Une étude algébrique de l'analyse factorielle classique

M. Masson

UNE ETUDE ALGEBRIQUE DE L'ANALYSE FACTORIELLE CLASSIQUE.

M. MASSON.

Notre désir consiste en la détermination, à partir d'un système statistique vectoriel « individus-caractères » , d'une représentation algébrique approchée, définie à l'aide de la décomposition de la forme quadratique, exigée par la technique de l'analyse factorielle classique.

Il nous a semblé utile de mener cette étude de front avec celle de la décomposition, mieux connue, de l'analyse en composantes principales, afin d'en percevoir les analogies et les différences.

L'analyse en composantes principales, comme l'analyse factorielle classique, sont deux techniques ayant pour but d'appréhender de façon satisfaisante, dans une configuration de faible dimension, un phénomène descriptif multidimensionnel.

Cependant, alors que la représentation approchée du système en analyse en composantes principales se fait simplement par projection sur un sous espace selon une décomposition orthogonale, la représentation approchée déduite du traitement de l'analyse factorielle classique, procède d'un critère plus complexe bien souvent mal défini ou pas défini du tout dans les ouvrages traitant de la question.

Une définition précise de cette dernière décomposition : tel est le but recherché par le présent article.

Nous nous proposons donc d'indiquer les critères qui déterminent l'approximation choisie dans l'analyse en composantes principales, comme dans l'analyse factorielle classique. Nous essaierons de dégager l'importance de l'introduction d'une métrique euclidienne dans l'étude, cette importance différant sensiblement d'une technique à l'autre.

Nous indiquerons quels sont les traitements mathématiques nécessaires pour déterminer la décomposition souhaitée, en essayant au maximum d'adhérer aux critères objectifs fixés, et non à des équivalents (par exemple, critère de la variance maximale, plutôt que celui de l'inertie minimum).

Nous examinerons une procédure numérique possible pour dégager la décomposition optimale de la forme quadratique en analyse factorielle classique.

Nous dirons quelques mots sur l'utilisation simultanée des deux techniques : Analyse en composantes principales (A.C.P.) et Analyse factorielle classique (A.F.C.).

Enfin, nous essayerons sur un exemple très simple, de dégager des résultats différents suivant les deux techniques.

Il nous a paru cependant nécessaire, avant d'entamer cette étude, de revenir sur quelques définitions et notations pratiques en analyse de données.

1 - *NOTATIONS*

Le point de départ de toute analyse linéaire est la donnée d'un tableau X à p lignes et n colonnes, représentatif de p mesures faites sur n individus.

$$X = \begin{bmatrix} x_1^1 \ldots\ldots\ldots x_n^1 \\ \\ x_1^p \ldots\ldots\ldots x_n^p \end{bmatrix}$$

x_i^j étant la valeur prise par le j-è caractère sur le i-è individu.

Ce tableau conduit naturellement à une double structure vetorielle R^p et R^n :

- Chaque colonne du tableau détermine un vecteur colonne x_i repéré dans l'espace R^p, de dimension p, dit espace des individus, sur la base canonique.

- Chaque ligne du tableau détermine un vecteur colonne x^j repère dans l'espace R^n de dimension n, dit espace des caractères, sur la base canonique

Les bases canoniques de R^p et de R^n sont assimilées à des individus, fictifs de mesure nulle sur tout caractère, sauf un sur lequel la mesure est unitaire, pour ce qui concerne R^p, et à des caractères fictifs sur lesquels un seul individu a une mesure non nulle : la mesure unité, pour ce qui concerne R^n.

Les bases canoniques de R^p et R^n ainsi définies sont notées:

$$e_i \qquad i = 1,2, \ldots p$$

$$f^j \qquad j = 1,2, \ldots n$$

Il est utile de rappeler que pour des raisons de formalisme, on est amené à définir les espaces duaux de R^p et de R^n notés R^{p*} et R^{n*}, munis des bases canoniques :

$$\underline{e}_i^* \qquad i = 1,2, \ldots p$$

$$\underline{f}^{j*} \qquad j = 1,2, \ldots n$$

Ceci nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{bmatrix} x_i^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}^{1*}(\underline{x}_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{e}^{p*}(\underline{x}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^{i*}(\underline{x}^1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{f}^{i*}(\underline{x}^p) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^{1*}(\underline{x}^j) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{f}^{n*}(\underline{x}^j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_j^*(\underline{x}_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{e}_j^*(\underline{x}_n) \end{bmatrix}$$

Le tableau initial X , étant considéré comme matrice de l'application.

$$R^{n*} \longrightarrow R^p$$

munis de leurs bases canoniques précédentes, on a :

$$\underline{x}_i = X\ (\underline{f}^{i*})$$

X associe à toute forme linéaire : « coordonnée i è individu » , le iè individu.

On a de même :

$$\underline{x}^j = X'\ (\underline{e}_j^*)$$

X' (transposé de X) associant à toute forme linéaire : « coordonné $j^{\text{-è}}$, caractère » , le $j^{\text{-è}}$ caractère.

Les espaces R^p et R^n sont en général munis de métriques euclidiennes dont les représentations sur les bases canoniques sont notées M et N .

N est en général invariante suivant les analyses : cette métrique associe à tout caractère son écart type, ou la note E_p.

Soit p_i le poids de l'individu i (en général $p_i = 1/n, \forall i$)

$$E_p(\underline{x}^i, \underline{x}^i) = \text{covariance}\,(\underline{x}^i, \underline{x}^i) = \sum_{k=1}^{n} p_k\,(x_k^i - \overline{x}^i)\,(x_k^j - \overline{x}^j)$$

En développant :

$$E_P = \begin{bmatrix} p_1 - p_1^2 & -p_1 p_2 & \ldots & -p_1 p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_n p_1 & -p_n p_2 & \ldots & p_n - p_n^2 \end{bmatrix}$$

Si $\underline{g} \in R^p$ désigne le centre de gravité des individus :

$$\underline{g} = \sum_{i=1}^{n} p_i \underline{x}_i$$

Alors :

$$\underline{g} = 0 \Longleftrightarrow E_P = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} \text{ noté } D_P$$

Quand les caractéres sont centrés, la métrique classique sur R_n est D_P.

Rappelons aussi que la forme quadratique d'inertie, notée V, est une forme bilinéaire symétrique sur R^{p^*}, non nécessairement définie (quoiqu'en général, quand $n \geqslant P + 1$, elle le soit).

V est la métrique induite sur R^{P*}, à partir de E^P, par l'application linéaire X, de la façon suivante :

$$E_P = (\underline{x}^i, \underline{x}^j) = V(e_i^*, e_j^*) \quad \forall \ i \text{ et } j$$

donc :

$$E_P(X' \underline{e}_i^*, X' \underline{e}_j^*) = V(\underline{e}_i^*, \underline{e}_j^*) \quad \forall \ i \text{ et } j.$$

D'où l'égalité matricielle :

$$V = XD_P X'$$

quand les caractères sont centrés, ce que nous supposerons dans la suite. V n'est autre que la matrice de variance du n- échantillon sur les p variables étudiées. Elle permet le calcul de toute matrice de variance d'un échantillon déduit du précédent par une transformation linéaire.

