d'adhérence de $\{D_n, n \geqslant 1\}$; ceci équivaut au fait que, $\forall n \geqslant 1$, les ensembles I''_n et I'_n suivants sont finis:

$$I'_n = \{r \ ;\ d(D_r, D') \in [(\tfrac{1}{2})^{n-1}, (\tfrac{1}{2})^n[\}, \quad I''_n = \{r \ ;\ d(D_r, D'') \in [(\tfrac{1}{2})^{n-1}, (\tfrac{1}{2})^n[\}.$$

Dans ce cas, en classant par ordre croissant $I' = \bigcup_{n \geqslant N} I'_n$ et $I'' = \bigcup_{n \geqslant N} I''_n$, N étant choisi tel que $d(D', D'') \geqslant (\frac{1}{2})^{N-2}$, on obtient deux ensembles d'indices disjoints, donnant deux sous-suites $\{n_k, k \geqslant 1\}$ et $\{m_q, q \geqslant 1\}$, dont la réunion est $\mathbb{N}$ moins un ensemble fini, et telles que $D_{n_k} \to D'$ et $D_{m_q} \to D''$; or ceci est impossible si (3.4) est vrai. Le raisonnement est analogue pour p valeurs d'adhérence.–

Corollaire (3.2): L' ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{D_n, n \geqslant 1\}$ est toujours une partie connexe de $\mathcal{D}$.–

Preuve: Tout d'abord, montrons que cet ensemble ne contient pas de point isolé; un tel point, D', est tel que, $\exists N,\ n \geqslant N \Rightarrow I'_n = \{r;\ d(D_r, D') \in [(\frac{1}{2})^{n-1}, (\frac{1}{2})^n[\}$ est fini. Or ceci est impossible si (3.4) est vrai. D'autre part, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{D_n, n \geqslant 1\}$ est compact; si cet ensemble est partagé en deux fermés disjoints, celà veut dire que ces fermés F' et F" sont tels que:

...

$d(F',F'') = \inf\limits_{D'\in F', D''\in F''} d(D',D'') = a > 0$; Le même raisonnement que précédemment permet de dire qu'il existe N, tel que: $n \geq N \Rightarrow d(D_n,F') \leq \frac{1}{4}a$, ou $d(D_n,F'') \leq \frac{1}{4}a$; si ce n'était pas le cas, il existerait une sous-suite D_{n_k} ne convergent pas vers une limite dans F' ou F'' ; Si F' et F'' sont non vides, on peut alors classer par ordre croissant ces deux ensembles d'indices, et constater qu'on peut toujours en extraire deux sous-suites n_k telle que $d(D_{n_k},F') \leq \frac{1}{4}a$, et n_k+1, avec $d(D_{n_k+1},F'') \leq \frac{1}{4}a$; on peut alors extraire de ces deux sous-suites: $D_{n_{k_q}} \to D' \in F'$ et $D_{n_{k_q}+1} \to D'' \in F''$, avec $d(D',D'') \geq a$, ce qui est impossible si $a > 0$.-

Nous résumons les résultats précédents, ainsi que ceux qui découlent de la topologie de $\mathcal{D}$:

<u>Théorème</u> (3.2): Etant donnée une fonction de dépendance D, si D_n est définie par $D_n(u_1,..,u_p) = D^n(u_1^{1/n},..,u_p^{1/n})$, alors, l'ensemble $\mathcal{D}_\infty(D)$ des valeurs d'adhérence de $\{D_n, n\geq 1\}$ est un ensemble compact, connexe, infini ou réduit à un seul point, et tel que, d étant une distance définissant la topologie sur $\mathcal{D}$ (par exemple la distance uniforme):

(3.5) $$\lim_{n\infty} d(D_n, \mathcal{D}_\infty(D)) = 0.-$$

Nous étudions maintenant de façon plus précise les propriétés des fonctions de dépendance et des fonctions de liaison qui peuvent être obtenues comme limites de suites $\{D_n, n\geq 1\}$:

<u>Définition</u> (3.1): On appelle fonction de dépendance extrême (resp. fonction de liaison extrême) toute fonction de dépendance (resp. fonction de liaison) limite d'une suite D_n (resp. associée à la limite d'une suite D_n), dans $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D}_\infty$ (resp. $\mathcal{L}_\infty$) l'ensemble des fonctions de dépendance (resp. de liaison) extrêmes.-

<u>Théorème</u> (3.3): La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de dépendance D associée à la fonction de liaison L soit extrême, est que l'une ou l'autre des identités soit vérifiée:

(3.6)
$$\forall\, 1\leq i\leq p,\ u_i \in [0,1],\ \forall r > 0,\ D^r(u_1^{1/r},..,u_p^{1/r}) = D(u_1,..,u_p) \ ;$$
$$\forall\, 1\leq i\leq p,\ z_i \in [0,+\infty[,\ \forall r > 0,\ rL(z_1/r,..,z_p/r) = L(z_1,...,z_p) \ ;$$

...

De plus, toute fonction de dépendance (resp. fonction de liaison) limite d'une sous-suite D_{n_k} , D_n étant défini par (3.1) (resp. L_{n_k},L_n étant associée à D_n) est extrême.-

<u>Preuve</u>: La première partie du théorème est une conséquence triviale du lemme (3.2) pour la condition nécessaire, et de (3. 2) pour la condition suffisante. La deuxième partie se ramène à montrer que si D est limite de D_{n_k} , alors D vérifie (3. 3). Ce résultat se déduit du théorème (3.1): si on compare les suites n_k et mn_k , où m est un entier fixé, on obtient directement que $D_{mn_k} \to D$, et vers $D^m(u_1^{1/m},..,u_p^{1/m})$; de la même manière $D_{n_k/q} \to D$, et vers $D^{1/q}(u_1^q,..,u_p^q)$; on en déduit que $D(u_1,..,u_p) = D^{m/q}(u_1^{q/m},..,u_p^{q/m})$ d'où le résultat par passage à la limite; ceci est dû au fait que les suites précédentes vérifient la condition $|\mathrm{Log}\, n_k - \mathrm{Log}\, rn_k| \leq C < +\infty$.-

<u>Théorème</u> (3.4): Si D est une fonction de dépendance, la condition nécessaire et suffisante pour que $D_{n_k}(u_1,..,u_p) = D^{n_k}(u_1^{1/n_k},..., u_p^{1/n_k})$ converge vers la fonction de dépendance D_∞, de fonction de liaison L_∞ , lorsque $k \to +\infty$, est que:

.7) $$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[,\ L_\infty(z_1,..,z_p) = -\sum_{i=1}^{p} z_i + \lim_{k\infty} n_k\left(1-D\left(1-\frac{z_1}{n_k},..,1-\frac{z_p}{n_k}\right)\right).$$

De plus, $\forall D_\infty \in \mathcal{D}_\infty$, $\forall L_\infty \in \mathcal{L}_\infty$, ces fonctions vérifient les inégalités:

.8) $$\sup_{1 \leq i \leq p} z_i - \sum_{i=1}^{p} z_i \leq L_\infty(z_1,..,z_p) \leq 0,\ \forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[\ ;$$

$$u_1 .. u_p \leq D_\infty(u_1,..,u_p) \leq \mathrm{Inf}(u_1,..,u_p)\ ,\forall 1 \leq i \leq p\ ,\ u_i \in [0,1]\ .$$

En particulier, si $L_\infty \in \mathcal{L}_\infty$, L_∞ est toujours fini sur $[0,+\infty[^p$.-

<u>Preuve</u>: Nous raisonnerons ici en posant $n_k = n$, la démonstration étant identique pour une sous-suite. Fixons $z_1,..,z_p \in [0,+\infty[$; $\forall \varepsilon > 0$, pour n assez grand:

$$\forall 1 \leq i \leq p,\quad 1 - z_i(1+\varepsilon)/n \leq e^{-z_i/n} \leq 1 - z_i(1-\varepsilon)/n\quad ;$$

