Résolution, à l'aide de résultats d'algèbre non associative, de certains problèmes d'algèbre génétique

M. Bertrand

RESOLUTION, A L'AIDE DE RESULTATS D'ALGEBRE NON ASSOCIATIVE, DE CERTAINS PROBLEMES D'ALGEBRE GENETIQUE.

M. BERTRAND.

Première Partie.

INTRODUCTION.

Dans cette partie, nous allons étudier et développer un certain nombre de notions d'algèbre non associative, dont la plupart seront utilisées dans la seconde partie d'applications à la génétique.

Après un chapitre de généralités, nous introduisons la notion de grade d'une algèbre quelconque, et nous associons à toute algèbre A un ensemble ordonné A* formé de classes d'équivalence d'éléments de A. Nous en étudions un certain nombre de conséquences et propriétés. Nous nous intéressons en particulier au cas où l'ensemble A* possède un plus petit élément, qui trouve des applications en génétique, et nous introduisons la notion de T (A) - isotopie qui peut s'utiliser en algèbre génétique.

CHAPITRE I

Algèbres non associatives - généralités

Une algèbre non associative A, définie sur un corps F, est :

- un anneau non associatif : c'est-à-dire un ensemble muni de deux opérations - l'addition et la multiplication - ; ses éléments forment un groupe abélien par rapport à l'addition, et un groupoïde par rapport à la multiplication , la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

- un espace vectoriel sur F ; si α et β sont deux éléments de F, et si x et y sont deux éléments de A, alors :

$$\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad ; \quad (\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x \quad ;$$
$$\alpha\,(\beta\,x) = (\alpha\beta)\,x \quad ; \quad \alpha\,(xy) = \alpha x\, y = x\,(\alpha y) \quad ;$$

Pour plus de généralités, il est souvent intéressant de définir une algèbre, non sur un corps, mais sur un anneau associatif, commutatif et unitaire.

Nous nous bornerons ici à définir A sur le corps F, qui est appelé le plus souvent corps de base.

Nous nous bornerons également à l'étude des algèbres de dimension finie, c'est-à-dire telles qu'on ait pu y trouver n éléments e_1, e_2, .., e_n, formant une base :

pour tout $x \in A$, il existe $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in F$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$

Si $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$

$x = y$ équivaut à $\xi_i = \eta_i$ pour tout i.

Il existe alors des éléments de F, notés $\gamma_{i,j,k}$ où i = 1, .., n ; j = 1, .., n ; k = 1, .., n ; permettant d'écrire la table de multiplication de A relative à la base considérée :

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}\, e_k \qquad \text{pour tout couple } i, j = 1, .., n$$

Multiplication à droite et multiplication à gauche

Soit a un élément de A ; il est possible de lui associer deux opérations internes :

la multiplication à droite par a, notée R_a :

$$\forall x \in A \ , \qquad R_a (x) = xa$$

la multiplication à gauche par a, notée L_a :

$$\forall x \in A \ , \qquad L_a (x) = ax$$

Si l'algèbre est commutative, pour tout $a \in A$,

$$R_a = L_a$$

L'ensemble des transformations linéaires de A forme un espace vectoriel M (A), auquel appartiennent R_a et L_a pour tout $a \in A$; l'ensemble formé par les transformations R_a, lorsque a parcourt A, engendre un sous-espace vectoriel de M (A), noté R (A) ; de même l'ensemble des L_a engendre le sous-espace vectoriel L (A).

On appelle alors **algèbre des transformations de A**, et on note **T (A)** l'algèbre définie sur F et engendrée par les polynômes en R_a, L_b (pour tout $a, b \in A$) et par la tranformation identique I de l'algèbre A.

Un élément quelconque de T (A) s'écrit alors :

$$T = \alpha I + P (R_{a_1}, R_{a_2}, .., R_{a_p}, L_{b_1}, L_{b_2}, ... L_{b_q}) \quad \alpha \in F \ ; a_i, b_j \in A \ ;$$

P polynôme à coefficients dans F.

Sous-algèbres et idéaux - Nilpotence - Radical

Un sous-espace vectoriel A, stable pour l'addition et la multiplication, est une **sous-algèbre de A.**

Il est parfois intéressant d'associer, à une sous-algèbre A_1 de A, la sous-algèbre de T (A) correspondante, notée T (A_1, A). Un sous-espace vectoriel B de A est **idéal à droite** de A si et seulement si $ba \in B$ pour tout $b \in B$ et tout $a \in A$.

Même définition pour un **idéal à gauche**.

Un **idéal bilatère** de A est à la fois idéal à gauche et à droite ; on dit plus simplement «idéal».

Toutes les notions d'homomorphismes, de noyau, d'algèbre quotient, définies et étudiées dans le cas des algèbres associatives, restent valables pour des algèbres quelconques, car elles ne font pas appel à l'associativité de la multiplication.

Nous avons, en particulier, le **théorème fondamental d'homomorphisme** :

Soit B un idéal de A ; l'algèbre quotient A/B est l'image homomorphe de A grâce à l'homorphisme naturel H :

$$H(a) = a^* = a + B \text{ où } a \in A \text{ et } a + B \in A/B$$

Réciproquement, si deux algèbres A et A' sont telles que A' est image homomorphe de A, alors A' est isomorphe de A/B si B est le noyau de l'homomorphisme considéré.

Sous-algèbre engendrée par un élément

Soit a un élément de A ; la sous-algèbre engendrée par a - et par e si A contient un élément unité bilatère - est notée [a]

si $b \in [a]$, alors $[b] \in [a]$

si $b \in [a]$ et $a \in [b]$, alors $[b] = [a]$;

Une algèbre A est dite à **puissances associatives** si pour tout $a \in A$, la sous-algèbre [a] est associative.

Une algèbre A est dite à **puissances commutatives** si pour tout $a \in A$, la sous-algèbre [a] est commutative.

Une algèbre à puissances associatives est nécessairement à puissances commutatives, mais la réciproque n'est pas vraie.

Puissances d'un élément

Les puissances finies d'un élément $a \in A$ sont :

- les puissances principales :

à droite : $a^1 = a$, ... ; $a^n = a^{n-1}\, a$

à gauche : $a^{\cdot 1} = a$, ... ; $a^{\cdot n} = a\, a^{\cdot n-1}$

- les puissances pleines :

  $a \,;\, aa = a^2 \,;\; a^2 . a^2 = a^4 \;;\ldots\; a^{2^n};$

- les puissances mixtes :

le produit d'un nombre quelconque, fini, de puissances principales est une puissance mixte ; le degré d'une puissance mixte est la somme des degrés des puissances principales de a qui y figurent :

Dans une algèbre quelconque, le nombre des puissances distinctes de degré n d'un élément quelconque est, en général :

$$\frac{(2n-2)\,!}{(n-1)\,!\;n\,!}$$

Idéal engendré par un élément

L'idéal (a) engendré par l'élément a s'appelle un idéal principal ; si l'algèbre A possède un élément unité e, et si $e \in (a)$, alors $(a) = A$.

Algèbre simple

Une algèbre A est dite simple si le seul idéal propre de A est l'idéal zéro, et si A n'est pas une zéro-algèbre de dimension 1 (telle que $\forall$ a, b $\in$ A, ab = 0).

Algèbre semi-simple

Une algèbre A est dite semi-simple si elle est somme directe d'algèbres simples (en nombre fini).

Eléments nilpotents

Dans le cas d'une algèbre associative, il est facile de définir la notion d'élément nilpotent d'index k ; il en est de même dans le cas des algèbres à puissances associatives, comme les algèbres alternatives, par exemple.

Dans le cas général, cette notion est ambiguë. Il est possible de parler d'élément nilpotent principal à droite ou à gauche, mais non d'élément nilpotent en général.

Algèbre solvable, ou résoluble

Soit une algèbre A ; construisons les sous-algèbres ainsi définies :

$$A^{(0)} = A \; ; \; A^{(1)} = A^{\cdot 2} \; ; \, .. \, ; \; A^{(k)} = [A^{(k-1)}]^{\cdot 2}$$

où $A^{\cdot 2}$ désigne le sous-espace engendré par les produits de deux éléments quelconques de A.

A est dite solvable - ou résoluble - d'index k s'il existe un entier $k > 0$ tel que

$$A^{(k-1)} \neq 0 \; ; \; A^{(k)} = 0$$

Un idéal de A est solvable si c'est l'idéal zéro ou une algèbre solvable.

Algèbre nilpotente

Soit une suite $a_1, .., a_k$ de k éléments de A.

Toute suite de cette forme définit un produit d'ordre k noté $a^{(k)}$ et défini par :

$$a^{(i)} = a^{(i-1)} a_i \quad \text{ou} \quad a^{(i)} = a_i \, a^{(i-1)}$$

A est nilpotente d'index k si tous les produits d'ordre k de cette forme sont nuls et s'il en existe un d'ordre (k - 1) différent de zéro.