Supposons en effet que :

$$\underline{z}_i = A(\underline{x}_i) \quad i = 1,2,\ldots n$$

Cette transformation équivaut à un changement de base dans R^p : A^{-1} (pour les écritures évidemment), qui induit dans R^{p*} un changement de base A'.

La forme quadratique V sur R^{p*}, s'exprime matriciellement dans la nouvelle base sous la forme :

$$(A')' \, VA' = AVA'$$

Ce que l'on peut exprimer des deux façons suivantes :

AVA' est la matrice de variance associée aux nouveaux individus $\underline{z}_i$, ou bien aux nouveaux caractères $\underline{z}^j$:

C'est de toute façon la forme quadratique d'inertie associée au tableau Z tel que :

$$Z = AX$$

Il nous reste à dire quelques mots d'un type de notations moins classiques, mais fort utiles dans ce genre de problèmes.

Nous savons qu'une forme bilinéaire symétrique définie et positive f, étant définie sur un espace vectoriel, un opérateur g est dit symétrique, s'il vérifie :

$$f(g(x), y) = f(x, g)(y)) \ \forall \ x,y$$

Un opérateur h est dit orthogonal s'il vérifie :

$$f(\ h(x)\ ,\ h(y)\ ) = f(x,y) \ \forall \ x,y$$

maintenant, évidemment, les propriétés matricielles qui caractérisent ces opérateurs dépendant de la base à laquelle l'espace est rapporté.

Si la base est orthonormée pour f, la matrice représentative du produit scalaire est la matrice identité ; A et B étant les matrices de g et h, on a :

$$(A\ (x)\ )'\ I\ y \ = \ x'\ I\, A(y) \qquad \forall \ x,y$$

ce qui donne :

$$A' = A$$

définition classique d'une matrice symétrique.

$$(B\ (x)\ )'\ I\ B\ (y) \ = \ x'\ I\ y \ \ \forall \ x,y$$

donc, un opérateur orthogonal étant inversible,

$$BB' = I \quad \text{donc} \quad B' = B^{-1}$$

définition classique d'une matrice orthogonale.

Au contraire, si la représentation matricielle dans une base quelconque, de f, est M, les propriétés précédentes deviennent :

$$(A\ (x)\ )'\ M\ y \ = \ x'\ M\ (A\ (y)\ ) \ \forall \ x,y$$

donc :

$$A'M = MA$$

On dira que A est une matrice «M-symétrique».

De même,

$$(B\ (x)\ )'\ M\ (B(y)\ ) \ = \ x'\ M\, y \quad \forall \ x,y$$

donc :

$$B'M = MB^{-1}$$

On dira que B est une matrice «M-orthogonale».

Il est clair que, toute forme bilinéaire symétrique définie et positive pouvant se décomposer sous la forme :

$$M = T'T$$

avec T régulière, et triangulaire si on le désire, le changement de base T^{-1} détermine un repère orthonormé. Cela revient à dire que toute matrice M-symétrique ou M- orthogonale devient symétrique ou orthogonale après changement de base T^{-1}

Remarquons que si S est une matrice de « changement de base M-orthonormée » , c'est-à-dire, si S fait passer d'une base quelconque où la métrique est M à une base où la métrique est I, S est composée en colonne des vecteurs de la nouvelle base, donc vérifie

$$S'MS = I$$

ce n'est pas une matrice M orthogonale.

Une matrice M orthogonale, employée en tant que matrice de changement de base, fait passer d'une base dans laquelle la métrique est M, à une autre de même type :

$$S'MS = M$$

2 – *CRITERES DE DECOMPOSITION DU TABLEAU X EN ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES ET EN ANALYSE FACTORIELLE CLASSIQUE.*

Comme nous l'avons signalé, le point de départ de toute analyse de données est un tableau X_I^J représentant n individus ou p caractères suivant la structure vectorielle choisie.

L'A.F.C. comme l'A.C.P. recherchent une décomposition du tableau sous la forme :

$$X_I^J = Y_I^J + Z_I^J$$

c'est-à-dire à la fois la décomposition de tout individu sous la forme :

$$\underline{x}i = \underline{y}i + \underline{z}i \qquad i = 1,2\ldots n$$

et la décomposition de tout caractères sous la forme :

$$\underline{x}^j = \underline{y}^j + \underline{z}^j \qquad j = 1,2,\ldots p$$

Ces techniques ayant pour but une visualisation du phénomène, le critère commun sera de réduire sensiblement (pour ne pas dire au maximum) la dimension du sous espace de R^p contenant les $\underline{y}i$, tout en conservant le maximum de l'information souhaitée.

L'intérêt quant à l'information préservée différencie les deux techniques.

1°) Analyse en composantes principales.

On désire, en A.C.P., déterminer, *dans une géométrie définie sur* R^p par *une métrique* M, les $\underline{y}i$ projections des $\underline{x}i$ sur un sous espace de dimension $k < p$ fixé, parallèlement à une direction fixée. Le sous espace répond au critère suivant : parmi tous les espaces de dimension k, c'est celui qui contient la dispersion maximum du phénomène ; son supplémentaire, parallèlement auquel se fait la projection, est choisi de telle façon que dans la décomposition engendrée :

$$X_I^J = Y_I^J + Z_I^J$$

les caractères $\underline{z}^j$ et $\underline{y}^j$ en découlant soient non correlés, ce qui se traduit sur les formes quadratiques associées aux Y et aux Z par l'écriture :

$$V = V_1 + V_2$$

Le critère choisi dans l'approximation est celui de la meilleure préservation de la variance.

2°) Analyse factorielle classique.

Si V est la forme quadratique d'inertie associée au tableau X

$$V = XD_PX'$$

on pose à priori

$$V = V_1 + V_2$$

V_1 et V_2 étant deux formes quadratiques (symétriques et positives) avec

1 – V_1 est de rang k fixé $< p$

2 – V_2 est diagonale, définie.

Il s'agit donc de trouver la décomposition

$$X_I^J = Y_I^J + Z_I^J$$

à laquelle sont attachées les formes quadratiques précédentes.

En raisonnant sur les caractères, cela revient à dire que nous cherchons à déterminer :

$$\underline{x}^j = \underline{y}^j + \underline{z}^j \qquad j = 1,2, \ldots P$$

avec $\underline{y}^j$ non correlé à $\underline{z}^k$ $\quad j, k = 1, 2, \ldots p$

Les $\underline{y}^j$ étant combinaisons linéaires de k vecteurs fixés dans R^n, les facteurs.