Par les inégalités de Frechet (2.7), on en déduit:

$$1 - \sum_{i=1}^{p} z_i(1+\varepsilon)/n \leq D(1-z_1(1+\varepsilon)/n,..,1-z_p(1+\varepsilon)/n) \leq D(e^{-z_1/n},..,e^{-z_p/n})$$

...

$$\leq D(1-z_1(1-\varepsilon)/n,..,1-z_p(1-\varepsilon)/n) \leq 1 - \sup_{1\leq i\leq p} z_i(1-\varepsilon)/n \ ;$$

Notons L_n la fonction de liaison associée à D_n ; l'inégalité précédente montre que, pour n assez grand, $L_n(z_1,..,z_p)$ est fini, et que:

$L_n(z_1,..,z_p) = -\sum_{i=1}^{p} z_i - n \text{ Log } D(e^{-z_1/n},..,e^{-z_p/n})$ peut être encadré par:

$$-\sum_{i=1}^{p} z_i - n \text{ Log}\left[1 - \sup_{1\leq i\leq p} z_i(1-\varepsilon)/n\right] \leq L_n(z_1,..,z_p) \leq -\sum_{i=1}^{p} z_i - n \text{ Log}\left[1 - \sum_{i=1}^{p} z_i(1-\varepsilon)/n\right]$$

Ainsi, si $L_n \to L_\infty$, $L_\infty(z_1,..,z_p)$ est finie, et vérifie (3.8), $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. La relation correspondante pour D s'en déduit aisément.

Similairement, pour n assez grand,

$$\forall\, 1\leq i\leq p,\quad e^{-z_i(1+\varepsilon)/n} \leq 1 - z_i/n \leq e^{-z_i(1-\varepsilon)/n}$$, ce qui implique que:

$$L_\infty(z_1(1+\varepsilon),..,z_p(1+\varepsilon)) \leq -\sum_{i=1}^{p} z_i - \operatorname{LimSup}_{n\infty} n \text{ Log } D(1-z_1/n,..,1-z_p/n)$$

$$\leq -\sum_{i=1}^{p} z_i - \operatorname{LimInf}_{n\infty} n \text{ Log } D(1-z_1/n,..,1-z_p/n) \leq L_\infty(z_1(1-\varepsilon),..,z_p(1-\varepsilon));$$

Si L_n admet une limite L_∞, ceci implique, cette limite étant finie et donc continue, que $D(1-z_1/n,..,1-z_p/n) = O(1/n)$, et donc que (3.7) est vrai. Inversement, si $n\, D(1 - z_1/n,..,1 - z_p/n)$ a une limite, on en déduit de L_n a une limite, et que (3.7) est vrai.–

<u>Remarques</u> (3.2): 1°) En général, on a toujours les inégalités:

(3.9) $$\forall 1\leq i\leq p,\ z_i\in[0,n] \quad , \quad \sup_{1\leq i\leq p} z_i \leq n\left(1 - D\left(1-\frac{z_1}{n},..,1-\frac{z_p}{n}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{p} z_i \ ;$$

2°) On définit, pour toute fonction de dépendance D :

(3.10) $$D^*(u_1,..,u_p) = \int_{1-u_1}^{1} .. \int_{1-u_p}^{1} dD(s_1,..,s_p)$$; on exprime $1 - D$ à l'aide de D^*, par:

(3.11) $$1 - D(1-u_1,..,1-u_p) = \sum_{1\leq i\leq p} D^*(1,..,u_i,..,1) - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq p\\ \text{distincts}}} D^*(1,..,u_i,..u_j,..,1) + .. + (-1)^r \sum_{\substack{1\leq i_1,..,i_r\leq p\\ \text{distincts}}} D^*(1,..,u_{i_1},..,u_{i_r},..,1) + ..$$

...

.. + $(-1)^p D^*(u_1,..,u_p)$; on obtient:

Proposition (3.2): Pour toute fonction de dépendance D, D^* est aussi une fonction de dépendance, et $D^{**} = D$.-

Preuve: Si D est fr de $(U(1),..,U(p))$, D^* est fr de $(1-U(1),..,1-U(p))$.-

On obtient le corollaire suivant du théorème (3.4):

Corollaire (3.3): Pour toute fonction de dépendance D, D_n définie pour $\forall 1 \leq i \leq p$, $u_i \in [0,1]$, par $D_n(u_1,..,u_p) = D^n(u_1^{1/n},..,u_p^{1/n})$ converge vers une fonction de dépendance limite D_∞, de fonction de liaison L_∞, si et seulement si:

(3.12) $\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty]$, la limite $L^*(z_1,..,z_p) = \lim\limits_{n\infty} n\, D^*(z_1/n,..,z_p/n)$

existe et est finie (N.B. $D^*(u_1,..,u_p)$ est définie, en tant que fonction de répartition, pour $\forall 1 \leq i \leq p$, $u_i \in [-\infty,+\infty]$).

L_∞ et L^*_∞ sont liés par les relations:

(3.13)
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[\ ,\ L_\infty(z_1,..,z_p) = -\sum_{i=1}^{p} z_i + \sum_{1\leq i\leq p} L^*_\infty(+\infty,..,z_i,..,+\infty)$$
$$-\sum_{\substack{1\leq i,j\leq p\\ \text{distincts}}} L^*_\infty(+\infty,..,z_i,..,z_j,..,+\infty) + .. - (-1)^p L^*_\infty(z_1,..,z_p)\ ;$$

Réciproquement, $L^*_\infty(z_1,..,+\infty,..,+\infty,..,z_p)$, où les valeurs $+\infty$ sont aux indices $\{j_1,..,j_{p-k}\} = J$, avec $\forall 1 \leq i \notin J \leq p$, $z_i \in [0,+\infty[$, est donné par:

(3.14)
$$L^*_\infty(z_1,..,+\infty,..,+\infty,..,z_p) = \sum_{1\leq i\notin J\leq p} L_\infty(0,..,z_i,..,0)$$
$$-\sum_{\substack{1\leq i,j\notin J\leq p\\ \text{distincts}}} L_\infty(0,..,z_i,..,z_j,..,0) + .. - (-1)^k L_\infty(z_1,..,0,..,0,..,z_p).-$$

Preuve: Si (3.12) est vrai, alors, par (3.7) et (3.11), D_∞ existe, et (3.13) est vérifié ; pour montrer la réciproque, il suffit d'exprimer D^* en fonction de 1-D ; compte tenu de la proposition (3.2), montrant que $D^{**} = D$, on peut écrire:

$$\forall 1 \leq i \leq p,\ u_i \in [0,1]\ ,\ D^*(u_1,..,u_p) = \sum_{1\leq i\leq p} (1 - D(1,..,1-u_i,..,1))$$
$$-\sum_{\substack{1\leq i,j\leq p\\ \text{distincts}}} (1 - D(1,..,1-u_i,..,1-u_j,..,1)) + .. - (-1)^p(1-D(1-u_1,..,1-u_p))\ ;$$

On montre ainsi que l'existence de D_∞ implique celle de L^*_∞, et on en déduit (3.14).-

...