Une définition équivalente est la suivante :

A est nilpotente d'index k s'il existe un entier k tel que tous les produits de k éléments de A, de quelque manière qu'on les associe, sont nuls.

De nombreuses propriétés vraies dans le cas d'une algèbre associative, ne le sont plus dans le cas général : ainsi, toute algèbre associative non nilpotente possède un idempotent, ce qui n'est pas vrai pour une algèbre quelconque.

Il est tout de même possible de donner certaines propriétés intéressantes, valables dans le cas général, et, en particulier, de définir le radical.

Donnons d'abord deux propriétés :

- tout idéal solvable d'une algèbre A quelconque est contenu dans l'idéal solvable unique S. Le seul idéal solvable de A-S est l'idéal zéro.

- soit B un idéal de A ; soit B l'algèbre des polynômes des multiplications à droite ou à gauche correspondant aux éléments de B. B est nilpotent si et seulement si B est nilpotente.

Ceci permet de voir facilement qu'une algèbre nilpotente est solvable.

Radical

Albert a démontré qu'une algèbre homomorphe à une algèbre semi-simple possède un idéal N appelé radical, et qui est tel que A-N soit semi-simple.

N est alors contenu dans tout idéal B de A pour lequel A-B est semi-simple.

Cette démonstration s'effectue au moyen des étapes suivantes :

Soit T(A) l'algèbre des transformations de A ; soit $\mathcal{N}$ le radica l de l'algèbre associative T (A).

Notons $A\mathcal{N} = \{ n(a) \quad ; \quad n \in \mathcal{N} \quad ; \quad a \in A \}$

- l'algèbre T (A) est semi-simple si et seulement si A est soit semi-simple, soit zéro-algèbre, soit somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une zéro algèbre.

- pour que A soit homomorphe à une algèbre semi-simple, il faut et il suffit que $A\text{-}A\mathcal{N}$ ne soit pas une zéro-algèbre.

Alors, soit $A\text{-}A\mathcal{N}$ est semi-simple et $A\mathcal{N}$ est le radical de A ; soit $A\text{-}A\mathcal{N}$ est somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une zéro-algèbre et l'on en déduit de même le radical de A.

Le radical et l'idéal solvable maximal sont en général distincts, sauf dans certains cas particuliers comme celui des algèbres de Jordan ; cependant, Albert a démontré que l'idéal solvable maximal de A est contenu dans le radical de A.

Equations vérifiées par un élément

Considérons tout d'abord le cas où A - toujours supposée de dimension finie - possède **un élément unité e**.

Soit $e_1 = e, e_2, ..., e_n$ une base de A, et soit $x \in A$; formons l'équation caractéristique de la transformation R_x ; elle s'écrit : $|\lambda I - R_x| = 0; \lambda \in F$ ou encore : $\lambda^n - t_1 \lambda^{n-1} + ... + (-1)^n |R_x| = 0.$

Les t_i sont des polynômes homogènes en $\xi_1, ..., \xi_n$, coordonnées de x, de degré i au plus ; cela, d'après la définition même de l'équation caractéristique.

Or, nous pouvons écrire :

$$x = ex = R_x(e) \ ; \qquad x^p = R^p_x \ (e)$$

où x^p est la puissance principale à droite de degré p.

Par conséquent, si c_d (x) désigne le polynôme obtenu en remplaçant λ par x dans le premier membre de l'équation caractéristique, on a :

$$c_d \ (x) = e \ c_d (R_x) = 0$$

puique R_x est racine de son équation caractéristique.

D'où le résultat :

L'élément général $x \in A$, A étant une algèbre non associative à élément unité, de dimension finie, est racine de l'équation caractéristique de la multiplication à droite.

Même résultat à gauche, avec une équation différente en général de l'équation à droite.

Il existe alors une équation à droite vérifiée par x, telle que son degré p soit minimal ; en utilisant les propriétés du corps de base F, on peut démontrer que cette équation, dite **équation principale à droite** est unique, que son premier coefficient est 1, et ses autres coefficients des polynômes homogènes en ξ_i de degré n - q (pour le terme en x^q).

La propriété suivante se démontre aisément : le polynôme principal à droite de x, ϕ (λ), divise tout polynôme ψ (λ) tel que $\psi (R_x) = 0$, et, en particulier, le polynôme caractéristique. Nous avons ainsi défini l'équation principale à droite - ou équation au rang à droite -, pour l'élément général x. Il est possible de définir, de la même façon, son équation au rang à gauche.

En particularisant l'élément considéré, il est possible d'introduire également la notion d'équation minimale à droite pour un élément particulier.

L'équation minimale à droite de l'élément a est l'équation de plus petit degré à droite, vérifiée par l'élément a ; son degré est nécessairement inférieur ou égal à celui de l'équation au rang à droite. Même définition à gauche.

Algèbre sans élément unité

Il est possible de se ramener au cas précédent, en considérant l'algèbre A^+ déduite de A en lui adjoignant un élément neutre e_o ; la base et la table de multiplication de A^+ s'écrivent alors $e_o, e_i, .., e_n$;

$$\gamma_{ijo} = 0 \quad \forall (i,j) \; ; \; \gamma_{ojk} = \delta_{jk} \; ; \; \gamma_{iok} = \delta_{ik}$$

$$x^+ = x + \xi_o e_o \quad ; \quad (\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker}).$$

On forme alors, comme précédemment, le polynôme $c^+_d(x^+)$, premier membre de l'équation caractéristique de x^+, après remplacement de λ par x^+.

Si l'on fait, dans cette équation $\xi_o = o$, l'on trouve que x satisfait à l'équation :

$$x \; c_d \; (x) = o$$

On tire alors de ce résultat des conclusions analogues à celles du précédent paragraphe : équation au rang, équations principales, ..., valables quelle que soit l'algèbre A.

Cas des puissances non principales

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour les puissances pleines, par exemple, en utilisant la notion de dépendance linéaire, on peut écrire les équations «pleines» à droite et à gauche.

Degré et altitude d'une forme

On classe les produits non associatifs relativement à leur «forme», c'est-à-dire suivant la manière dont les facteurs sont associés ; ainsi les deux produits (ab.c) d et (ba.c) d, sont de même forme, tandis que le produit ab.cd est de forme différente. On appelle **degré** d'une forme d'éléments qui figurent dans l'écriture du produit :

[(ab) c] d a pour degré 4.

On appelle **altitude** d'une forme le nombre de «générations» donnant naissance au produit.

Exemple :

(ab.c) d est d'altitude 3.

(ab) (cd) d'altitude 2.

Ces définitions seront utilisées par la suite.

CHAPITRE II

Relation d'équivalence sur A - Ensemble ordonné défini à partir de A. Grade de A.

Nous allons maintenant supposer l'algèbre non associative A commutative, et, de plus, supposer que A ne contient pas de diviseur absolu de zéro.

Considérons l'algèbre T (A) précédemment introduite.

Relation d'équivalence sur A

Deux éléments x et y de A sont dits équivalents si et seulement si il existe deux éléments f et g de T (A) tels que :

$$x = f(y) \quad ; \quad y = g(x) \quad ;$$

Nous avons bien une relation d'équivalence :

$x = I(x)$; réflexivité

symétrie résultant de la définition ;

transitivité : $x = f(y)$; $y = g(x)$; $y = h(z)$; $z = t(y)$;

alors $z = (t \circ g)(x)$; $x = (f \circ h)(z)$;

Considérons l'ensemble A^* des classes d'équivalence ainsi définies.

Une remarque immédiate : l'élément o n'a pas d'équivalent autre que lui-même.

Relation d'ordre sur A*

Soit x et y deux éléments de A. On dira que x^* est inférieur à y^* (ou que y^* est supérieur à x^*) et on notera $x^* < y^*$ si et seulement si, pour un élément x de x^* et un élément y de y^*, il existe t élément de T (A) tel que $y = t(x)$.

Cette définition est indépendante des représentants x et y choisis ; en effet soit $x' \in x^*$ et $y' \in y^*$, et soit $y = t(x)$, alors :

$$y' = h(y) = (hot)(x) = (hotog)(x')$$

Cette relation est réflexive, transitive.

Elle est antisymétrique : d'après la définition, $x^* < y^*$ et $x^* > y^*$ entraînent nécessairement $x^* = y^*$.

Nous avons donc muni l'ensemble A d'une relation d'ordre.

Applications immédiates

1) toute classe $x^* \in A^*$ est inférieure à la classe $\{o\}$, puisque $o\ (x) = o$ pour tout $x \in A$.

pour tout $x \in A$ $\quad x^* < o$

2) soit $a \in A$; déterminons l'ensemble des éléments de A^* qui sont supérieurs à a.