De plus on désire que $\underline{z}^j$ soit non correlé à $\underline{z}^k$ $\quad j \neq 1,2 \ldots p$

La non corrélation des résidus entre eux et avec les caractères préservés $\underline{y}^j$ est significative du critère choisi :

l'approximation cherche à éliminer le bruit, c'est-à-dire une part d'indépendance apportée par chaque caractère relativement aux autres et surdimensionnant le phénomène par une information non correlée au reste.

Le critère choisi dans l'approximation est celui de la préservation des liaisons.

3 – ROLE DE LA METRIQUE EUCLIDIENNE.

La définition d'une métrique s'impose toujours lorsqu'on désire apprécier les distances, qui plus est, lorsqu'on désire les visualiser.

Donc dans l'une ou l'autre des deux techniques présentées, la définition d'une métrique euclidienne sera nécessaire dès qu'il sera question d'apprécier les distances sur un schéma.

Cependant, alors qu'en A.C.P., du choix de la métrique dépend la décomposition du tableau, en A.F.C., celle-ci est absolument indépendante de toute métrique, elle dépend simplement de l'hypothèse.

$$V = V_1 + V_2$$

Comme nous l'avons précisé précédemment, l'A.C.P. va rechercher dans la géométrie définie sur R^p par une métrique M (forme matricielle sur la base canonique), les axes engendrant l'espace de dimension k, associés à des caractères non correlés et possédant les variances successives maximum. Qu'entendons-nous par « variance maximum, au sens de la géométrie définie sur R^p par M » ?

Il est clair que la matrice de variance covariance définie sur les caractères initiaux :

$$V = XD\,pX'$$

si elle est essentielle, parce que contenant l'information relative aux mesures faites, ne présente en définitive qu'un intérêt arbitraire puisque tout changement de base dans R^p : A (qui peut correspondre par exemple à un changement d'unités dans les mesures faites) détermine une nouvelle matrice de variance-covariance : AVA'.

En fait, les formes quadratiques d'inertie intéressantes sont celles définies sur les bases orthonormées pour la métrique M, celles qui « lisent » le phénomène dans la géométrie désirée.

Or, nous savons que tout changement de base T^{-1} (avec $M = T'T$) permet de rapporter R^p à un repère orthonormé pour M, au sein duquel, donc, la forme matricielle de la métrique est I.

$$((T^{-1})'\,MT^{-1} = I).$$

La forme quadratique d'inertie prend dans cette base la forme :

$$TVT'$$

TVT' peut être considéré comme la matrice de variance-covariance associé aux P caractères éléments de R^n :

$$X'M\,\underline{fi} \qquad i = 1,2,\ldots p$$

Si $\underline{fi} = T^1\ (\underline{ei})$ est la nouvelle base.

M $(\underline{fi})$ étant donc la forme linéaire « coordonnée M - orthogonale sur $\underline{fi}$ »

Ces p caractères peuvent donc s'écrire :

$$X'T'\,\underline{ei} \qquad i = 1,2,\ldots p$$

La technique de l'A.C.P. consiste à choisir parmi l'ensemble des bases orthonormées pour la métrique M, celle qui possède la direction suivant laquelle la variance est maximum.

Il suffit donc de trouver le vecteur $\underline{u}_1$ de R^p normé pour M qui maximise TVT' $(\underline{u}_1^* . \underline{u}_1^*)$, si $\underline{u}_1^*$ est le vecteur dual de $\underline{u}_1$.

Ensuite, dans le sous espace orthogonal, pour M, à $\underline{u}_1$, on recommence l'opération, ce qui détermine un vecteur $\underline{u}_2$ et ainsi de suite . . .

Ce procédé permet la décomposition de R^p sous la forme :

$$R^p = E_1 \oplus E_2$$

$$E_1 = \oplus \; \underline{u}_i \qquad i = 1,2, \ldots k$$

$$E_2 = \oplus \; \underline{u}_i \qquad i = k + 1 \ldots p$$

Ainsi, tout vecteur $\underline{xi}$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\underline{xi} = \underline{yi} + \underline{zi} \qquad i = 1,2, \ldots p$$

$$\underline{yi} \in E_1 \qquad \underline{zi} \in E_2$$

D'où la décomposition du tableau X_I^J sous la forme :

$$X_I^J = Y_I^J + Z_I^J$$

Il reste évidemment à montrer que cette décomposition satisfait à la condition désirée : les formes quadratiques associées

$$V = X D_P X'$$

$$V_1 = Y D_P Y'$$

$$V_2 = Z D_P Z'$$

Vérifient la relation :

$$V = V_1 + V_2$$

A cette fin, il suffira de vérifier que E_1 et E_2 sont non seulement des sous espaces M-orthogonaux relativement à la base canonique e_i , mais également des sous espaces V^{-1} - orthogonaux.

Ce résultat découle du théorème suivant :

THEOREME :

Si E se décompose en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$

alors :

$V = V_1 + V_2 \Longleftrightarrow E_1$ et E_2 sont 2 sous espaces V^{-1} orthogonaux

Démonstration : $E = E_1 \oplus E_2$

Soient A et $(I\text{-}A)$ les projecteurs associés à cette décomposition.

Alors : $V_1 = AVA'$ et $V_2 = (I\text{-}A)\ V\ (I\text{-}A)'$

Donc :

$$V = V_1 + V_2 \Longleftrightarrow 2\ AVA' = VA' + AV$$

Or A étant idempotent ceci implique :

$$2\ AVA' = AVA' + AV \Longleftrightarrow AVA' = AV$$

$$2\ AVA' = AVA' + VA' \Longleftrightarrow AVA' = VA'$$

Donc :

$$V = V_1 + V_2 \Longleftrightarrow AVA' = AV = VA'$$

$$\Longleftrightarrow V^{-1}A = A'V^{-1} = (V^{-1}A)'$$

$$\Longleftrightarrow A \text{ est } V^{-1} \text{ symétrique.}$$

A étant idempotent et V^{-1} symétrique, c'est donc le projecteur associé à la décomposition en somme directe des deux sous espaces V^{-1} orthogonaux, E_1 et E_2.

C Q F D

En conclusion, la base choisie dans R^p pour décomposer le phénomène, est celle qui, parmi toutes les bases orthonomées pour M, est également orthogonale pour V^{-1}.

Le rôle de la métrique euclidienne M définie sur R^p apparaît clairement dans la détermination de ses espaces projetants et projetés.

4 – TRAITEMENT MATHEMATIQUE.

1°) Analyse en composantes principales :

Ainsi que nous l'avons indiqué, la première phase consiste à trouver une base M-orthonormée de R^p qui contienne la direction à variance maximum.

Le calcul se fait, non pas dans la base canonique $\underline{e}i$ $i = 1,2, \ldots p$ mais dans la base $\underline{f}i$ $i = 1,2, \ldots p$ après changement de base T^{-1}.

On note $\underline{u}^* = I\ (\underline{u})$ l'élément dual de $\underline{u}$ (I étant l'application canonique de R^p dans R^{p*}).