On peut caractériser les fonctions L^* par le théorème suivant:

<u>Théorème</u> (3.4): Pour que $L^*(z_1,..,z_p)$ définisse pour $1 \leq i \leq p$, $z_i \in [0,+\infty]$, la limite de $n\, D^*(z_1/n,..,z_p/n)$, où D^* est une fonction de dépendance, il faut qu'existe une mesure positive M sur $[0,+\infty]^p$, possédant les propriétés suivantes:

$$\text{(i)}\quad \forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty],\ L^*(z_1,\dots,z_p) = \int_0^{z_1} .. \int_0^{z_p} dM(s_1,\dots,s_p)\ ;$$

(3.15) $$\text{(ii)}\quad \forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty], \forall \lambda > 0,\ L^*(\lambda z_1,..,\lambda z_p) = \lambda L^*(z_1,..,z_p)\ ;$$

$$\text{(iii)}\quad \forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[,\ L^*(+\infty,\dots,+\infty,z_i,+\infty,\dots,+\infty) = z_i\ .-$$

<u>Preuve</u>: Si $L^*(z_1,..,z_p) = \underset{n\infty}{\mathrm{Lim}}\ n\, D^*(z_1/n,..,z_p/n)$, par le corollaire (3.3), si $D = D^{**}$, D_n converge vers la fd D_∞, de fl L_∞, liée à L^* par (3.13) et (3.14); en utilisant (3.6), on en déduit que L^* vérifie (3.15)(ii).

Considérons maintenant la suite de mesures sur $[0,K]^p$, de fonctions de répartitio

$$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,K]\ ,\quad \frac{n\, D^*(z_1/n,..,z_p/n)}{n\, D^*(K/n\ ,\dots,\ K/n)} \longrightarrow \frac{L^*(z_1,\dots,z_p)}{KL^*(1,..,1)}$$; cette suite converge

faiblement vers la fr d'une loi de probabilité; on en déduit, sous réserve que $L^*(1,..,1) \neq 0$, que, pour $1 \leq i \leq p$, $z_i \in [0,+\infty[$, $L^*(z_1,\dots,z_p)$ est la fr d'une mesure positive. Lorsque $L^*(1,..,1) = 0$, alors $L^*(z_1,..,z_p) = 0$, et le résultat subsiste; enfin, lorsque certains z_i sont infinis, la démonstration précédente peut se reprendre, en raisonnant sur les z_j restants. On obtient ainsi (3.15)(i).

Pour (3.15)(iii), on écrit $L^*(+\infty,\dots,z_i,\dots,+\infty) = \underset{n\infty}{\mathrm{Lim}}\ n\, D^*(1,..,z_i/n,..,1) = z_i$, D^* étant une fd, par (2.3).-

<u>Remarques</u> (3.3): 1°) Si $L^*(z_1,\dots,z_p) = \underset{n\infty}{\mathrm{Lim}}\ n\, D^*(\frac{z_1}{n},\dots,\frac{z_p}{n})$, où $D^* \in \mathcal{D}$, alors L^* est toujours finie, si tous les z_i ne sont pas simultanément infinis; plus précisément, par application de (2.7):

(3.16) $$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty]\ ,\quad 0 \leq L^*(z_1,\dots,z_p) \leq \underset{1 \leq i \leq p}{\mathrm{Inf}}\ z_i\ .-$$

2°) $L^*(z_1,..,z_p)$ n'est en général pas continue lorsque l'une des coordonnées tend vers l'infini; donnons les exemples suivants:

...

Exemple (3.1): On suppose ici que $D(u,v) = uv$ (indépendance des coordonnées); dans ce cas:

$$D^*(u,v) = uv \quad ; \quad L^*(z_1,z_2) = 0 \ , \ L^*(z_1,+\infty) = z_1 \ , \ L^*(+\infty,z_2) = z_2 \ ;$$

$L_\infty(z_1,z_2) = 0$; On vérifie que L^* n'est pas continu à l'infini.–

Exemple (3.2): On suppose ici que $D(u,v) = \text{Inf}(u,v)$ (coordonnées égales) on obtient:

$$D^*(u,v) = \text{Inf}(u,v) \ ; \ L^*(z_1,z_2) = \text{Inf}(z_1,z_2) \ , \ \forall z_1,z_2 \in [0,+\infty] \ ;$$

$$L_\infty(z_1,z_2) = -\ \text{Inf}(z_1,z_2) = -z_1-z_2 + \text{Sup}(z_1,z_2) \ .–$$

Nous étudions maintenant la forme générale des fonctions L^* satisfaisant (3.15) (i) et (ii):

Théorème (3.5): Si $H(z_1,..,z_p)$ est, pour $z_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$, finie, et telle que:

(i) Il existe une mesure positive M sur $[0,+\infty[^p$, telle que:

(3.17) $$\forall 1 \leq i \leq p, \ z_i \in [0,+\infty[\ , \ H(z_1,..,z_p) = \int_0^{z_1} .. \int_0^{z_p} dM(s_1,..,s_p) \ ;$$

(ii) $\forall 1 \leq i \leq p$, $z_i \in [0,+\infty[$, $\forall \lambda > 0$, $H(\lambda z_1,..,\lambda z_p) = \lambda H(z_1,..,z_p)$,

Alors, il existe une mesure positive μ sur le simplexe S_p défini par:

(3.18) $$S_p = \{(u_1,..,u_p) \ ; \ u_1+..+u_p = 1, \ \forall 1 \leq i \leq p, \ u_i \geq 0\} \ ,$$

telle que, avec les conventions pour z/u : $0/0 = 0$, $z/0 = +\infty$, si $z > 0$:

(3.19) $$\forall 1 \leq i \leq p, \ z_i \in [0,+\infty[\ , \ H(z_1,..,z_p) = \int_{(u_1,..,u_p) \in S_p} \ \underset{1 \leq i \leq p}{\text{Inf}} \left\{ \frac{z_i}{u_i} \right\} d\mu(u_1,..,u_p).–$$

Preuve: Tout point de $[0,+\infty[^p - \{0\}$ peut être représenté de manière unique par un couple ($r > 0$, $u \in S_p$) , à l'aide du changement de variables:

$$(s_1,..,s_p) \in [0,+\infty[^p - \{0\} \mapsto r = \sum_{i=1}^{p} s_i \ , \ \forall 1 \leq i \leq p \ , \ u_i = s_i/r \ ;$$

$$(u_1,..,u_p) \in S_p \ , \ r > 0 \qquad \mapsto \forall 1 \leq i \leq p \ , \ s_i = ru_i \ .–$$

Or, $H(z_1,..,z_p)$ finie et vérifiant (3.17)(ii) est telle que $H(0,..,0) = 0$;

On en déduit que $dM(s_1,..,s_p) = dh\ (r\ ;\ u) = d\mu(u)\ dr$, par (3.17)(i).

On obtient alors que:

$$H(z_1,..,z_p) = \iint_{\substack{0 \leq ru_i \leq z_i \\ 1 \leq i \leq p}} dr \ d\mu(u) = \int_{S_p} \underset{1 \leq j \leq p}{\text{Inf}} \{ r \ ; \ ru_j = z_j \} \ d\mu(u) \quad ;$$

Or, $\underset{1\leq j\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{r\ ;\ ru_j = z_j\right\} = \underset{1\leq i\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{\dfrac{z_i}{u_i}\right\}$, avec la convention $0/u_i = 0$,

et $z_i/0 = +\infty$, si $z_i > 0$; on en déduit le résultat.-

Corollaire (3.4): Si $L^*(z_1,..,z_p) = \underset{n\infty}{\mathrm{Lim}}\ n\ D^*(z_1/n,..,z_p/n)$, où $D^* \in \mathcal{D}$, alors, il existe une mesure positive μ sur le simplexe S_p (3.18), telle que:

(3.20) $$\forall 1\leq i\leq p,\ z_i \in [0,+\infty],\ L^*(z_1,...,z_p) = \int_{(u_1,...,u_p)\in S_p} \underset{1\leq i\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{\frac{z_i}{u_i}\right\} d\mu(u_1,...,u_p),$$

avec les conventions: $z \in [0,+\infty[\ \ z/0 = 0\ ;\ +\infty/0 = +\infty$; vérifiant de plus:

(3.21) $$\forall 1\leq i\leq p,\ \int_{(u_1,...,u_p)\in S_p} \left\{\frac{1}{u_i}\right\} d\mu(u_1,...,u_p) = 1\ .-$$

Preuve: Considérons tout d'abord $L^*(z_1,..,z_p)$, pour $\forall 1\leq i\leq p,\ z_i \in [0,+\infty[$; par le théorème (3.5), il existe une mesure μ_p sur S_p telle que:

$$\forall 1\leq i\leq p,\ z_i\in[0,+\infty[,\ L^*(z_1,...,z_p) = \int_{(u_1,...,u_p)\in S_p} \underset{1\leq i\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{\frac{z_i}{u_i}\right\} d\mu_p(u_1,...,u_p)\ ;$$

Notons alors les sous-simplexes de S_p comme suit:

$$\forall 1\leq k\leq p, \forall 1\leq i_1<..<i_k\leq p,\ S_{k;i_1,...,i_k} = \Big\{(u_1,...,u_p)\ ;\ u_{i_1}+..+u_{i_k} = 1\ ,$$
$$\forall 1\leq j\leq k,\ u_{i_j} \geq 0,\ \forall i \notin\{i_1,...,i_k\},\ u_i = 0\Big\}\ ;$$

On notera également $S_p = S_{p;1,...,p}$ et $\partial S_{k;i_1,...,i_k} = \Big\{(u_1,...,u_p) \in S_{k;i_1,...,i_k}$; $u_{i_1}..u_{i_k} = 0\Big\}$;

On constate alors que $$\int_{(u_1,...,u_p)\in\partial S_p} \underset{1\leq i\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{\frac{1}{u_i}\right\} d\mu_p(u_1,...,u_p) = 0\ ;$$

En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un sous-simplexe, par exemple $S_{p-1;2,..,p}$ tel que $\displaystyle\int_{(u_1,...,u_p)\in S_{p-1;2,..,p}} \underset{1\leq i\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{\frac{1}{u_i}\right\} d\mu_p(u_1,...,u_p) > 0$, et

on en déduirait, pour $1\leq i\leq p,\ z_i\in[0,+\infty[$, que $\displaystyle\int_{(u_1,...,u_p)\in S_{p-1;2,..,p}} \underset{1\leq i\leq p}{\mathrm{Inf}}\left\{\frac{z_i}{u_i}\right\} d\mu_p(u_1,...,u_p) > 0$ et indépendant de z_1 ; or ceci est impossible, car celà

...

impliquerait que $\lim\limits_{z_1 \downarrow 0} L^*(z_1,..,z_p) > 0$, pour $z_2,..,z_p$ finis, contredisant (3.16).

Considérons maintenant $L^*(+\infty, z_2,..,z_p) = H_{p-1;1}(z_1,..,z_p)$; on vérifie que $H_{p-1;1}$ satisfait aux hypothèses du théorème (3.5); par le même raisonnement que précédemment, on montre que:

$$\forall 2 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[\ ,\quad L^*(+\infty, z_2,...,z_p) = \int_{(u_1,..,u_p) \in S_{p-1;2,..,p}}$$

$\inf\limits_{2 \leq i \leq p} \left\{ \dfrac{z_i}{u_i} \right\} d\mu_{p-1;2,..,p}(u_1,..,u_p)$; on constate qu'on peut alors représenter simultanément $L^*(z_1,..,z_p)$ pour z_1 fini ou non, avec les conventions pour z/u:

(22)
$$z \in [0,+\infty[\ ,\ 0 < u \leq 1 \Rightarrow z/u = z/u\ ;\quad +\infty / 0 = +\infty\ ;$$
$$z \in [0,+\infty[\ ,\ z/0 = 0\ ;\quad 0 < u \leq 1 \Rightarrow +\infty/u = +\infty\ ;$$

Ces conventions permettent d'écrire, pour $\forall 1 \leq i \leq p$, $z_i \in [0,+\infty[$,

$$\int_{(u_1,..,u_p) \in S_{p-1;2,..,p}} \inf_{1 \leq i \leq p} \left\{ \frac{z_i}{u_i} \right\} d\mu_p(u_1,..,u_p) = 0\ .$$

On peut ainsi répéter l'opération, pour aboutir à la représentation (3.20).-

<u>Remarque</u> (3.4): La démonstration précédente prouve de plus le résultat important suivant:

<u>Proposition</u> (3.3): Si, $\forall 1 \leq i \leq p$, $z_i \in [0,+\infty]$, $L^*(z_1,..,z_p) = \lim\limits_{n\infty} nD^*(\frac{z_1}{n},...,\frac{z_p}{n})$, où $D^* \in \mathcal{D}$, alors, $\forall 1 \leq k \leq p$, $\forall 1 \leq i_1 < .. < i_k \leq p$, il existe une mesure positive $\mu_{k;i_1,..,i_k}$ sur $S_{k;i_1,..,i_k}$, telle que $\mu_{k;i_1,..,i_k}(\partial S_{k;i_1,..,i_k}) = 0$, et:

(23)
$$\forall 1 \leq j \leq k,\ z_{i_j} \in [0,+\infty[\ ,\ L^*(+\infty,...,z_{i_1},...,z_{i_k},...,+\infty) = \int_{(u_1,..,u_p) \in S_{k;i_1,..,i_k}}$$

$\inf\limits_{1 \leq i \leq p} \left\{ \dfrac{z_i}{u_i} \right\} d\mu_{k;i_1,..,i_k}(u_1,..,u_p)$, avec les conventions (3.22), qui font en sorte que, sur $S_{k;i_1,..,i_k}$, $\inf\limits_{1 \leq i \leq p} \left\{ \dfrac{z_i}{u_i} \right\} = \inf\limits_{1 \leq j \leq k} \left\{ \dfrac{z_{i_j}}{u_{i_j}} \right\}$.-

...

Les formulations (3.20),(3.23), associées aux conventions (3.22) paraissent artificielles, à cause de la règle de calcul $z/0 = 0$; on obtient une représentation plus commode, par l'emploi du lemme:

Lemme (3.3): Etant donnée une mesure positive M sur le simplexe S_p, telle que $M(\partial S_p) = 0$, il existe une mesure positive M' telle que $M'(\partial S_p) = 0$, et:

(3.24) $$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[,\ \int_{(u_1,\ldots,u_p)\in S_p} \operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}\left\{\frac{z_i}{u_i}\right\} dM(u_1,\ldots,u_p) = \int_{(v_1,\ldots,v_p)\in S} \operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}\{v_i z_i\}\, dM'(v_1,\ldots,v_p)\ .-$$

Preuve: Considérons tout d'abord le cas où dM est une mesure de Dirac au point $(u_1,\ldots,u_p) \in S_p - \partial S_p$; dans ce cas:

$$\text{Si } dM = \delta_{u_1,\ldots,u_p},\quad dM' = \delta_{u'_1,\ldots,u'_p}\left\{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_p}\right\},\ \text{où } u'_i = \frac{\frac{1}{u_i}}{\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_p}},\ \forall 1 \leq i$$

Cette transformation n'est possible que lorsque tous les u_i sont > 0 ; si on considère maintenant une mesure M à support compact dans $S_p - \partial S_p$, les combinaiso linéaires de mesures de Dirac approchant arbitrairement M pour la topologie vague, on pourra définir M' ; enfin, $S_p - \partial S_p$ est réunion dénombrable de compacts, et on en déduit le résultat.-

Théorème (3.6): Si $L^*(z_1,\ldots,z_p) = \operatorname*{Lim}_{n\infty} n\, D^*(z_1/n,\ldots,z_p/n)$, $\forall 1 \leq i \leq p$, $z_i \in [0,+\infty]$, D^* est une fonction de dépendance, alors L^* admet la représentation:

(3.25) $$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty],\ L^*(z_1,\ldots,z_p) = \int_{(v_1,\ldots,v_p)\in S_p} \operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}\{z_i v_i\}\, d\mu(v_1,\ldots,v_p)$$

avec les conventions pour zv : $\forall z \in [0,+\infty[,\ \forall 0 \leq v \leq 1,\ zv = zv$;
$z = +\infty,\ \forall 0 \leq v \leq 1 \Rightarrow (+\infty).v = +\infty$;

De plus, si $\mu_{k;i_1,\ldots,i_k}$ est la restriction de μ à $S_{k;i_1,\ldots,i_k}$, on a:

(3.26) $$\forall 1 \leq i \leq p,\ \int_{0\leq v_i\leq 1,\ v_j=0,\ 1\leq j\neq i\leq p} v_i\, d\mu_{1;i}(v_i) = 1\ .-$$

...