Les éléments correspondants dans A s'écrivent $b = t\ (a)$ pour tout $t \in T\ (A)$; on voit alors aisément que l'ensemble cherché est constitué par les **classes des éléments de (a), idéal principal engendré par a dans A.**

3) **si A possède un élément unité e**, tous les éléments x de A s'écrivent sous la forme : $x = ex$;
les éléments inversibles, s'il en existe, lui sont équivalents : en effet, si a est inversible et a pour inverse a', $a = ea$; $aa' = e$, e et a sont bien équivalents.

Il en résulte que e^* **est le plus petit élément de A.** e^*comprend l'élément e, les éléments inversibles s'il en existe, et les éléments **«pseudo-inversibles»**, c'est-à-dire les éléments non inversibles a' tels qu'à tout a' on puisse faire correspondre $t \in T\ (A)$ tel que $t\ (a') = e$.

4) **Si A possède un idéal propre I**
soit $a \in I$ et $b \in A - I$; a^* ne peut être identique à b^*, car il n'existe pas de $t \in T\ (A)$ tel que $b = t(a)$.

5) deux éléments quelconques a^* et b^* de A^* ont toujours un **majorant commun**, $(ab)^*$.

Cas de l'élément zéro

Supposons qu'il existe un élément $a_o \in A$, tel que pour tout $t \in T\ (A)$, $t \neq o$, l'élément $t\ (a_o)$ ne soit pas nul.

Nous dirons que a_o est non négatif.

Il en résulte que pour tout couple (t, t') d'éléments de A tel que $t \neq t'$, $t(a_o)$ ne peut être égal à $t'(a_o)$.

Donc R_{a_o} est injective : en effet, supposons que

$ba_o = b'a_o$, avec $b, b' \in A$, ; A étant commutative, ceci peut s'écrire $a_o(b-b') = o$

donc $R_b = R_{b'}$, et, puisque A ne possède pas de diviseur absolu de zéro, $b = b'$.

L'algèbre A étant de dimension finie, R_{a_o}, qui est injective, est donc bijective, et, en particulier, surjective.

Soit alors $t_1 \in T(A)$, et soit $b_o = t_1(a_o)$; b_o est non nul. R_{a_o} étant surjective, il existe $x \in A$ tel que $b_o = a_o x$; $R_x(a_o) = t_1(a_o)$ et $t_1 = R_x$.

Donc $T(A) = R_x$; $x \in A$.

Il en résulte que A possède un élément unité et que R (A) est une algèbre.

Par suite, A est une algèbre associative à élément unité.

Réciproquement, si A est associative et possède un élément unité, pour tout a non nul, $ae = a \neq o$.

La condition nécessaire et suffisante pour que A possède un élément non négatif est que A soit une algèbre associative à élément unité.

Remarque : dans le cas d'une algèbre non associative sans élément unité, il est aisé de voir que e n'est pas non négatif : en effet, il existe alors x et $y \in A$ tels que $R_x R_y \neq R_{xy}$ et $(R_{xy} - R_x R_y)(e) = o$

Application aux algèbres simples et semi-simples

1) Algèbre simple

Si A est simple, tous les éléments non nuls sont équivalents.

En effet, supposons qu'il existe a_o et b_o non nuls tels que, pour tout $t \in T(A)$, $t(a_o)$ soit différent de b_o ; alors b_o n'appartient pas à l'idéal engendré par a_o, et A n'est pas simple.

2) Algèbre semi-simple

A est somme directe d'algèbres simples :

$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_p$ décomposition unique, à l'ordre près, (on a $A_i.A_j = o$ $\forall i, j = 1 .. p$)

Chaque ensemble $A_i - \{o\}$ forme une classe

soit a_i et $a'_i \in A_i - \{o\}$; puisque A_i est simple, a_i et a'_i sont équivalents.

Réciproquement, soit a équivalent à a_i ; alors $a_i = t(a)$ et $a = t_1(a_i)$; mais $t_1(a_i)$ appartient à A_i puisque $A_iA_j = o$ pour tout j ; donc $a \in A_i$.

Deux classes distinctes $A_i - \{o\}$ et $A_j - \{o\}$ ne sont pas comparables.

Ceci vient de la propriété de décomposition en somme directe d'algèbres simples.

Pour tout (i,j) $i \neq j$, formons l'ensemble A_{ij} défini par :

$A_{ij} = a_i + a_j$; $a_i \in A_i - \{o\}$; $a_j \in A_j - \{o\}$

l'ensemble A_{ij} forme une classe.

En effet, soit :

$a = a_i + a_j$; $a' = a'_i + a'_j$

$a'_i = t_i(a_i)$; $a'_j = t_j(a_j)$

$a_i = t'_i(a'_i)$; $a_j = t'_j(a'j)$

t_i et t'_i appartiennent à $T(A_i)$, t_j et t'_j à $T(A_j)$;

$a = a_i + a_j = t'_i(a'_i) + t'_j(a'_j)$ ou

$a = (t'_i + t'_j)(a'_i + a'_j)$ puisque $t'_i(a'_j) = t'_j(a'_i) = o$

donc $a = t(a')$; de même $a' = t(a)$.

et, de plus, tout équivalent de a appartient à A_{ij}.

La classe A_{ij} n'est inférieure qu'aux classes $A_i - \{o\}$ et $A_j - \{o\}$; A_{ij} et $A_k - \{o\}$ ne sont pas comparables si k n'est pas égal à i ou j ; A_{ij} et A_{kl} ne sont pas comparables si elles sont différentes.

Tout ceci se voit aisément grâce aux propriétés de décomposition.

Continuant le processus, on pose :

$A_{i_1 \dots i_s} = \left\{ a_{i_1} + \dots + a_{i_s} ; a_{i_1} \in A_{i_1} - \{o\} , \dots ; a_{i_s} \in A_{i_s} - \{o\} \right\}$ $A_{i_1 \dots i_s}$ forme une classe inférieure à toute classe $A_{i_{p_1} \dots i_{p_k}}$ telle que $(i_{p_1}, \dots, i_{p_k}) \subset (i_1, \dots, i_s)$
Enfin, l'ensemble $A_{12 \dots p} = \left\{ a_1 + \dots a_p ; a_i \in A_i - \{o\} \right\}$ constitue le plus petit élément de A*.

Le plus grand élément est l'élément zéro.

Si A est associative, A possède un élément unité ; le plus petit élément $A_{1 \dots p}$ est la classe de e, et est constitué des éléments inversibles.

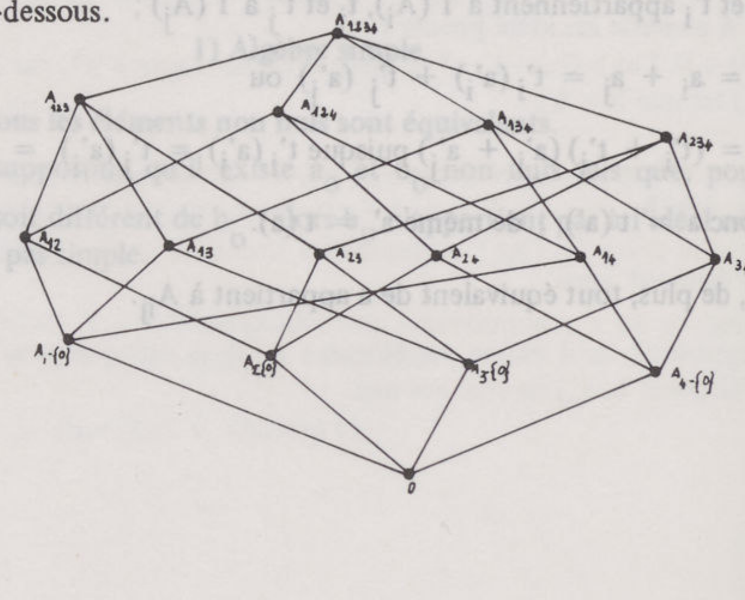
L'ensemble A possède 2^p éléments.

Traçons le diagramme représentant l'ensemble ordonné dans le cas où

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$$

Deux éléments comparables sont reliés par une ligne droite ou une ligne brisée avec points anguleux aux points figurant les éléments ; A* possède une structure de treillis, deux éléments quelconques possédant un plus petit majorant et un plus grand minorant ; ce résultat est d'ailleurs valable quel que soit p, A* est un treillis possédant un plus petit élément et un plus grand élément.

Pour p quelconque, l'allure du diagramme est analogue à celle du diagramme représenté ci-dessous.



Définition du grade de l'algèbre T (A)

Soit n la dimension de l'algèbre A ; l'algèbre M (A) des transformations linéaires sur A a pour dimension n^2 ; T (A), sous-algèbre de M(A), a donc une dimension finie, inférieure ou égale à n^2.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de A.

Si l'algèbre A est associative

$$R_{e_i} R_{e_j} = R_{e_i e_j} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} R_{e_k} \quad \text{pour tout (i.j)}$$

Si donc r + 1 désigne le rang (indépendant du choix de la base) des (R_{e_i}, I) la dimension de T (A) est r + 1.