Il faut donc chercher le vecteur $\underline{u}$ normé maximisant TVT' $(\underline{u}^*, \underline{u}^*)$

Soit $\underline{u}_1^*, \underline{u}_2^*, \ldots \underline{u}_p^*$ la base orthonomée de R^{p*} dans laquelle TVT' est diagonale, soit S le changement de base associé.

S est une matrice orthogonale, donc la base $\underline{u}i$ de R^p, duale de $\underline{u}i^*$ est une des bases admissibles préservant la géométrie imposée, car le passage de $\underline{f}i$ $i = 1,2, \ldots p$ à $\underline{u}i$ $i = 1,2, \ldots p$ se fait par $(S')^{-1}$ qui est encore une matrice orthogonale.

On a :

$$\underline{u}^* = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ \underline{u}_i^*$$

Avec la condition de normalisation :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 1$$

Ceci entraîne :

$$TVT'\ (\underline{u}^*, \underline{u}^*) = TVT'\ \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ \underline{u}_i^*\ ,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ \underline{u}_i^* \Big)$$

Ce qui donne, en notation produit scalaire.

$$< \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ TVT' \ \underline{u}i^* \ , \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ ui^* >$$

$$= < \sum_{i=1}^{p} \lambda i \ \alpha i \ \underline{u}i, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha i \ \underline{u}i^* > = \sum_{i=1}^{p} \alpha i^2 \ \lambda i$$

Ceci si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, sont les éléments diagonaux de TVT' dans la base $\underline{u}i \quad i = 1,2, \ldots p$

Cette dernière quantité est maximum sous la contrainte $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 1$

quand $\underline{u}^* = \underline{u}_i^*$

Remarquons maintenant que si $\underline{u}i^*$ et $\underline{u}j^*$ sont deux vecteurs de la base précédente, associés aux valeurs λi et λj alors :

$$TVT' \ \underline{u}i^* = \lambda i \ \underline{u}i$$

$$TVT' \ \underline{u}j^* = \lambda j \ \underline{u}j$$

Donc :

$$(TVT')^{-1} \ (\underline{u}i, \underline{u}j) = <(TVT')^{-1} \ \underline{u}i, \underline{u}j>$$

En reprenant une égalité précédente, ceci égale :

$$\frac{1}{\lambda i} < (TVT')^{-1} \ (TVT') \ \underline{u}i^*, \ uj > = \frac{1}{\lambda i} < \underline{u}i^*, \underline{u}j > = \delta_i^j \ / \lambda i$$

Ceci montre que les vecteurs $\underline{u}i$ forment une base non seulement I-orthonormée mais aussi $(TVT')^{-1}$ orthogonale de R^p.

Cette propriété traduite dans la base canonique $\underline{e}i \quad i = 1,2, \ldots p$ s'exprime aussi :

La base ui $i = 1,2, \ldots p$ est M-orthonormée et V^{-1} orthogonale

Une proposition précédemment démontrée montre que dans la décomposition V^{-1} orthogonale :

$$R^p = \Delta u1 \oplus \left\{ \oplus \Delta \ \ ui \quad i = 2,3,\dots p \right\}$$

Les formes quadratiques d'inertie associées aux $(\underline{x}i)_1$, $(yi)_1$, $(zi)_1$ vérifient :

$$(V)_1 = (V_1)_1 + (V_2)_1$$

Un raisonnement semblable à celui utilisé au début du paragraphe montre aisément que au sein de son espace :

$$\oplus \left\{ \Delta \quad \underline{u}i \qquad i = 2,3,\dots p \right\}$$

l'axe $\Delta \ u_2$ est celui qui possède la dispersion maximum.

Dans la décomposition :

$$R^p = \left\{ \Delta \ \underline{u}_1 \ \oplus \ \Delta \ \underline{u}_2 \right\} + \left\{ \oplus \Delta \ \underline{u}_i \quad i = 3,4\dots p \right\}$$

les formes quadratiques d'inertie associés aux $(\underline{x}i)_2$, $(\underline{y}i)_2$, $(\underline{z}i)_2$.

Vérifient :

$$(V)_2 = (V_1)_2 + (V_2)_2$$

En définitive si l'on note :

$$E_1 = \oplus \ \underline{u}i \qquad i = 1,2,\dots k$$

$$E_2 = \oplus \ \underline{u}i \qquad i = k+1, k+2, \dots p$$

la décomposition du tableau X^J_I sous la forme

$$X^I_J = Y^I_J + Z^J_I$$

avec $\underline{xi} = \underline{y}i + \underline{z}i$

$\underline{y}i \in E_1$

$\underline{z}i \in E_2$

est la solution au problème.

On retrouve naturellement les résultats habituels : recherche de vecteurs et valeurs propres de l'endomorphisme sur R^p : VM.

En effet TVT' et VM = VT'T ont mêmes valeurs propres (propriété classique) et leurs vecteurs propres se déduisent l'un de l'autre par le changement de base T^{-1}.

$$TVT' \underline{x}_1^* = \lambda_1 x_1$$

$$TVT' \underline{x}_2^* = \lambda_2 \underline{x}_2$$

avec $< \underline{x}_1^* , x_2 > = 0$

alors si
$$\underline{q}_1 = T^{-1} \underline{x}1$$

$$\underline{q}_2 = T^{-1} \underline{x}2$$

$$VM \ \underline{q}1 = \lambda_1 \ \underline{q}1$$

$$VM \ \underline{q}2 = \lambda_2 \ \underline{q}2$$

$$M \ (q_1 \cdot q_2) = 0$$

qui sont les équations classiques de l'A.C.P.

REMARQUE : Il faut être attentif au fait que T est employée précédemment soit comme matrice de changement de base sur R^p, soit comme application $R^p \longrightarrow R^p$

$$M : R^p \longrightarrow R^p \quad \text{et} \quad M = T'IT$$

$$R^p \xrightarrow{T} R^p \xrightarrow{I} R^{p*} \xrightarrow{T'} R^p.$$

Les résultats s'interprètent remarquablement sous forme tensorielle en supposant que :

$$\underline{x}i = \sum_{\ell=1}^{p} x_i^{\ell} \; \underline{e}_{\ell} = \sum_{\ell=1}^{p} qi^{\ell} \; \underline{u}_{\ell}$$

On a par définition :

$$V = \sum_{i=1}^{n} p\,i \; \underline{x}i \otimes \underline{x}i$$

d'où

$$V = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} pi \; x_i^{\ell} \; x_i^{m} \right) \underline{e}_{\ell} \otimes \underline{e}_{m}$$

et

$$V = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p} pi \; qi^{\ell} \; qi^{\ell} \right) \underline{u}_{\ell} \otimes \underline{u}_{m}$$

or les vecteurs $\underline{q}^{\ell}$ $\ell=1,2,\ldots n$, éléments de R^n sont par construction Dp - orthogonaux et de norme $\sqrt{\lambda\, p}$

Donc :

$$V = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \; \underline{u}_\ell \otimes \underline{u}_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \; \underline{u}_\ell \otimes \underline{u}_\ell + \sum_{\ell=k+1}^{p} \lambda_\ell \; \underline{u}_\ell \otimes \underline{u}_\ell .$$

$$= V_1 + V_2$$

avec la décomposition :

$$\underline{x}i = \sum_{\ell=1}^{k} q_i^\ell \; \underline{u}_\ell + \sum_{\ell=k+1}^{p} q_i^\ell \; \underline{u}_\ell = \underline{y}i + \underline{z}i.$$

2°) Analyse factorielle classique.