On en déduit le théorème suivant permettant de représenter une fonction de liaison extrême L:

Théorème (3.7): Si L est une fonction de liaison extrême, associée à une fonction de dépendance extrême $D(u_1,..,u_p) = nD(u_1^{1/n},..,u_p^{1/n})$, $n \geqslant 1$, il existe une mesure positive μ sur S_p , vérifiant (3.25) et (3.26), pour L^* associée à L par (3.13) et (3.14), telle que, si $\mu_{k;i_1,..,i_k}$ est la restriction de μ au sous-simplexe $S_{k;i_1,..,i_k}$ de S_p

.27) $$\forall 1 \leqslant i \leqslant p,\ z_i \in [0,+\infty[,\ L(z_1,..,z_p) = \sum_{2 \leqslant k \leqslant p} \ \sum_{1 \leqslant i_1 < .. < i_k \leqslant p} \int_{(v_1,..,v_p) \in S_{k;i_1,..,i_k}} (-1)^k \operatorname*{Inf}_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ v_{i_j} z_{i_j} \right\} d\mu_{k;i_1,..,i_k}(v_1,..,v_p) \ ;$$

D'une manière équivalente D admet la représentation:

.28) $$\forall 1 \leqslant i \leqslant p,\ u_i \in [0,1] \ ,\ D(u_1,..,u_p) = u_1..u_p \exp\left\{ \sum_{2 \leqslant k \leqslant p} \ \sum_{1 \leqslant i_1 < .. < i_k \leqslant p} \int_{(v_1,..,v_p) \in S_{k;i_1,..,i_k}} (-1)^k \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ v_{i_j} \operatorname{Log} u_{i_j} \right\} d\mu_{k;i_1,..,i_k}(v_1,..,v_p) \right. .-$$

Preuve: Il s'agit ici de l'application directe du théorème (3.6) et des relations (3.13) et (3.14), en remarquant qu'on peut commencer la somme à l'ordre k = 2, car on a toujours $L^*(+\infty,..,z_i,..,+\infty) = z_i$, par (3.15)(iii).-

Remarques (3.6): Il n'est, en général pas possible d'écrire directement:

$$L(z_1,..,z_p) = \int_{(u_1,..,u_p) \in S_p} \operatorname*{Inf}_{1 \leqslant i \leqslant p} (u_i z_i) \ d\mu(u_1,..,u_p)$$; en effet, une telle écriture impliquerait que $L(z_1,..,z_{i-1},z_{i+1},..,z_p)$ soit indépendant de i et des z_j, $j \neq i$, ce qui n'est en général pas vrai (on peut prendre à titre d'exemple $\operatorname{Sup}(z_1,z_2,z_3) - (z_1+z_2+z_3)$ qui est une fonction de liaison extrême associée à la limite de la fonction de dépendance D_n , où $D(u_1,u_2,u_3)=\operatorname{Inf}(u_1,u_2,u_3)$)

Il en est de même de $L(z_1,..,z_p) + \sum_{i=1}^{p} z_i$. Dans le cas p=2, on peut cependant obtenir, par (3.27):

...

$$L(z_1,z_2) = \int_{(v_1,v_2)\in S_2} \mathrm{Inf}(v_1 z_1, v_2 z_2)\, d\mu_{2;1,2}(v_1,v_2) \;;$$

Ces résultats contredisent donc le résultat conjecturé par Galambos, [7], p.265, th.5.4.3., sous le nom de "The Pickands representation", attribué à J. Pickands III, dans une publication à paraître, et non publiée à ma connaissance. Ce résultat stipule que D est une fonction de dépendance extrême, si et seulement si D admet une représentation de la forme:

(3.29) $$D(y_1,\dots,y_p) = \exp\left\{\int_{S_p} \sup_{1\leq i\leq p}\left\{v_i \mathrm{Log}\, y_i\right\} dM(v_1,\dots,v_p)\right\}, \text{ où } M$$

est une mesure quelconque sur S_p ; aussi bien pour le manque de précision sur M que pour la fausseté de la représentation, ce résultat est inexact.–

Il reste maintenant à obtenir des conditions suffisantes sur pour que (3.25),(3.27) ou (3.28) soient des fonctions de liaison extrêmes:

Lemme (3.4): $\forall\, a_1,\dots,a_p \in [0,1]$, il existe une fonction de dépendance D telle que $\lim_{n\infty} n\, D(z_1/n,\dots,z_p/n) = \mathrm{Inf}(a_1 z_1,\dots,a_p z_p), \forall 1\leq i\leq p,\ z_i\in[0,+\infty[$.
De plus, si $a_1,\dots,a_p\in[0,1]$, $\lim_{n\infty} n\, D(z_1/n,\dots,z_p/n) = \mathrm{Inf}(a_1z_1,\dots,a_pz_p)$, $1\leq i\leq$ $z_i\in[0,+\infty]$, avec au moins deux z_i finis.–

Preuve: Considérons tout d'abord une v.a. distribuée uniformément sur $[0,1]^p - \prod_{i=1}^{p}[0,c_i]$, et uniformément sur le segment $(0,\dots,0),(c_1,\dots,c_p)$, avec des masses respectives $1-A$ et A ; La fonction de répartition de cette v.a. est $F(x_1,\dots,x_p) = A\mathrm{Inf}(x_1/c_1,\dots,x_p/c_p)$, si $x_1\leq c_1,\dots,x_p\leq c_p$; d'autre part, la fonction de répartition marginale de la $i^{\text{ème}}$ composante est:

$$F_i(x_i) = Ax_i/c_i + \left\{\frac{1-A}{1-\prod_{j=1}^{p}c_j}\right\}\int_{\substack{s_1\leq x_1,\,1\leq j\neq i\leq p\\ c_j\leq s_j\leq 1}} ds_1\dots ds_p$$

$$= Ax_i/c_i + (1-A)x_i\left\{\prod_{j\neq i}(1-c_j)\right\}\Big/ 1-\prod_{j=1}^{p}c_j$$

Ainsi, la fonction de dépendance associée est, si $u_1,\dots,u_p$ sont assez petits:

$$A\,\mathrm{Inf}\left[\frac{u_1/c_1}{A/c_1+(1-A)\prod_{j\neq 1}(1-c_j)\Big/1-\prod_{j=1}^{p}c_j},\dots,\frac{u_p/c_p}{A/c_p+(1-A)\prod_{j\neq p}(1-c_j)\Big/1-\prod_{j=1}^{p}c_j}\right]$$

...