Si l'algèbre n'est pas associative.

Soit N la dimension de T (A).

$$r + 1 \leqslant N \leqslant n^2$$

· si N = r + 1, on peut prendre pour base de T (A) : I, R_{e_1}, ..., R_{e_r}

A ce propos, rappelons un résultat d'Albert : une algèbre A, ayant un élément unité à gauche, est associative si et seulement si l'ensemble R(A) est une algèbre.

· si N > r + 1 ; posons

$$R_{ij} = R_{e_i} R_{e_j} \quad \text{i, j de 1 à r.}$$

Les R_{ij} ne s'expriment pas en fonction de (I, R_{e_1}, ..., R_{e_r}) sinon N serait égal à r + 1, il existe donc un nombre s d'éléments R_{ij} linéairement indépendants entre eux, et indépendants des (I, R_{e_1}, ..., R_{e_r}).

Si donc N = 1 + r + s, on a trouvé une base de T (A).

Si N > 1 + r + s, on forme

$R_{ijk} = R_{e_i} R_{e_j} R_{e_k}$ pour tout (i, j, k) de 1 à r, et l'on procède de même.

20.

Le nombre N étant fini, cette suite d'opérations s'arrête et la base obtenue s'écrit :

$$I, \left\{R_{e_i}\right\}_{i = 1, \dots r}, \left\{R_{i_1 i_2}\right\}, \left\{R_{i_1 i_2 i_3}\right\} \dots \left\{R_{i_1 i_2 \dots i_q}\right\}$$

L'entier q, qui est le nombre maximum de facteurs R_{e_i} formant les éléments de la base est appelé **le grade de T (A)**.

L'entier q ne dépend pas, en effet, de la base choisie ; si pour une base (e_i), on obtenait un entier q, et, pour une base e'_i un entier $q' < q$, un élément de la première base T (A), soit $R_{e_1} \dots R_{e_q}$, s'exprimerait linéairement en fonction d'éléments tels que :

$R_{b_{i_1}} \dots b_{i_s}$ avec $s < q$

donc en fonction d'éléments tels que $R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_s}}$ avec $s < q' < q$ ce qui est impossible donc $q' = q$.

Condition nécessaire et suffisante pour que T (A) ait pour grade q

Dire que T (A) a pour grade q, c'est-dire que tout élément de la forme $R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_{q+1}}}$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme I, $R_{e_{i_1}}, \dots, R_{e_{i_p}}$, avec $p \leqslant q$.

Quel que soit l'élément e_k :

$$R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_{q+1}}} (e_k) = F\left[e_k, R_{e_i}(e_k), \dots, R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_q}}(e_k)\right]$$

D'où la condition :

Pour que T (A) soit de grade q au plus, il faut et il suffit que tous les produits d'éléments de base de A, d'ordre q + 2 et d'altitude q + 1, s'expriment linéairement en fonction des produits d'ordre inférieur, et cela, de manière compatible, c'est-à-dire, dans l'expression :

$$\left[\left[(e_k)\, e_{i_{q+1}}\right] e_{i_q} \dots\right] e_{i_1} = \left\{ e_k, e_k e_i, \dots \left[e_k e_{i_q}\right] \dots \right] e_{i_1} \right\}$$

en remplaçant e_k par tous les éléments de la base de A, on obtient toutes les autres expressions du système.

Exemple :

Considérons une algèbre A possédant un idéal I de dimension n-1 ; soit $(u_1, \dots u_{n-1})$ une base de cet idéal ; supposons qu'elle possède un idempotent e n'appartenant pas à I ; une base de A s'écrit alors : $(e, u_1 \dots, u_{n-1})$; supposons que la table de multiplication de A vérifie :

$$\left|\begin{array}{ll} e^2 = e \ ; \ u_i u_j = 0 & i, j = 1 \dots (n\text{-}1) \ ; \\ 2\,(eu_i)\,e - (2p+1)\,eu_i + \rho u_i = o & i = 1, \dots (n\text{-}1) \ , \rho \in F \ \rho \neq 0 \end{array}\right.$$

Il est facile de voir qu'avec ces hypothèses :

$$\left.\begin{array}{l} R_eR_eR_e = (\frac{3}{2} + \rho)\, R_eR_e - (\frac{3\rho}{2} + \frac{1}{2})\, R_e + \frac{\rho}{2}\, I \\[2ex] R_{u_i}R_e = R_{u_i} \\[2ex] R_eR_{u_i}R_e = R_eR_{u_i} \\[2ex] R_eR_eR_{u_i} = -\frac{\rho}{2}\, R_{u_i} - (\rho + \frac{1}{2})\, R_eR_{u_i} \\[2ex] R_{u_i}R_{u_j} = 0 \end{array}\right\} \ \forall \ i, j \ 1, \dots, n\text{-}1$$

La base de T (A) est donc incluse dans :

$$I, \ R_e, \left\{R_{u_i}\right\}, \ R_eR_e, \ \left\{R_eR_{u_i}\right\} \quad i = 1, \dots, n$$

Le grade de l'algèbre considérée est donc au plus q = 2.

Cas particulier : Algèbre A telle que R (A) soit une algèbre

C'est un cas particulier d'algèbre de grade 1 ; pour tout couple x, y, d'éléments de A, il existe un élément z de A, tel que : $R_xR_y = R_z$ et il existe un couple au moins, soit x_o, y_o, tel que z_o soit différent de x_oy_o.

L'algèbre ne peut alors posséder d'élément unité sans être associative, ceci découlant du résultat d'Albert cité plus haut.

Définissons alors un nouveau produit :

à tout couple (x, y), associons l'élément $z = x \times y$ tel que $R_y R_x = R_z$; alors $(ax)y = a(x \times y)$

Vérifions tout d'abord que nous avons bien défini une loi de multiplication :

tout d'abord, l'élément $z = x \times y$ est défini sans ambiguïté, en effet, si $R_{z'} = R_{z}$, $(z - z')$ est alors diviseur absolu de zéro, ce qui est exclu par hypothèse.

Cette loi vérifie les axiomes du produit non commutatif :

$x \times (y + u) = z$ signifie $R_{y+u}R_x = R_z$ c'est-à-dire $R_y R_x + R_u R_x = R_z$, donc $x \times y + x \times u = z$; de même que $(y + u) \times x = y \times x + u \times x$

C'est la distributivité à droite et à gauche.

Ce produit est associatif :

$(x \times y)\ z = x\ (y \times z)$ car $R_{(x \times y) \times z} = R_z R_y R_x = R_{x \times (y \times z)}$

Il est, de plus, compatible avec la structure d'espace vectoriel :

$\alpha (x \times y) = z$; c'est-à-dire $\alpha R_y R_x = R_z = R_{\alpha y} R_x = R_y R_{\alpha x}$

donc $\alpha(x \times y) = (\alpha x) \times y = x \times (\alpha y)$

Nous avons alors associé à A une nouvelle algèbre A', définie sur le même corps, ayant même espace vectoriel, et ne différant que par la loi de multiplication ; A' est associative et non commutative, alors que A est commutative et non associative.

1) A est semi-simple

T (A) est alors semi-simple.

Pouvons-nous en déduire que A' est semi-simple ?

Rappelons que le radical d'une algèbre associative est constitué par l'élément zéro et les éléments proprement nilpotents.

$x \in A'$ est dit proprement nilpotent si pour tout $y \in A$ il existe un entier p tel que $(x \times y)^{\times p} = 0$.

Il suffit de le définir ainsi, car un élément proprement nilpotent «à gauche» l'est également «à droite» et réciproquement ; un tel élément est à fortiori nilpotent puisque x^2 est nilpotent ; tout ceci résulte de l'associativité de l'algèbre engendrée par deux éléments (et reste alors valable dans le cas d'une algèbre alternative, dont le radical est constitué de la même façon).

Dire que x est proprement nilpotent dans A' signifie que pour tout $y \in A$, il existe p tel que $(R_y R_x)^p = 0$.

Il en résulte alors que R_x est proprement nilpotent dans T (A) et que T(A) n'est pas semi-simple, ce qui est contraire à l'hypothèse.

A' est donc semi-simple.

A', algèbre associative semi-simple, possède un élément unité e' :

$e' \times a = a \times e' = a$.

C'est-à-dire $R_{e'} R_a = R_a R_{e'} = R_a$ pour tout $a \in A$.

L'élément e' est alors élément unité pour la sous-algèbre A^2 :

$(ab)\, e' = ab$

Si $A^2 = A$, A est associative.

En particulier, **si A est simple, A est associative.**

2) A est quelconque

Nous allons montrer que, pourvu que A possède un élément non singulier, **A' est isotope de A.**

Rappelons la définition de l'isotopie : soient deux algèbres A et A_o, définies sur le même corps F et qui sont deux espaces vectoriels de dimension n ; on peut alors identifier leurs éléments par isomorphisme ; seules leurs multiplications diffèrent :

$ax = R_x\,(a)$ dans A

$aox = R_x{}^o\,(a)$ dans A_o.