Le problème consiste en la recherche d'une composition du tableau X_I^J sous la forme :

$$X_I^J = Y_I^J + Z_I^J$$

de telle façon que les formes quadratiques associées vérifient

$$V = V_1 + V_2$$

V_1 et V_2 étant fixées.

En général la détermination de V_1 et V_2 à partir de V fait partie d'une recherche préalable dont les critères sont les suivants : trouvez deux matrices symétriques et positives qui soient telles que V_2 soit diagonale inversible et V_1 de rang minimum.

Nous indiquerons dans le paragraphe suivant un processus numérique possible pour résoudre le problème.

Ici, on suppose V_1 de rang k , et V_2 diagonale inversible données, et on se préoccupe de décomposer X_I^J.

On suppose toujours les modèles vectoriels R^p et R^n associés au tableau X existant.

Ainsi, nous recherchons dans R^p une décomposition du nuage des $\underline{xi}$ en deux nuages : celui des $\underline{yi}$ et celui des $\underline{zi}$ $(i = 1,2, \ldots n)$ de telle façon que

$$\underline{xi} = \underline{yi} = \underline{zi}$$

et que les formes quadratiques d'inertie associées au nuage des $(\underline{y}i)$ et des $(\underline{z}i)$ soient V_1 et V_2

Le problème se traite simplement après avoir pris la précaution de rapporter R^p à une nouvelle base.

Soit $V_2^{-1/2}$ une matrice diagonale vérifiant

$$V_2^{-1/2} \; V_2^{-1/2} = V_2^{-1}$$

Effectuons à partir de la base canonique de R^p, le changement de base défini par $(V_2^{-1/2})^{-1}$.

Les formes quadratiques V , V_1 et V_2 rapportées à la base canonique prennent dans la nouvelle base les formes matricielles suivantes :

$$W = V_2^{-1/2} V (V_2^{-1/2})'$$

$$W_1 = V_2^{-1/2} V_1 (V_2^{-1/2})'$$

$$W_2 = V_2^{-1/2} V_2 (V_2^{-1/2})' = 1$$

On a donc l'égalité :

$$W = W_1 + I$$

Soit T le changement de base orthogonal qui diagonalise W et soit $\underline{ui}$ la base ainsi définie.

$$T^{-1}WT = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & O \\ 0 & . & \\ & & \lambda p \end{bmatrix} = (T^{-1})\,W\,(T^{-1})'$$

Il est clair que

$$T^{-1}\,W_1 T = D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1\text{-}1 & & 0 \\ & \lambda_2\text{-}1 & \\ & & \cdot\lambda_k\text{-}1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = (T^{-1})W_1(T^{-1})'$$

Ceci car V_1 comme W_1 comme D_1 sont de rang k.

Dans la base $\underline{ui}$ $i = 1,2,\ldots p$; la décomposition des formes quadratiques s'écrit donc :

$$D = D_1 + I$$

De même qu'en analyse en composantes principales, l'interprétation tensorielle d'une telle décomposition se fait de la façon suivante :

si $$\underline{xi} = \sum_{\ell=1}^{p} x_i^{\ell}\,\underline{e\ell} = \sum_{\ell=1}^{p} q_i^{\ell}\,\underline{u\ell}$$

on a par définition :

$$V = \sum_{i=1}^{n} pi\ \underline{xi} \otimes \underline{xi}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} pi\, qi^{m}\, qi^{\ell} \right) \underline{u}_{\ell} \otimes \underline{u}_{m}$$

Or comme nous le savons (A.C.P.) $$\sum_{i=1}^{n} pi\ q_i^{\ell}\ q_i^{m} = \delta_{\ell}^{m}\ \lambda_{\ell}.$$

Donc :

$$V = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \; \underline{u}_\ell \otimes \underline{u}_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} (\lambda_\ell - 1) \; \underline{u}_\ell \otimes \underline{u}_\ell + \sum_{\ell=1}^{p} \underline{u}_\ell \otimes \underline{u}_\ell$$

$$= \qquad V_1 \qquad + \qquad V_2$$

Il est clair que pour la métrique $M = I$, l'analyse en composante principale du nuage des $(\underline{x}i)$ $(i = 1,2,\ldots n)$ et celle du nuage des $(\underline{y}i)$ $i = 1,2,\ldots n$ aura les mêmes axes principaux, les variances correspondantes étant diminuées de 1 unité (dans le système déduit de la base canonique par changement de base $V_2^{-1/2}$ bien entendu !).

Ceci montre en particulier que k valeurs λ_i sont strictement supérieures à 1, alors que les p-k dernières égalent 1.

Considérons maintenant le changement de base global, S, qui conduit des bases $\underline{\ell}i$ à $\underline{u}i$ $i = 1,2,\ldots p$.

On a évidemment :

$$S = V_2^{-1/2 \; -1} \; T = V_2^{\,1/2} \; T$$

Ce qui entraîne les égalités suivantes :

$$\underline{x}_i = \sum_{j=1}^{p} x_i^j \; \underline{e}_j = \sum_{\ell=1}^{p} q_i^\ell \; \underline{u}_\ell$$

avec

$$x_i^j = \sum_{m=1}^{p} s_i^m \; q_i^m$$

si

$$S = s_i^m \quad i = 1,2,\ldots p \quad m = 1,2,\ldots p$$

Or nous savons (A.C.P.) que les $\underline{q}^j$ forment dans R^n (rapporté à sa base canonique), des caractères non correlés de norme λ_j.

$$D_p\,(\underline{q}^j, \underline{q}^\ell) = \delta_j^\ell \; \lambda_\ell$$

Par ailleurs les vecteurs inconnus $(\underline{y}i)$ et $(\underline{z}i)$ $i = 1,2,\ldots n$ s'écrivent :

$$\underline{y}i = \sum_{\ell=1}^{k} r_i^\ell \; \underline{u}\ell$$

avec

$$y_i^j = \sum_{m=1}^{p} s_j^m \; r_i^m$$

et

$$\underline{z}i = \sum_{\ell=1}^{p} t_i^\ell \; \underline{u}\ell$$

avec

$$z_i^j = \sum_{m=1}^{p} s_i^m \; t_i^m$$

Il est clair que la forme quadratique associée au tableau Q_I^J est :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda p \end{bmatrix}$$