La fonction $L^*(z_1,..,z_p) = \lim_n n\, D(z_1/n,..,z_p/n)$ est donc $\operatorname{Inf}(a_1u_1,..,a_pu_p)$

avec: $\forall 1 \leq i \leq p,\ \frac{1}{a_i} = 1 + \left\{\frac{1}{A} - 1\right\} c_i \prod_{j\neq i}(1 - c_j) \Big/ \left\{1 - \prod_{j=1}^{p} c_j\right\}$;

Posons maintenant $A = \frac{1}{n+1}$, et $c_j = d_j/n$; Lorsque $n \to +\infty$, on peut rendre $\frac{1}{a_i} - 1$ arbitrairement proche de $d_i > 0$ donné ; par continuité, on en déduit qu'il existe un choix de $A \in [0,1[$, $c_1,..,c_n \in [0,1[$ tels que $a_1,..,a_p$ soient p nombres $\in [0,1[$ donnés.

Pour un tel choix, on vérifie que $\forall 1 \leq i_1 < i_2 \leq p$, $z_{i_1}, z_{i_2} \in [0,+\infty[$,

$L^*(+\infty,..,z_{i_1},..,z_{i_2},..,+\infty) = \operatorname{Inf}(a_{i_1}z_{i_1}, a_{i_2}z_{i_2})$, et on en déduit le résultat pour $\forall 1 \leq i \leq p,\ 0 \leq a_i < 1$.

Dans le cas où certains a_i sont égaux à 1 , le résultat précédent subsiste, en posant $c_i = 1$, si $a_i = 1$, et en raisonnant comme précédemment sur les autres c_i ; dans le cas où tous les $a_i = 1$, on obtient, en particulier:

$D(u_1,..,u_p) = \operatorname{Inf}(u_1,..,u_p)$.–

<u>Lemme</u> (3.5): Tout centre de gravité de fonctions de la forme $\lim_{n\infty} n\, D(z_1/n,..,z_p/n)$, où D est une fonction de liaison, est encore de cette forme.–

<u>Preuve</u>: Si L_1^* et L_2^* sont associées à D_1 et D_2 , $qL_1^* + (1-q)L_2^*$ est associée à $qD_1 + (1-q)D_2$, qui est une fd, si $0 \leq q \leq 1$, par (2.4).–

<u>Théorème</u> (3.7): Pour que L^* soit tel qu'existe une fonction de dépendance D, telle que:

$$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty],\quad L^*(z_1,..,z_p) = \lim_{n\infty} n\, D^*(z_1/n,..,z_p/n) ,$$

il faut et il suffit que L^* admette la représentation:

(3.30) $$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty],\ L^*(z_1,..,z_p) = \int_{(v_1,..,v_p)\in S_p} \operatorname{Inf}_{1\leq i\leq p} \left\{z_i v_i\right\} d\mu(v_1,..,v_p)$$

avec les règles de calcul pour zv : $(+\infty)0 = +\infty$, où μ est une mesure positive sur S_p , telle que, si $\mu_{k;i_1,..,i_k}$ est la restriction de μ sur $S_{k;i_1,..,i_k}$, on ait les relations suivantes:

...

$\forall\ 1 \leq k \leq k' \leq p\ ,\ \forall 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq p\ , \forall 1 \leq j_1 < \ldots < j_{k'} \leq p\ ,$ avec :

$(i_1, \ldots, i_k) \subset (j_1, \ldots, j_{k'}),$

$$\int_{\substack{(v_1,\ldots,v_p)\in S_{k';j_1,\ldots,j_{k'}} \\ (v_{i_1},\ldots,v_{i_p}) \text{ fixés}}} \frac{d\mu_{k';j_1,\ldots,j_{k'}}(v_1,\ldots,v_p)}{\left\{\operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}(1/v_i)\right\}} \leq \frac{d\mu_{k;i_1,\ldots,i_k}(v_1,\ldots,v_p)}{\left\{\operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}(1/v_i)\right\}} \tag{3.31}$$

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad \int_{(v_1,\ldots,v_p)\in S_{1\ ;\ i}} v_i\, d\mu_{1\ ;\ i}(v_i) = 1\ .- \tag{3.32}$$

<u>Preuve</u>: Tout d'abord, la condition est nécessaire, par le théorème (3.6), et du fait que l'inégalité (3.31) équivaut à l'affirmation:

$$L^*(z_1,\ldots,z_i,\ldots,z_p) \leq L^*(z_1,\ldots,+\infty,\ldots,z_p);$$

La condition (3.32) est donnée par (3.26).

Montrons maintenant que la condition est suffisante:

Considérons tout d'abord $L^*(z_1,\ldots,z_p)$ pour $z_1,\ldots,z_p$ finis ; si L^* est le barycentre par une mesure de masse totale 1 de $\left\{\operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}(u_i z_i)\right\}$, où les $u_i \in [0,1]$, c'est une fonction de la forme $\operatorname*{Lim}_{n\infty} n\, D(z_1/n,\ldots,z_p/n)$, en appliquant le lemme (3.4), le lemme (3.5), et le fait que toute mesure à support compact et de masse totale 1 est limite vague d'une combinaison linéaire de poids 1 de mesures de Dirac; Le fait d'intégrer sur S_p , au lieu de $[0,1]^p$ introduit le facteur normalisateur $\dfrac{1}{\operatorname*{Inf}_{1\leq i\leq p}(1/u_i)}$; en fait, $L^*(z_1,\ldots,z_p)$ n'est un tel barycentre qu'avec une masse $\leq$ 1;compte tenu du lemme (3.4), si on retranche le poids ainsi obtenu pour $L^*(z_1,\ldots,z_{i-1},+\infty,z_{i+1},\ldots,z_p)$, on a encore une mesure positive sur $S_{p-1;1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,p}$, et on peut réappliquer le raisonnement sur ce sous-simplexe. On obtiendra un barycentre de masse totale 1, si les conditions (3.32) sont vérifiées.–

...

Remarques (3.7): Les conditions (3.31) et (3.32) permettent une construction simple de toutes les fonctions de liaison et de dépendance extrêmes; il suffit, en effet de se donner les 2^p mesures sur le simplexe S_p et ses faces, $\mu_{k;i_1,\dots,i_k}$, en vérifiant les relations d'ordre entre les nombres (3.31) et (3.32). On résoud ainsi le problème de la représentation des lois limites extrêmes.-

Théorème (3.8): L, respectivement D, est une fonction de liaison extrême, respectivement une fonction de dépendance extrême, si et seulement si elles admettent les représentations:

(3.33)
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0,+\infty[,\quad L(z_1,\dots,z_p) = \sum_{2\leq k\leq p}\ \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq p} \int_{(v_1,\dots,v_p)\in S_{k;i_1,\dots,i_k}} (-1)^k \operatorname*{Inf}_{1\leq j\leq k}\left\{v_{i_j} z_{i_j}\right\} d\mu_{k;i_1,\dots,i_k}(v_1,\dots,v_p)\ ;$$

(3.34)
$$\forall 1 \leq i \leq p,\ u_i \in [0,1],\quad D(u_1,\dots,u_p) = u_1 \dots u_p \ \exp\left\{\sum_{2\leq k\leq p}\ \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq p} \int_{(v_1,\dots,v_p)\in S_{k;i_1,\dots,i_k}} (-1)^k \operatorname*{Sup}_{1\leq j\leq k}\left\{v_{i_j} \operatorname{Log} u_{i_j}\right\} d\mu_{k;i_1,\dots,i_k}(v_1,\dots,v_p)\right\}\ ;$$

où $\forall 1\leq k\leq p$, $\forall 1\leq i_1<\dots<i_k\leq p$, $\mu_{k;i_1,\dots,i_k}$ est une mesure positive sur le simplexe $S_{k;i_1,\dots,i_k}$, vérifiant les relations (3.31) et (3.32).-

4.- Applications à la convergence asymptotique des lois extrêmes:

Dans les §2 et 3, nous avons montré que tout vecteur aléatoire $(Y(1),\dots,Y(p))$ possédait une fonction de dépendance D (non nécessairement unique (th.(2.1)), et que, si $\{(Y_n(1),\dots,Y_n(p)), n\geq 1\}$ était une suite de v.a. indépendants de même loi, $D_n(u_1,\dots,u_p) = D^n(u_1^{1/n},\dots,u_p^{1/n})$ était une fonction de dépendance du vecteur $\left\{\operatorname*{Sup}_{1\leq i\leq n} Y_i(1),\dots,\operatorname*{Sup}_{1\leq i\leq n} Y_i(p)\right\}$ (lemme (3.1)) ; nous avons ensuite décrit le comportement asymptotique de D_n, lorsque $n\mapsto\infty$, et caractérisé les limites possibles de D_n.