Nous dirons que A et A_o sont isotopes s'il existe trois transformations linéaires P, Q, C telles que

$$R_x^{(o)} = PR_{Q_{(x)}} C$$

Il est facile de voir que l'isotopie est une relation d'équivalence.

Ici, $R_{e_i} R_{e_j} = \sum_k \lambda_{ijk} R_{e_k}$

si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de A.

$$e_i e_j = \sum_k \gamma_{ijk} e_k$$

Soir r le nombre de R_{e_i} indépendants :

$$R_{e_{r+i}} = \sum_{k=1} \mu_{r+i,k} R_{e_k}$$

$$R_{e_{r+i}} R_{e_{r+j}} = \sum_{k,h} \mu_{r+i,k} \mu_{r+i,h} R_{e_k} R_{e_h}$$

Le nouveau produit dans A' donne

$$e_i \times e_j = \sum_k \lambda_{ijk} e_k \qquad i, j \leqslant r$$

$$e_i \times e_{r+j} = \sum_{k=1}^{r} \mu_{r+j,k} e_i \times e_k$$

$$e_{r+i} \times e_{r+j} = \sum_{k=1}^{r} \mu_{r+i,k} \mu_{r+j,h} e_k \times e_h$$

Supposons que A possède un élément non singulier, qui ait été choisi comme élément e_1 ; R_{e_1} est alors inversible : or

$$R_{e_1} (e_i \times e_j) = R_{e_1} (e_i) I (e_j)$$

ce qui prouve que A', algèbre associative, est isotope de A.

Retrouvons en même temps une démonstration du fait que si A possède un élément unité, A est associative : soit e_o cet élément :

$$(e_o e_i) e_j = e_i e_j = e_o (e_i \times e_j) = e_i \times e_j$$

Résolution, à l'aide de résultats d'algèbre non associative, de certains problèmes d'algèbre génétique.

CHAPITRE III

Etude de l'ensemble ordonné A dans un cas particulier

RESUME

Soit une algèbre associative A, commutative possédant un élément unité e, et pouvant se mettre sous la forme $A = B \oplus N$ (au sens espace vectoriel) où N est le radical de A et B une algèbre semi-simple.

Le but de ce chapitre est de donner des résultats sur la structure de A relativement à la relation d'équivalence et à la relation d'ordre introduites au chapitre précédent.

On détermine donc la classe d'équivalence d'un élément quelconque, et on recherche quels sont les couples d'éléments dont les classes admettent un plus petit majorant ou un plus grand minorant.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

I — Algèbre A telle que A* possède un plus petit élément A_o

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

a) supposons A associative :

- il existe alors au moins deux éléments de A non colinéaires appartenant à A_o.

Soient a_o et a'_o ces deux éléments :

$$a_o = \alpha a'_o + ba'_o \qquad ; \qquad \alpha, \alpha' \in F$$

$$a'_o = \alpha' a_o + b' a_o \qquad ; \qquad b, b' \in A$$

— si $\alpha\alpha' \neq 1$ A possède un élément unité.

si $\alpha\alpha' \neq 1$ A ne possède pas d'élément unité.

b) supposons A de grade 1 :

- pour que A possède un élément unité, il faut et il suffit que pour tout $a_o \in A_o$, R_{a_o} soit inversible et, que il existe $a_o \in A_o$, $b_o \in A$ tels que $R_{b_o}\ R_{a_o} = R_{a_o}$.

- s'il existe $a_o \in A$, tel que R_{a_o} ne soit pas inversible, A possède un idéal U de dimension n-1, et R_{a_o} envoie A sur U ; de plus, il existe un élément $c_o \in A$ tel que $c_o u = u$ pour tout $u \in U$.

Soit donc une algèbre quelconque A telle que $A = A_o \cup N$, A_o étant caractérisé de la façon suivante :

pour tout couple (a_o, a'_o) d'éléments de A_o, a_o et a'_o sont équivalents : quel que soit $n \in N$, n^* est supérieur à a_o^*, sans égalité possible ; de plus tout élément dont la classe est inférieure à toute classe d'éléments de N appartient à A_o.

Autrement dit $\forall\ a_o, a'_o \in A_o$, il existe t et t' éléments de T (A)tels que :

$a_o = t(a'_o)$; $a'_o = t'(a_o)$

et pour tout $n \in N$, il existe T tel que $n = T(a_o)$; par contre, pour tout $t \in T(A)$, t (n) n'est pas un élément de A_o.

La classe $a_o{}^*$ est le plus petit élément de l'ensemble A* associé à A.

On voit aisément que :

· pour que A* possède un plus petit élément, il faut et il suffit que A possède un élément a tel que (a), idéal engendré par a, soit égal à A, et que A ne soit pas simple.

· si A possède un idéal I, propre, il est contenu dans N ;

Supposons que I ne soit pas contenu dans N ; alors il existe $i \in I$, $i \in A_o$; pour tout $a \in A$, il existe t tel que a = t (i), donc, puisque $t(i) \in I$, I = A.

Cas où l'algèbre A est associative

Deux cas sont à distinguer :

· ou A possède un élément unité, et les éléments de A_o sont les éléments inversibles'

– ou A ne possède pas d'élément unité.

A – Supposons qu'il existe deux éléments dans A_o, soient a_o et a'_o, non colinéaires :

$a_o = \alpha a'_o + ba'_o$ $\qquad\qquad \alpha, \alpha' \in F$

$a'_o = \alpha' a_o + b' a_o$ $\qquad\qquad b, b' \in A$

ce qui entraîne

$$a_o(\alpha\alpha' - 1) + (\alpha b' + \alpha' b + bb')\, a_o = 0$$

$$a'_o(\alpha\alpha' - 1) + (\alpha b' + \alpha' b + bb')\, a'_o = 0$$

d'où deux possibilités :

1) ou $\alpha\alpha' \neq 1$; alors $bb' + \alpha' b + \alpha b' \neq 0$, il existe alors

$c_o \in A$ tel que $\qquad a_o c_o = a_o$

$$a'_o c_o = a'_o$$

c_o est alors un élément de A_o, car si $e_o \in N$, $a_o c_o \in N$ et $a_o \in N$.

Tout élément de A s'écrivant sous la forme :

$$a = \gamma a_o + c a_o$$

$$a c_o = \gamma a_o c_o + c a_o c_o = a$$

L'élément c_o est donc l'élément unité de l'algèbre A.

Nous avons par conséquent le résultat suivant :

Si A_o possède deux éléments distincts et non colinéaires a_o et a'_o, avec $a_o = \alpha a'_o + b a'_o$ et $a'_o = \alpha' a_o + b' a_o$, et tels que $\alpha\alpha' \neq 1$, alors A possède un élément unité.

2) $\alpha\alpha' = 1$

Alors, ou $bb' + \alpha' b + \alpha b' = 0$, ou a_o est diviseur de zéro ; on ne peut conclure sur ce calcul.

Supposons cependant qu'il existe un élément unité, et que quels que soient a_o et $a'_o \in A_o$, classe de e, $a_o = \alpha a'_o + b a'_o$ et $a'_o = \alpha' a_o + b' a_o$ avec $\alpha\alpha' = 1$, c'est impossible, car pour tout $a_o \in A_o$;

$$\left.\begin{aligned} e &= a_o a''_o \\ a_o &= a_o e \end{aligned}\right\} \text{ le couple } (a_o, e) \text{ ne vérifie pas la condition imposée.}$$

Il n'y a donc pas d'élément unité dans ce cas.

Exemple :

Soit l'algèbre A, de dimension 3, sur F, engendrée par a_o, a_1, a_2 tels que :

$$a_o^2 = a_1 \quad ; \quad a_1^2 = a_1 \; ; \; a_2^2 = a_1$$

$$a_1 a_2 = a_2 \quad ; \quad a_o a_1 = a_1 \quad ; \quad a_o a_2 = a_2$$

Cette algèbre est bien associative ;

$A_o = a_o^*$ est le plus petit élément de A* car $a_1 = a_o a_1$ et $a_2 = a_o a_2$.

Cependant, il n'y a pas d'élément unité car $a_o^2 = a_1$.

B – Posons-nous maintenant la question suivante :

Supposons toujours que A* possède un plus petit élément. Est-il possible que A_o soit formé uniquement du sous-espace vectoriel engendré par un seul élément c'est-à-dire :

$$A_o = \{\lambda a_o\} \quad \lambda \in F \quad \lambda \neq 0$$

1) A possède un élément unité

Peut-on donc avoir $e^* = \{\lambda e\} \qquad \lambda \in F - \{o\}$

ou existe-t-il toujours au moins un élément équivalent à e et non colinéaire à e ?