Relativement à la base ui i = 1,2, . . . p , c'est-à-dire après changement de base S , la décomposition du tableau s'écrit :

$$Q_I^J = R_I^J + T_I^J$$

avec

$$SQ_I^J = X_I^J$$

$$SR_I^J = Y_I^J$$

$$ST_I^J = Z_I^J$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} (\underline{q}^1)' \\ \vdots \\ (\underline{q}^k)' \\ (\underline{q}^{k+1})' \\ \vdots \\ (\underline{q}^p)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{r}^1)' \\ \vdots \\ (\underline{r}^k)' \\ (\underline{0})' \\ \vdots \\ (\underline{0})' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\underline{t}^1)' \\ \vdots \\ (\underline{t}^k)' \\ (\underline{q}^{k+1})' \\ \vdots \\ (\underline{q}^k)' \end{pmatrix}$$

avec les relations suivantes imposées par les formes quadratiques associées :

$$D_p(\underline{r}^i, \underline{t}^j) = 0 \qquad i, j = 1,2, \dots k$$

$$D_p(\underline{r}^i, \underline{q}^\ell) = 0 \qquad i=1,2, \dots k \; ; \; \ell=k+1, \; k+2, \dots p$$

$$D_p(\underline{r}^i, \underline{r}^j) = \delta_i^{\,j}(\lambda_i - 1) \qquad i, j = 1,2, \dots k$$

$D_p(\underline{t}^i, \underline{t}^j) = \delta_{ij}$ $\qquad i, j = 1,2, \ldots k$

$D_p(\underline{t}^i, \underline{q}^j) = 0$ $\qquad i=1,2, \ldots k\ ;\ j=k+1, k+2, \ldots p$

$D_p(\underline{q}^i, \underline{q}^j) = \delta_{ij}\ \lambda_i$ $\qquad i, j = k+1, \ldots p$

Le problème initial devient donc le suivant : trouver dans R^n, 2k vecteurs $\underline{r}^1, \ldots \underline{r}^k$; $\underline{t}^1, \ldots \underline{t}^k$, qui soient 2 à 2 D_p orthogonaux et de normes fixées par les contraintes précédentes, sachant qu'ils doivent être D_p- orthogonaux aux vecteurs $\underline{q}^{k+1}, \ldots \underline{q}^p$ (eux-mêmes D_p - orthogonaux par construction), et qu'ils doivent vérifier :

$$\underline{r}^i + \underline{t}^i = \underline{q}^i \text{ connu} \qquad i = 1,2, \ldots p$$

Le problème n'a de solution que si $n \geqslant 2k+p-k=p+k$.

Dans ce cas la solution n'est pas unique, car il existe une infinité de solutions quand $n \geqslant p+k$ par rotation autour de l'axe somme.

Les $(\underline{y}i)$ $i = 1,2, \ldots n$ s'obtiennent facilement par changement de base S^{-1}.

$$\underline{y}i = S\ \underline{r}i \qquad i = 1,2, \ldots n$$

Puis les $\underline{z}i$, par différence $\underline{x}i - \underline{y}i = \underline{z}i$ $\qquad i = 1,2, \ldots n.$

Ceci résoud entièrement notre problème.

REMARQUES IMPORTANTES.

L'application $\underline{x}i \longrightarrow \underline{y}i$ n'est pas linéaire.

En effet, faisons l'homothétie :

$$\underline{X}_i = \mu\ \underline{x}i = \sum_{j=1}^{p} Q_i^{\,j}\ \underline{u}j = \sum_{j=1}^{p} \mu\, q_i^{\,j}\ \underline{u}_j$$

Soit $\underline{Y}i = \sum_{j=1}^{p} p_i^{\ j} \ \underline{u}_j$ l'image de $\underline{X}i$ par l'application précédente

On a par hypothèse :

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \ q_i^{j\,2} \qquad\qquad \lambda_j \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} pi \ \ r_i^{\ j\,2}$$

$$\mu^2 \quad \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} pi \ Q_i^{\ j2} \qquad \mu^2 \ \lambda_j \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} pi \ P_i^{j\,2}$$

Ceci montre que :

$$P_i^{\ j} \neq \mu \ r_i^{\ j}$$

Donc que

$$Y_i \neq \mu \ y_i$$

Ce qui prouve que l'application n'est pas linéaire ; cette remarque n'est pas étonnante étant donné la nature essentiellement quadratique des contraintes liant $\underline{x}i$ à $\underline{y}i$.

C'est une différence fondamentale avec l'A.C.P. où l'application $\underline{x}i \longrightarrow \underline{y}i$ non seulement était linéaire mais encore était une projection.

Conséquence : L'application $\underline{x}i \longrightarrow \underline{y}i$ n'étant pas linéaire, il n'y a aucune raison que, partant de caractères $\underline{x}^i$ centrés, on obtienne des caractères $\underline{y}^i$ centrés.

Il en résulte que la métrique employée dans R^p doit être E_p et non D_p , car seule E_p assure la non-corrélation souhaitée quand les caractères ne sont pas centrés.

Cependant (sauf dans le cas où $n = p+k$ exactement), on peut choisir parmi l'ensemble des solutions celles qui sont centrées, c'est-à-dire que l'on impose aux 2 k vecteurs cherchés, d'être orthogonaux au vecteur $\underline{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n$.

Il faut bien entendu pour cela que $n \geqslant p+k+1$

A cette condition l'emploi de D_p est justifié.

5 – *UNE METHODE NUMERIQUE.*

Nous avons laissé du côté le problème de la détermination de la décomposition optimale de la forme quadratique V, c'est-à-dire de la recherche de la matrice symétrique et positive V_1 de rang minimum telle que

$$V\text{-}V_1 = V_2$$

soit définie positive et diagonale.

Appelons a_{ii}^2 les éléments diagonaux de V_2, inconnus.

Effectuons le changement de base $V_2^{-1/2}$ (notation antérieure) les formes deviennent :

$$W = W_1 + 1$$

Il est clair que si λ est valeur propre de W, λ-1 est valeur propre de W_1 et doit par hypothèse être $\geqslant 0$.

La matrice V_2 $(a_{ii}2)$ cherchée doit déterminer une matrice M.

$$W = \begin{bmatrix} 1/_{a_{11}} & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & 1/_{a_{pp}} \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 1/_{a_{11}} & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & 1/_{a_{pp}} \end{bmatrix}$$

qui soit telle que le plus grand nombre possible de ses valeurs soit 1 , sous la contrainte qu'elles soient toutes supérieures à 1 Ceci assurera bien un rang minimum à :

$$V_1 = V - V_2$$

Soient donc $\lambda_1 (a_{11}, a_{22} \ldots a_{pp}), \ldots \lambda_p (a_{11}, a_{22} \ldots a_{pp})$, les valeurs propres de la matrice : W de terme général $(a_{ii}\ v_{ij}\ a_{jj})$ (si v_{ij} est le terme général de V).