Lorsque $(Y(1),\dots,Y(p))$ a des lois marginales continues, D est déterminée de manière unique, ainsi que la fonction de dépendance de $\left\{\operatorname*{Sup}_{1\leq i\leq p} Y_i(1),\dots,\operatorname*{Sup}_{1\leq i\leq p} Y_i(p)\right\}$; lorsque ce n'est pas le cas, on peut se demander si le comportement limite de D_n

...

dépend de la fonction de de dépendance choisie parmi l'ensemble des possibilités pour le v.a. $\{Y(1),..,Y(p)\}$; le théorème suivant montre qu'il n'en est, en général rien:

Théorème (4.1): Etant donnée une fonction de répartition, F, dont l'ensemble des points de continuité marginaux (pdclm F) est C ; si $F^n(C)$ désigne l'ensemble des points de la forme $(u_1^n,..,u_p^n)$, où $(u_1,..,u_p) \in F(C)$, si D est une fonction de dépendance associée à F, et si $D_n(u_1,..,u_p) = D^n(u_1^{1/n},..,u_p^{1/n}) \longrightarrow D_\infty$, la limite D_∞ est définie de manière unique, indépendante des choix possibles pour D, F étant fixé, sur l'ensemble:

(4.1) $$\operatorname*{Lim\overline{Sup}}_{n\,\infty} F^n(c) = \bigcap_{n\geq 1}\left\{\overline{\bigcup_{m\geq n} F^m(C)}\right\}.-$$

Corollaire (4.1): $D_\infty(u_1,..,u_p)$ est définie de manière unique sur $\prod_{i=1}^{p} I_i$, où $I_i = \{0\}\cup\{1\}$, ou $[0,1]$, suivant qu'existe ou que n'existe pas de a_i tel que, s $\varepsilon>0, F_i(a_i-\varepsilon) < F_i(a_i+0) = 1$ (maximum atteint avec probabilité >0 de la $i^{ème}$ composante du v.a.)

Preuve du Théorème: $D_n = D^n(u_1^{1/n},..,u_p^{1/n})$ est défini de manière unique sur $F^n(C)$; si D est une fd quelconque de F, D_n converge uniformément sur l'ensemble (4.1), d'où le résultat.-

Preuve du corollaire: Supposons qu'existe i, $0<u<1$, tel que, pour n assez grand, il n'existe pas de pdc u_i de F_i, tel que $u_i^n \in [u-\varepsilon,u+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ étant choisi tel que $\varepsilon<\mathrm{Inf}(u,1-u)$; alors, pour n assez grand, $\forall y_i$ pdc F_i, $y_i \notin [(u-\varepsilon)^{1/n},(u+\varepsilon)^{1/n}]$ et, en faisant croître indéfiniment n, on recouvre $[1-\alpha,1[$, ce qui implique l'existence d'un point a_i, tel que $F(a_i-\varepsilon) < 1$, $F(a_i+0) = 1$; réciproquement, pour tout pdc y_i de F_i tel que $F_i(y_i) < 1$, $F_i(y_i) \leq F(a_i-0) < 1$, et donc $F_i(y_i)^n \to 0$ uniformément; on en déduit le résultat.

Remarques (4.1): 1°) Dans le cas d'une distribution non bornée supérieurement sur chacune de ses composantes, le corollaire (4.1) s'applique et D_∞ est déterminée de manière unique partout.

2°) Dans le cas où il existe un a_i (fini) tel que $F(a_i-\varepsilon) < 1$, $F(a_i+0) = 1$, on sait que le maximum correspondant $\sup_{1\leq k\leq n} X_k(i) \to a_i$ p.s., et est donc asymptotiquement indépendant des autres maxima; on peut donc toujours, dans ce cas, choisir D_∞ telle que:

...

(4.2) $$D_{\infty}(u_1,\dots,u_p) = \left\{ \prod_{I_i=\{0,1\}} u_i \right\} D_{\infty}(u_{j_1},\dots,u_{j_r}) ,$$
$$\text{où } \forall 1 \leq s \leq r,\ I_{j_s} = [0,1] .-$$

Nous utilisons maintenant les résultats précédents, par application des lemmes:

Lemme (4.1): Si une suite de lois de probabilité de fonctions de répartition $\{F_n, n \geq 1\}$ converge vers une loi limite de fonction de répartition F, ayant ses fonctions de répartition marginales continues, alors toute suite de fonctions de dépendance $\{D_n, n \geq 1\}$, telle que D_n soit associée à F_n, $\forall n \geq 1$, converge vers la fonction de dépendance D de F.-

Preuve: D est définie de manière unique, et, comme tout point $(y_1,\dots,y_p)$ est pdclm F, $\lim_{n\infty} F_n(y_1,\dots,y_p) = F(y_1,\dots,y_p) = D(F^1(y_1),\dots,F^p(y_p))$; on sait de plus, par le théorème de Glivenko-Cantelli, les fonctions de répartition marginales limites étant continues, que: $\sup_{1\leq i\leq p} \left\{ \sup_{y_i} \left| F_n^i(y_i) - F^i(y_i) \right| \right\} \to 0$;

Tout $(u_1,\dots,u_p) \in [0,1]^p$, pouvant se mettre sous la forme $(F^1(y_1),\dots,F^p(y_p))$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n \geq 1$, $\sup_{1\leq i\leq p} \left\{ \sup_{x_i} \left| F_n^i(x_i) - F^i(x_i) \right| \right\} \leq \frac{1}{4}\varepsilon/p$; $\exists\, (z_1,\dots,z_p)$ pdclm de F_n, tel que $\sup_{1\leq i\leq p} \left| F_n^i(z_i) - F^i(y_i) \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon/p$; on utilise alors (2.8):

$$\left| D_n(F^1(y_1),\dots,F^p(y_p)) - D_n(F_n^1(z_1),\dots,F_1^p(z_p)) \right| \leq \tfrac{1}{2} p\varepsilon/p \quad ;$$
$$\left| F_n(z_1,\dots,z_p) - F_n(y_1,\dots,y_p) \right| \leq \sum_{i=1}^{p} \left| F_n^i(z_i) - F^i(y_i) \right| \leq \tfrac{1}{2} p\varepsilon/p \quad ;$$

On en déduit que $\left| D_n(u_1,\dots,u_p) - D(u_1,\dots,u_p) \right| \leq \varepsilon$; d'où le résultat.-

Lemme (4.2): Si D est une fonction de dépendance associée à la fonction de répartition F de $(X_1,\dots,X_p)$, alors, si $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ sont p fonctions croissantes au sens large de $\mathbb{R}$ dans lui même, alors D est aussi une fonction de dépendance associée à $F(\varphi_1^{-1}(x_1),\dots,\varphi_p^{-1}(x_p))$, fonction de répartition de $\varphi_1(X_1),\dots,\varphi_p(X_p)$

Preuve: Evidente; on notera que $\varphi^{-1}(x)$ est généralement défini par:

$$\varphi^{-1}(x) = \sup\left\{ t \in \mathbb{R};\ \varphi(t) < x \right\} .-$$

On considère maintenant le cas de transformations linéaires; on pose:

...