Dire que a_o est équivalent à e, c'est dire que a_o est inversible, ou encore, puisque A est associative, que a_o n'est pas diviseur de o.

Si donc l'on trouve a_o tel que pour tout $a \in A$, $a_o a \neq 0$, avec a_o non colinéaire à e, on aura trouvé l'équivalent cherché.

Nous allons supposer que A contient un idéal propre R (sinon A serait simple, et tous les éléments seraient équivalents). Alors e n'appartient pas à R. Choisissons une base de R, et complétons la base de R par $(e, e_1, e_2, ..., e_q)$ pour obtenir une base de A.

Soit $a = \xi e + r$, $\xi \in F - \{o\}$ $\quad r \in R$

Considérons un élément quelconque de A n'appartenant pas à R ; il s'écrit:

$a' = \xi' e + \xi'_1 e_1 + ... + \xi'_q e_q + r' \qquad \xi', \xi'_1 ..., \xi'_q \in F$

avec l'un au moins des $\xi', \xi'_1 ..., \xi'_q$ non nul.

$aa' = \xi\xi' e + \xi\xi'_1 e_1 + ... + \xi\xi'_q e_q + r'' \qquad r'' \in R$

aa' est toujours non nul.

Considérons un élément $r' \in R$

$ar' = \xi r' + rr'$, dire que $ar' = 0$, c'est dire que $rr' = -\xi r'$, c'est-à-dire que r' est vecteur propre de R_r, correspondant à la valeur propre $(-\xi)$; si donc $(-\xi)$ n'est égale à aucune des n valeurs propres de R_r, ar' n'est pas nul quel que soit $r' \in R$.

Choisissons donc $r \in R \quad r \neq 0$; choisissons $(-\xi)$ n'appartenant pas à l'ensemble des n valeurs propres de R_r ; l'élément $a = \xi e + r$ n'est pas colinéaire à e et lui est équivalent.

Il existe donc toujours un élément non colinéaire à e qui lui est équivalent.

2) A ne possède pas d'élément unité

Soit $a_o \in A_o$.

L'élément a_o n'est pas idempotent, car s'il l'était, il serait l'élément unité de A.

Si a_o n'est pas nilpotent : l'algèbre engendrée par a_o possède un idempotent $e_o \neq a_o$ et non colinéaire à lui ; e_o n'est pas équivalent à a_o, sinon A aurait un élément unité.

Puisque e_o n'est pas équivalent à a_o l'élément $a'_o = a_o - \frac{1}{2} e_o a_o$ n'est pas colinéaire à a_o et lui est équivalent ; en effet :

$$a_o = (a_o - \frac{1}{2} e_o a_o) + e_o (a_o - \frac{1}{2} e_o a_o)$$

Si a_o est nilpotent : l'algèbre A est nilpotente $a_o{}^p = 0 \quad a_o{}^{p-1} \neq 0$

p est nécessairement supérieur à 2, sinon l'algèbre A est de dimension 1.

Soit $a'_o = a_o + a_o{}^{p-1}$; a'_o n'est pas colinéaire à a'_o sinon a_o ne serait pas nilpotent ; a'_o est équivalent à a_o puisque

$$a_o = (a_o + a_o{}^{p-1}) - a_o{}^{p-2} (a_o + a_o{}^{p-1})$$

Il existe donc toujours un équivalent de a_o qui ne lui est pas colinéaire.

Nous avons donc le résultat suivant ,

Si une algèbre A, associative, est telle que l'ensemble associé A* possède un plus petit élément A_o, l'ensemble A_o possède au moins deux éléments non colinéaires.

Exemple :

Déterminons effectivement les ensembles A_o et N dans un cas particulier : celui où A possède un idéal R de dimension n-1, et où A est une algèbre à élément unité :

L'élément e n'appartient pas à R ; les éléments de A_o sont de la forme $\xi e + r$ avec $\xi \neq 0, r \in R$

$(\xi e + r)(\xi' e + r') = \xi\xi' e + r'' \neq 0 \quad \text{si } \xi' \neq 0$

$(\xi e + r) \quad r' = \xi r' + rr' \neq$ sauf si $(-\xi)$ est une valeur propre de R_r.

Donc
$$\left\| \begin{array}{l} N = R \cup \{ -\lambda_r e + r \ ; \ \lambda_r \text{ valeur propre de } R_r \} \\ A_o = A - N \end{array} \right.$$

Cas où l'algèbre est de grade 1

Si l'algèbre A est de grade 1, tout $t \in T(A)$ s'écrit sous la forme :

$t = \alpha I + R_a$ où $\alpha \in F$ et $a \in A$

Si l'algèbre A possède un élément unité, alors R (A) est une algèbre et A est associative, d'après un résultat vu plus haut. Supposons que A* possède un plus petit élément, soit $A_o \in A$.

Soit $a_o \in A_o$; alors pour tout $a \in A$, il existe $\alpha \in F$ et $a' \in A$ tels que :

$a = \alpha a_o + a' a_o$

Supposons qu'il existe dans A un élément b_o, tel que

$b_o a_o = a_o$ et $R_{b_o} R_{a_o} = R_{a_o}$

Alors $ab_o = \alpha a_o b_o + (a' a_o) b_o = \alpha a_o - a' a_o = a$ pour tout $a \in A$.

L'algèbre A possède alors un élément unité et est associative. Réciproquement, si A possède un élément unité e, $e \in A_o$ et $R_e R_e = R_e$, $e^2 = e$;

La condition trouvée est donc nécessaire et suffisante.

Soit A une algèbre de grade 1, telle que A* possède un plus petit élément A_o ; pour que A possède un élément unité, il faut et il suffit que, étant donné $a_o \in A_o$, il existe $b_o \in A$ tel que $a_o b_o = a_o$ et $R_{b_o} R_{a_o} = R_{a_o}$.

Nous allons améliorer légèrement cette condition.

Considérons tous les éléments a_o de A_o, et la multiplication à droite associée R_{a_o} ; si A possède un élément unité, a_o étant équivalent à e, R_{a_o} est inversible ; si donc il existe $a_o \in A_o$ tel que R_{a_o} ne soit pas inversible, l'algèbre A ne peut posséder d'élément unité.

Pour que A possède un élément unité, il faut donc que, pour tout $a_o \in A_o$, R_{a_o} soit inversible.

Si R_{a_o} est inversible, tout $a \in A$ s'écrit :

$a = a_o a'$; il suffit alors qu'il existe un élément b_o tel que $R_{b_o} R_{a_o} = R_{a_o}$

Soit A une algèbre de grade 1 telle que A* possède un plus petit élément A_o ; pour que A possède un élément unité, il faut et il suffit que pour tout $a_o \in A_o$, R_{a_o} soit inversible, et qu'il existe pour un $a_o \in A_o$, un $b_o \in A$ tel que $R_{b_o} R_{a_o} = R_{a_o}$

Précisons ce qui se passe lorsqu'il existe un élément a_o de A_o tel que R_{a_o} ne soit pas inversible.

Ecrivons l'équation caractéristique de R_{a_o} ; elle est de la forme :

$$R_{a_o}^{\,n} + \lambda_1 R_{a_o}^{\,n-1} + \dots + \lambda_{n-1} R_{a_o} = 0$$

Soit $a_o, a_1 \dots, a_{n-1}$ une base de A.

$$a_i = \alpha_i a_o + a'_i a_o$$

Posons $u_i = a_i - \alpha_i a_o \qquad i = 1, \dots, n-1$

Le système $\{a_o, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ forme une nouvelle base de A, et le sous-espace vectoriel V engendré par $u_1, \dots, u_{n-1}$ est contenu dans $a_o A$; puisque R_{a_o} est singulière, $U = a_o A$; le sous-espace U est un idéal de dimension $n - 1$,

R_{a_o} envoie A sur U, et,sur U, la restriction de R_{a_o} est bijective.

Il en résulte que, dans l'équation caractéristique de R_{a_o}, le coefficient λ_{n-1} est non nul car si $\lambda_{n-1} = 0$, R_{a_o} ne serait pas de rang n-1.

Puisque A est de grade 1, $R_{a_o}{}^p = \lambda_p I + R_{a_p}$

ce qui entraîne :

$$a_o{}^{p+1} = \lambda_p a_o + a_p a_o \quad ; \quad \text{or } a_o{}^{p+1} \text{ et } a_p a_o \in U$$

donc $\lambda_p = 0$ et

$$R_{a_o}\left[R_{a_o}{}^{n-1} + \lambda_1 R_{a_o}{}^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} I\right] = 0 \text{ s'écrit}$$

$$R_{a_o}\left[R_{a'_o} + \lambda_{n-1} I\right] = 0 \quad \text{ou } R_{a'_o} R_{a_o} + \lambda_{n-1} R_{a_o} = 0$$

Il existe donc un élément c_o tel que $R_{c_o} R_{a_o} = R_{a_o}$ (avec $a_o c_o \neq a_o$, bien entendu).