La technique numérique consiste à rechercher les valeurs (a_{ii}) assurant le plus grand nombre possible de λ_i égaux à 1 , parmi ceux qui permettent $\lambda_i \geqslant 1$.

6 – UTILISATION SIMULTANEE DES DEUX TECHNIQUES.

Un rang k trop élevé pour la matrice V_1 en analyse factorielle classique, et l'impossibilité de diminuer ce rang, impose pour la visualisation des (yi) = 1,2, . . .n une nouvelle restriction de dimension qui est obtenue par l'analyse en composantes principales du nuage des $(\underline{y}i)$ i = 1,2, . . . n avec une métrique appropriée au problème.

Réciproquement, un bruit résiduel trop important (c'est-à-dire des résidus $\underline{z}^i$ trop correlés) dans une analyse en composantes principales de qualité moyenne, peut être nuisible.

On aura alors souvent avantage à faire subir aux axes principaux une rotation qui laissera inchangé l'espace principal préservé mais qui donnera des résidus moins fortement correlés. (étant bien entendu que dans le meilleur des cas, la matrice V_2 pourra être diagonale, mais en aucune façon inversible, son rang étant p-k , si k est la dimension du sous espace préservé).

Quand l'analyse en composantes principales est de bonne qualité, les résidus sont faibles, donc de covariance faible (relativement à la part de variance exploitée, évidemment !). C'est la raison pour laquelle le bruit est négligeable, dans ce cas.

Ceci explique l'abandon progressif de l'A.F.C. au bénéfice de l'A.C.P. quand celle-ci est significative.

7 – UN EXEMPLE : MODELE (2-2) A VARIANCES EGALES.

On se donne un système d'individus rapportés à deux caractères, de façon telle que la forme quadratique associée soit de la forme :

$$V = \begin{pmatrix} v & c \\ c & v \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad v > c$$

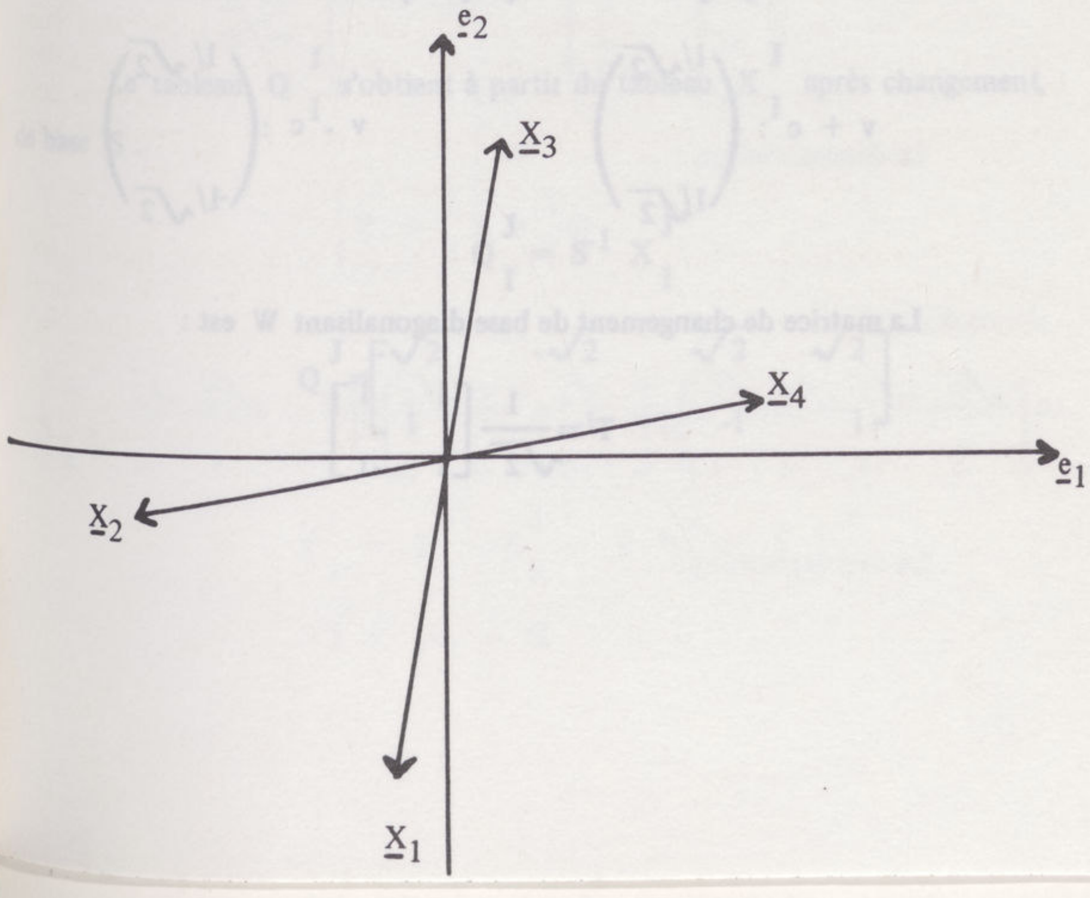
Par exemple avec $n = 4$:

$$X_I^J = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 2 & -\sqrt{2} - 2 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} - 2 & 2 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

On associe à chaque individu le poids $\frac{1}{n}$ (ici $\frac{1}{4}$).

Ce qui nous donne

$$V = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{de la forme voulue}$$



V se décompose sous la forme :

$$\begin{bmatrix} v & c \\ c & v \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + v - c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = V_1 + V_2$$

V_1 est de rang 1. V_2 est inversible diagonale.

On voit naturellement que la décomposition est optimale, car si V_1 est de rang < 1 c'est-à-dire 0 , V_2 n'est plus diagonale.

On a :

$$V_2^{\ -1/2} = \frac{1}{\sqrt{v\text{-}c}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2^{\ -\frac{1}{2}}\, V\, (V_2^{\ -\frac{1}{2}})' = \frac{1}{v\text{-}c} \begin{bmatrix} v & c \\ v & c \end{bmatrix} = W$$

Les vecteurs propres et valeurs propres orthonormées associées sont :

$$v + c : \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad v - c : \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base diagonalisant W est :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dans la base $(\underline{u}_1 . \underline{u}_2)$ maintenant définie à partir de $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ par le changement de base :

$$S = V_2^{\frac{1}{2}} T = \frac{\sqrt{v-c}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Les formes quadratiques s'écrivent :

$$S^{-1} V (S^{-1})' = S^{-1} V_1 (S^{-1})' + S^{-1} V_2 (S^{-1})'$$

$$D = D_1 + I$$

$$\begin{bmatrix} \frac{v+c}{v-c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v+c}{v-c} - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ayant pris la précaution de choisir $n = 4 = p+k+1$, on doit trouver une solution centrée au problème.