Si $a_n = (a_{1,n},\dots,a_{p,n}) \in \mathbb{R}^p$, $b_n = (b_{1,n},\dots,b_{p,n}) \in \mathbb{R}^p$,

$(X - b_n)/a_n = ((X(1) - b_{1,n})/a_{1,n}, \dots, (X(p) - b_{p,n})/a_{p,n})$,

$a_n > 0$, si $\forall\, 1 \leq i \leq p$, $a_{i,n} > 0$.

On dit que les lois de X et Y sont de même type, s'il existe $a > 0$, tel que Y ait même loi que $aX + b$; on dit que le type de X est non dégénéré, si le type de chaque coordonnée n'est pas celui d'une loi concentrée en un point; on dit que le type de X_n converge vers le type de Y, s'il existe une suite (a_n, b_n) telle que $a_n X + b_n$ converge en loi vers Y.

On obtient le résultat suivant:

<u>Théorème</u> (4.1): Pour qu'une suite de v.a. de $\mathbb{R}^p$ aient un type limite non dégénéré, il faut et il suffit que chaque suite de composantes aient un type limite non dégénéré, et que la suite des fonctions de dépendance des v.a. ait une fonction de dépendance limite.

<u>Corollaire</u> (4.1): Dans le cas où la suite de v.a. est $\left\{ \sup_{1 \leq i \leq p} Y_i(1), \dots, \sup_{1 \leq i \leq p} Y_i(p) \right\}$ où $\left\{ Y_n(1), \dots, Y_n(p), n \geq 1 \right\}$ est une suite de v.a. indépendants de même loi, le type limite, existe si et seulement si, d'une part, chaque coordonnée appartient au domaine d'attraction des lois Λ, Φ_a, ou Ψ_a, d'autre part, la fonction de dépendance D appartient au domaine d'attraction d'une fonction de dépendance limite de la forme (3.34), avec les conditions (3.31) et (3.32). Une condition nécessaire et suffisante pour que D vérifie cette propriété est que:

$$\forall\, 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0, +\infty[,\quad \lim_{n \infty} n\, D\left(1 - \frac{z_1}{n}, \dots, 1 - \frac{z_p}{n}\right) \text{ existe ;}$$

Soit encore, d'une manière équivalente, si D^* est définie par (3.10):

$$\forall\, 1 \leq i \leq p,\ z_i \in [0, +\infty],\quad \lim_{n \infty} n\, D^*(z_1/n, \dots, z_p/n) \quad \text{existe.}-$$

<u>Remarques</u> (4.2): 1°) Le théorème limite des types de Khintchine ([11], ou [10], p.40-44) montre que, dans le cas univarié, le type limite, s'il existe est unique. Le corollaire (4.1) généralise ce résultat au cas multivarié. On peut également utiliser le théorème (4.1) pour obtenir des résultats de convergence pour des familles de transformations plus générales que les transformations affines.

2°) La structure de l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{D_n, n \geq 1\}$ n'est pas complètement déterminée. Il serait intéressant de vérifier s'il est ou non convexe, et si ce n'est pas le cas, quelle est sa structure réelle.

3°) En fait, le cas le plus fréquent de loi limite extrême, est le cas de l'indépendance asymptotique des extrêmes; ce cas est obtenu lorsque la fonction de dépendance limite est:

$$D_{\infty}(u_1,\dots,u_p) = u_1,\dots,u_p \text{ , correspondant à } L_{\infty}(z_1,\dots,z_p) = 0 \text{ ;}$$

pour ce cas, $L^*_{\infty}(z_1,\dots,z_p) = 0$, si au moins deux z_i sont finis, correspondant à $\mu_{k;i_1,\dots,i_k} = 0$ pour $k \geqslant 2$, et $\mu_{1;i}$ étant une mesure de Dirac au point $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

On déduit des théorèmes précédents (notamment (3.4)) la condition nécessaire et suffisante suivante pour l'indépendance:

Théorème (4.2) Pour que $\left\{ \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant p} X_i(1),\dots, \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant p} X_i(p)\right\}$ soient asymptotiquement indépendants (au sens que leur fonction de dépendance converge vers $u_1\dots u_p$), il faut et il suffit que, si:

$$\forall 1\leqslant i\leqslant p,\ \forall n\geqslant 1,\ a_{i,n} \text{ est tel que: } P(X(i)>a_{i,n}) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant P(X(i)\geqslant a_{i,n}),$$
$$\forall 1\leqslant i< j\leqslant p,\quad \lim_{n\infty}\ n\,P(X(i)\geqslant a_{i,n}, X(j)\geqslant a_{j,n}) = 0. \tag{4.4}$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que la condition d'indépendance asymptotique soit vérifiée pour tous les couples de coordonnées.–

Remarques (4.3): 1°) Par le théorème (3.1), il suffit de vérifier (4.4), pour $n = C^k$, $k\to+\infty$.–

2°) On peut se demander si le cas où les extrêmes multivariés ont une forme de dépendance limite ne coïncide pas avec celui où, au voisinage des points extrêmes du support, la v.a. est p.s. asymptotiquement liée par une relation fonctionnelle. Ce point n'est pas résolu à notre connaissance.–

3°) L'inférence statistique sur la mesure μ est délicate; nous donnerons des méthodes pour établir cette inférence dans une prochaine note, par des techniques non paramétriques.–

BIBLIOGRAPHIE

N.B. Pour une bibliographie plus étendue, voir Galambos, (7).

(1) ALFSEN, Compact convex sets and boundary integrals, Springer, 1971.

(2) BILLINGSLEY P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

(3) DEHEUVELS P., Majoration et minoration presque sûre optimale des éléments de la statistique ordonnée d'un échantillon croissant de variables aléatoires indépendantes, Rend.Acad.Lincei, Ser.VIII, Vol. LVI, f.5, 1974, p.707-719.

(4) FARLIE, The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution, Biometrika, 47, 1960,p.307-323.

(5) FINKELSHTEYN, On the limiting distribution of the extreme terms of a variational series of a two dimensional random quantity, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 91, 1953, p.209-211.

(6) FRECHET M., Sur les tableaux de corrélations dont les marges sont données, Ann. Univ. Lyon, Sec. A, Sér. 3, 14, 1951, p.53-77.

(7) GALAMBOS, The asymptotic theory of extreme order statistics, Wiley, 1978.

(8) GEFFROY J., Contributions à la théorie des valeurs extrêmes, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, Vol.7-8, 1958-1959, p.37-185.

(9) GNEDENKO, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Ann.Math., 44, 1943, p.423-453.

(10) GNEDENKO et KOLMOGOROV, Limits distributions for sums of independent random variables,Addison-Wesley (2ème édition), 1968.

(11) KHINTCHINE, Limit theorems for sums of independent random variables, Gonti, Moscou Léningrad, 1938.

(12) MORGENSTERN, Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen, Mitt. Math. Statist., 8, 1956, p.234-235.

(13) PARTHASARATHY K.R., Probability measures on metric spaces, Academic Press, 1967.

(14) SIBUYA, Bivariate extremal statistics, Ann. Inst. Stat. Math., 11, 1960.

(15) TIAGO DE OLIVEIRA J., Extremal distributions, Rev. Fac.Sci. Lisboa, 2,A, 1958. Bivariate and multivariate extreme distributions, dans PATIL, KOTZ, ORD, Statistical distributions in scientific work, Vol. 1, Reidel, 1975.

Reçu en Novembre 1978

Institut de Statistique des
Universités de Paris
Tour 45-55, E3, Université P.VI
4 Place Jussieu
75230 PARIS Cedex 05

7 Avenue du Château
92340 BOURG LA REINE