L'élément c_o est donc tel que, pour tout $u \in U$, $c_o u = u$.

Nous avons donc le résultat suivant :

Soit A une algèbre de grade 1, telle que A* possède un plus petit élément A_o ; supposons qu'il existe $a_o \in A_o$, tel que R_{a_o} ne soit pas inversible ; A possède alors un idéal U de dimension n-1, et R_{a_o} envoie A sur U ; de plus, il existe un élément $c_o \in A$ tel que $c_o u = u$ pour tout $u \in U$.

Exemples :

a) considérons l'algèbre A engendrée par $a_o, u_1, \ldots, u_{n-1}$ avec :

$$a_o{}^2 = a_o \; ; \; a_o u_i = \frac{1}{2} u_i \quad (i = 1, \ldots, n-1) ; u_i u_j = 0, (i, j, = 1, \ldots, n-1)$$

Cette algèbre est de grade 1 car :

$$R_{a_o} R_{a_o} = -\frac{1}{2} I + \frac{3}{2} R_{a_o}$$

$$R_{a_o} R_{u_i} = \frac{1}{2} R_{u_i} \qquad i = 1 \dots n\text{-}1$$

$$R_{u_i} R_{a_o} = R_{u_i} \qquad j = 1 \dots n\text{-}1$$

$$R_{u_I} R_{u_j} = 0$$

Tous les éléments n'appartenant pas à $U = (u_1, \dots, u_{n-1})$ sont équivalents, et leurs multiplications à droite sont inversibles. Cependant, il n'existe pas d'élément b_o tel que $R_{b_o} R_{b_o} = R_{a_o}$; il n'y a donc pas d'élément neutre.

b) considérons l'algèbre A engendrée par $(a_o, u_1, \dots, u_{n-1})$ avec =

$$a_o^2 = u_{a_o} \quad ; \quad a_o u_i = u_i \quad ; \quad u_i u_j = 0$$

elle est de grade 1, en effet :

$$R_{a_o} R_{a_o} = R_{a_o} \; ;$$

$$R_{u_i} R_{a_o} = 0 \qquad i = 1 \dots n\text{-}1$$

$$R_{a_o} R_{u_i} = R_{u_I} \qquad i = 1 \dots n\text{-}1$$

$$R_{u_i} R_{u_j} = 0 \qquad i, j = 1 \dots n\text{-}1$$

L'idéal U est $U = (u_1 \dots u_{n-1})$

Les éléments équivalents à a_o forment le plus petit élément de A ; R_{a_o} n'est pas inversible ; a_o est tel que $a_o u = u$ pour tout $u \in U$.

Ici $A_o = \left\{ a_o + u \; ; \quad u \in \cup \right\}$

$$N = U_u \left\{ \xi a_o + u \; ; \; \xi \neq 1 \; ; \; u \in \cup \right\}$$

2) T (A) - isotopie - Cas des algèbres de grade 1

Nous allons, à partir de la notion générale d'isotopie, introduire la notion de T(A)-isotope, d'une algèbre A donnée, et étudier les T(A)-isotopes d'une algèbre A de grade 1.

Algèbres isotopes

Soient deux algèbres de dimension n sur le même corps F, soit A et A_o nous pouvons identifier par isomorphisme les deux espaces vectoriels ; nous pouvons donc considérer que nous avons les mêmes éléments, avec deux lois de multiplication différentes.

Dans A $\quad : \quad ax = R_x(a)$

Dans A_o $\quad : \quad aox = R^o{}_x\,(a)$

Nous disons que A est une isotope de A_o s'il existe trois transformations linéaires non singulières, P, Q, S telles que :

$$R_x{}^{(o)} \; = \; SR_{Q(x)}\,P$$

On voit facilement que cette relation est une relation d'équivalence. Nous pouvons donc dire que A et A_o sont isotopes l'une de l'autre. La commutativité de l'une des algèbres n'entraîne pas nécessairement la commutativité de l'autre.

Si donc nous ne supposons pas A et A_o commutatives, nous avons facilement, pour les multiplications à gauche :

$$L^o{}_x \; = \; SL_{P\,(y)}\,Q$$

Il est possible d'alléger les notations en introduisant la notion d'isotopie principale : toutes les isotopes d'une algèbre A sont équivalents à une isotope principale A_o, définie par :

$$R_x{}^o \; = \; R_{Q\,(x)}\,P \qquad\qquad L_x{}^{(o)} = L_{p\,(x)}\,Q$$

P et Q étant des transformations linéaires non singulières.

T(A)-isotopie

Une algèbre A_o est dite T(A)-isotope principale de A si :

$$R_x^{\,o} = R_{\theta(x)}\, t \qquad\qquad L_x^{\,o} = L_{t(x)}\, \theta$$

avec $\theta, t \in T(A)$; θ et t inversibles.

Nous voyons facilement que A et A_o sont alors isotopes au sens du paragraphe précédent ; cependant la T(A)-isotope n'est pas en général une relation d'équivalence, et même, si A_o est T(A)-isotope de A, A n'est pas en général $T(A_o)$-isotope de A_o ; nous avons en général $T(A_o) \subset T(A)$

Condition nécessaire et suffisante pour que $T(A_o) = T(A)$

Pour que $T(A_o) = T(A)$, il faut et il suffit que t et θ appartiennent à $T(A_o)$.

La condition est nécessaire, en effet si $T(A) = T(A_o)$, t et θ, éléments de T(A) sont éléments de $T(A_o)$.

La condition est suffisante : si $t \in T(A_o), \theta \in T(A_o)$:

$$R_{\theta(x)} = R_x^{\,o} t^{-1} \qquad\qquad L_{t(x)} = L_x^{\,o} \theta^{-1}$$

Rappelons que si $t \in T(A_o)$,pour une algèbre de dimension finie, et si t^{-1} existe, $t^{-1} \in T(A_o)$; en effet, écrivons l'équation caractéristique vérifiée par t :

$$t^n + \lambda_1 t^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} t + \lambda_n I = 0 \qquad \lambda_n \neq 0 \qquad \lambda_i \in F$$

$$t\left[t^{n-1} + \lambda_1 t^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} I\right] = -\lambda_n I = \left[t^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} I\right] t$$

Posant $t' = \dfrac{1}{\lambda_n}\left[t^{n-1} + \lambda_1 t^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} I\right]$

t' est un élément de $T(A_o)$, algèbre associative, et

$$tt' = t't = I \qquad ; \qquad \text{donc } t' = t^{-1} \in T(A_o)$$

Puisque t et θ sont inversibles, pour tout $x \in A$

$$R_x = R^o_{\theta^{-1}(x)}\, t^{-1} \qquad L_x = L^o_{t^{-1}(x)}\, \theta^{-1}$$

ce qui montre en même temps que $T(A) = T(A_o)$ et que **A et A_o sont T-isotopes**

Algèbre A commutative de grade 1

Soit A commutative de grade 1, ce qui signifie que tout

$$t \in T(A) \text{ s'écrit } t = \alpha I + R_x \qquad x \in A, \alpha \in F.$$

Toute algèbre T(A)-isotope de A est définie par

$$R^o_x = R_{\theta(x)}\, t \qquad L^o_x = L_{t(x)}\theta = R_{t(x)}\theta$$

avec $t = \alpha I + R_a \qquad \theta = \beta I + R_b$

Tout d'abord, une **remarque** générale : soit A, non supposée de grade 1, mais possédant un élément unité : alors

$$R^o_{\theta(e)} = R_e t \quad ; \quad L^o_{t^{-1}(e)} = L_e \theta \quad ; \quad R_e = L_e = I$$

Donc $\quad t = R^o_{\theta^{-1}(e)} \quad ; \quad \theta = L^o_{t^{-1}(e)}$

Alors $T(A) = T(A_o)$

Donc : si A, algèbre quelconque, possède un élément unité, alors, pour tout A_o T(A)-isotope de A, $T(A_o) = T(A)$; A et A_o sont T-isotopes.

Revenons au cas de l'algèbre A de grade 1, A étant commutative.

Traitons tout d'abord **le cas où $t = \theta$**

$$R^o_x = R_{t(x)}\, t \qquad L^o_x = R_{t(x)}\, t$$

A_o est alors commutative.