Le tableau Q_I^J s'obtient à partir du tableau X_I^J après changement, de base S.

$$Q_I^J = S^{-1} X_I^J$$

$$Q_I^J = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous devons trouver dans R^4 , $\underline{r}^1$ et $\underline{t}^1$, qui soient D_p - orthogonaux entre eux et avec $\underline{q}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et qui vérifient.

$$\underline{r}^1 + \underline{t}^1 = \underline{q}^1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

On désire de plus que $\qquad D_p\,(\underline{r}^1 \,,\, \underline{r}^1) = \dfrac{v+c}{v-c} - 1 = \dfrac{2c}{v-c}$

$$D_p\,(\underline{t}^1 \,,\, \underline{t}^1) = 1$$

C'est-à-dire, dans notre exemple $v = 6 \quad c = 2$, on obtient les solutions.

$$\underline{r}^1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{t}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La décomposition :

$$Q_I^J = R_I^J + T_I^J$$

s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

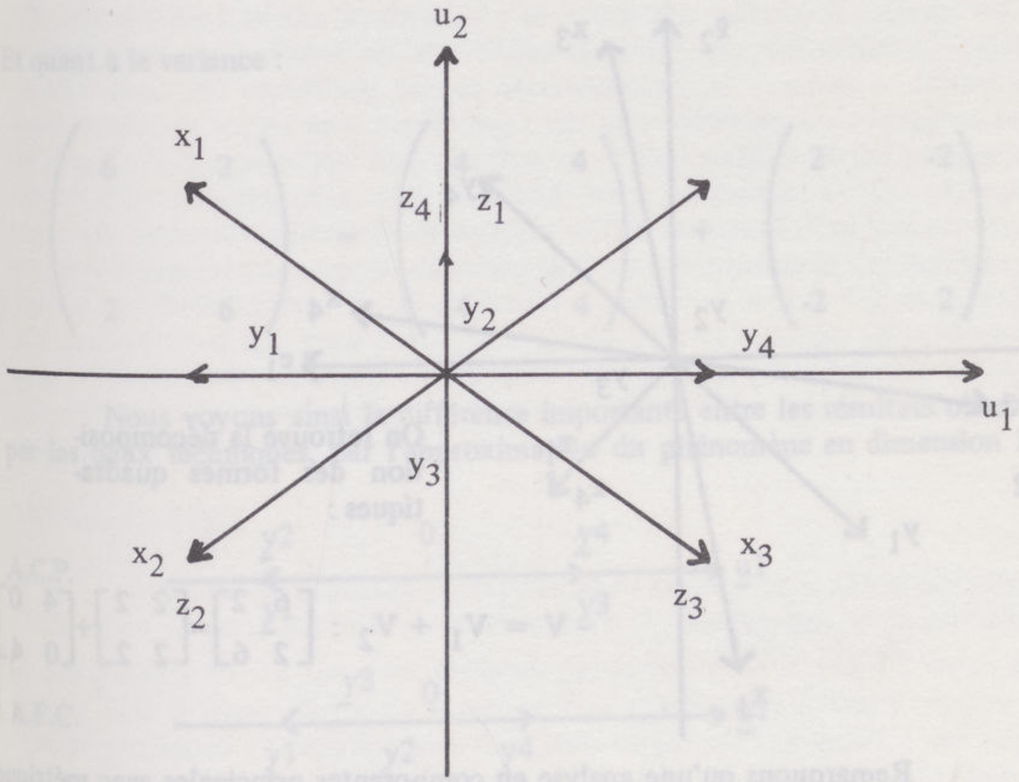
La décomposition :

$$D = D_1 + I .$$

s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la base $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ le système se dessine :

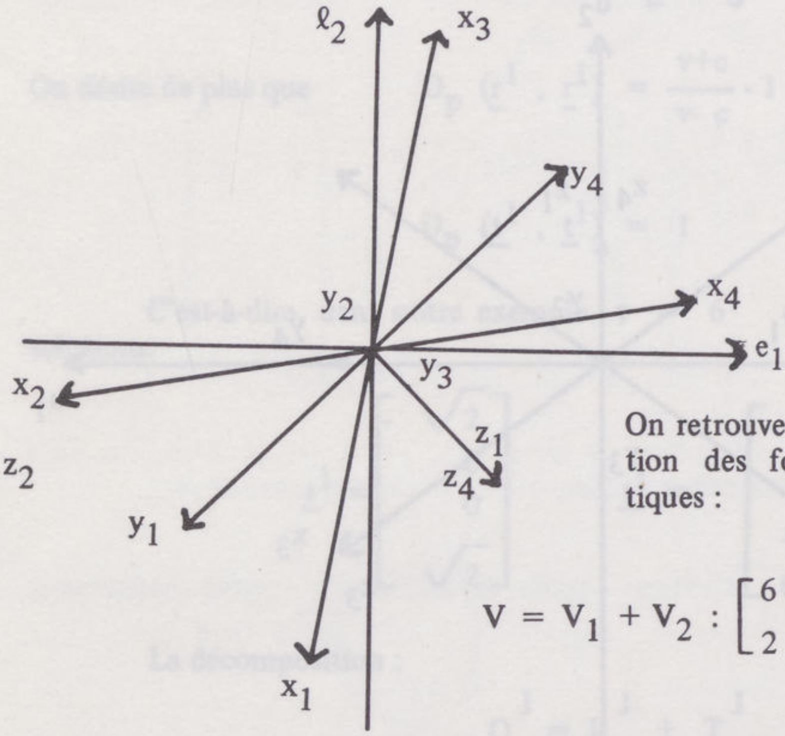


On obtient la décomposition sur le tableau initial par changement de base S :

$$X_I^J = Y_I^J + Z_I^J = S\ R_I^J + S\ T_I^J$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2 & 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 & 2-\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}-2 & 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



On retrouve la décomposition des formes quadratiques :

$$V = V_1 + V_2 : \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Remarquons qu'une analyse en composantes principales avec métrique $M = I$ aurait donné un 1[er] axe principal.

$$(\underline{u}1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La décomposition serait, quant au tableau :

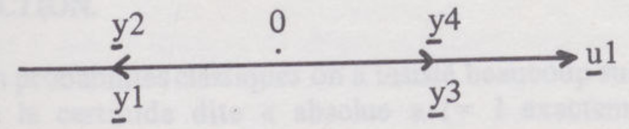
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2 & 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Et quant à la variance :

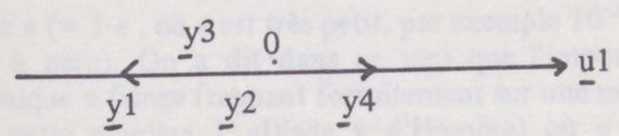
$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous voyons ainsi la différence importante entre les résultats obtenus par les deux techniques, par l'approximation du phénomène en dimension 1 :

A.C.P.



A.F.C.



Reçu en Mai 1972 .

10, Rue Claude Monet
92100 - BOULOGNE