Puisque A est de grade 1, $t = \alpha I + R_a$ où $\alpha \in F$, $a \in A$

t est inversible, c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in F$ et $b \in A$ tels que :

$$(\alpha I + R_a)(\beta I + R_b) = (\beta I + R_b)(\alpha I + R_a) = I$$

$$R^o{}_x = \alpha R_{t(x)} + R_{t(x)} R_a \qquad \text{pour tout } x \in A$$

soit c tel que $t(c) = b$

$$R^o{}_c = \alpha R_b + R_b R_a \quad ; \quad \text{or}$$

$$\alpha R_b + R_b R_a = I - \alpha\beta I - \beta R_a$$

$$R^o{}_c = I - \beta(\alpha I + R_a) = I - \beta t$$

Donc deux cas sont à considérer :

si $\beta \neq 0$ $\qquad t = \frac{1}{\beta}(I - R^o{}_c)$

et $t \in T(A_o)$; donc $T(A) = T(A_o)$

montrons qu'alors A_o est aussi de grade 1 ; en effet pour tout $z \in A$, l'inversibilité de t entraîne l'existence de $\gamma \in F$ et $x \in A$ tels que

$$(\gamma I + R_x)t = R_z \qquad \text{c'est-à-dire } \gamma t + R_x t = R_z$$

ou encore $\qquad \frac{\gamma}{\beta}(I - R^o{}_c) + R^o{}_{t^{-1}(x)} = R_z$

ce qui prouve que R_z est de la forme :

$$R_z = \lambda I + R^o{}_v \ ; \ \lambda \in F \qquad v \in A \quad ; \quad \text{par conséquent}$$

$$R^o{}_v R^o{}_w = \theta I + R_s = \theta' I + R^o{}_{s'}, \text{ pour tout } v, w \in A$$

A_o est alors de grade 1

Donc si l'inverse de t n'appartient pas à R(A), $T(A) = T(A_o)$ et A_o est de grade 1.

Si $\beta = 0$ $\quad R^o_c = I$

L'algèbre A_o admet c pour élément unité

Nous voyons immédiatement que nous sommes dans ce cas lorsque A possède un élément unité ; nous avons vu dans une remarque précédente qu'alors $T(A) = T(A_o)$ et $t = R^o{}_{t^{-1}(e)}$; puisque A est de grade 1, et puisque A est de grade 1, et puisque l'on a alors, pour tout $z \in A$

$$R_{z'}t = R_z = R^o{}_{t^{-1}(z')}$$

A_o est de grade 1.

Si donc A possède un élément unité, $T(A) = T(A_o)$ et A_o est une algèbre de grade 1 à élément unité, c'est-à-dire une algèbre associative.

Supposons alors que A n'aie pas d'élément unité, tout en ayant toujours $\beta = 0$.

Soit t^o un élément de $T(A_o)$; $t^o = \gamma I + R_z$;

t étant inversible $\gamma I + R_z = (\gamma' I + R_{z'})\, t$

$t^o = \gamma' t + R_{z'}t$ c'est-à-dire

pour tout $t^o \in T(A_o)$ il existe $\gamma' \in F$ $z' \in A$

$$t^o = \gamma' t + R^o{}_{t^{-1}(z')}$$

Donc soit $t \in T(Ao)$ et $T(A) = T(A_o)$

soit A_o est une algèbre de grade 1 avec élément unité.

On ne peut avoir simultanément dans ce cas $T(A) = T(A_o)$ et A_o de grade 1, car dans ce cas : on aurait $t = R^o{}_d$; $R^o{}_d = R_{t(d)}R^o{}_d$ et A aurait un élément unité ; ce qui est exclu.

Si l'inverse de t appartient à R(A), il y a deux possibilités ; (A n'ayant pas d'élément unité) – ou $T(A) = T(A_o)$ et A_o est de grade supérieur à 1 (ce grade étant donné par le degré de t) avec élément unité – ou $T(A_o) \subset T(A)$ et A_o est une algèbre de grade 1 à élément unité, donc associative.

Supposons maintenant $t \neq \theta$

$R^o{}_x = R_{\theta(x)}\, t \qquad\qquad L^o{}_x = R_{t(x)}\theta$

$t = \alpha I + R_a \qquad\qquad \theta = \beta I + R_b$

t et θ sont inversibles et ont respectivement pour inverses

$t' = \gamma I + R_c \quad ; \quad \theta' = \delta I + R_d$

de même que plus haut

$R^o{}_x = \alpha R_{\theta(x)} + R_{\theta(x)} R_a$

$L^o{}_x = \beta R_{t(x)} + R_{t(x)} R_b$

soit c' et d' tels que $\theta(c') = c \quad t(d') = d$

$R^o{}_{c'} = \alpha R_c + R_c R_a \quad ; \quad (\gamma I + R_c)(\alpha I + R_a) = I$

$L^o{}_{d'} = \beta R_d + R_d R_b \quad ; \quad (\delta I + R_d)(\beta I + R_b) = I$

d'où $R^o{}_{c'} = I - \gamma t \quad ; \quad L^o{}_{d'} = I - \delta\theta$

Si δ et γ sont différents de zéro

$t = \frac{1}{\gamma}(I - R^o{}_{c'}) \qquad \theta = \frac{1}{\gamma} \quad (I - L^o{}_{d'})$

t et θ appartiennent à $T(A_o)$ donc $T(A) = T(A_o)$.

Nous voyons comme plus haut que R_z s'exprime en fonction de $R^o{}_{z'}$ et de I ; il en résulte que A_o est de grade 1.

Donc si les inverses t' et θ' de t et θ n'appartiennent pas à R(A), T(A) = T(A_o) et A_o est une algèbre (non commutative en général) de grade 1.

Si $\gamma \neq 0$ $\delta = 0$

$R^o{}_{c'} = I - \gamma t \qquad t = \frac{1}{\gamma}(I - R^o{}_{c'})$

$L^o{}_{d'} = I$

A_o possède un élément unité à gauche, et $t \in T(A_o)$ comme plus haut, nous pouvons écrire pour tout $t^o \in T(A_o)$

$t^o = \mu' \theta + R_z, \theta = \mu' \theta + L^o{}_{t^{-1}}(z')$

par conséquent :

- ou $\theta \in T(A_o)$ et $T(A) = T(A_o)$

ici encore $R_z = (\lambda I + R_x)\, t$

$\lambda t + R_x t = R_z$; donc $R_z = \dfrac{\lambda}{\gamma}(I - R^o{}_{c'}) + R^o{}_{\theta^{-1}}(x)$

tout élément t^o de A_o s'écrit $t^o = \alpha I + R_z$ donc $t^o = \mu\, I + R^o{}_u$

A_o est donc ici de grade 1

- ou $t^o = L^o{}_{t^{-1}}(z')$ pour tout $t^o \in A_o$

A_o est alors de grade 1, avec un élément unité à gauche, et l'on a encore $T(A) = T(A_o)$.

Si $\gamma = 0$ $\delta \neq 0$

Nous démontrerions de même que A_o est une algèbre de grade 1, ayant un élément unité à droite, et que $T(A) = T(A_o)$

Si l'un des deux inverses t' et θ' n'appartient pas à R(A), l'autre étant un élément de R(A), $T(A) = T(A_o)$ et A_o est une algèbre de grade 1, ayant soit un élément unité à gauche, soit un élément unité à droite.

Si $\gamma = \delta = 0$

$R^o{}_{c'} = I$ $\qquad L^o{}_{d'} = I$ $\qquad$ d'oc' = c' = d'

donc A_o possède un élément unité

pour tout $t^o \in A^o$

$t^o = \lambda t + R^o{}_{\theta^{-1}}(z)$

$t^o = \mu \theta + L^o{}_{t^{-1}}(u)$

- ou t et $\theta \in T(A_o)$ et $T(A) = T(A_o)$

A_o est de grade 1 si et seulement si A possède un élément unité.

– ou $t \in T(A_o)$ et $t^o = L^o{}_{t^{-1}}(u)$

– ou $\theta \in T(A_o)$ et $t^o = R^o{}_{\theta^{-1}}(z)$

– ou $t^o = L^o{}_{t^{-1}}(u) = R^o{}_{\theta^{-1}}(z)$

Dans ces trois cas, puisque l'algèbre A_o est de grade 1 et possède un élément unité, A_o est associative ; mais on n'a pas nécessairement $T(A) = T(A_o)$

Si t' et θ' appartiennent tous deux à R(A), A n'ayant pas d'élément unité, il y a deux possibilités : – ou $T(A) = T(A_o)$ et A_o est de grade supérieur à 1 avec élément unité – ou $T(A_o) \subset T(A)$ et A_o est une algèbre associative à élément unité.

Nous avons donc étudié les propriétés de toutes les T(A)-isotopes de A, A étant une algèbre commutative de grade 1.

Nous allons nous demander maintenant s'il est toujours possible de construire de telles algèbres : pour cela, il faut et il suffit qu'il existe dans T(A) des éléments inversibles.

a) Si T(A) = R(A) il n'existe pas toujours des éléments inversibles ; s'il n'en existe pas, on ne peut construire de T(A)-isotopes ; s'il existe un ou plusieurs éléments inversibles, les T(A)-isotopes que l'on peut construire rentrent dans les cas désignés par «les inverses de t et de θ appartiennent à R(A)».

b) Si T(A) = R(A), plusieurs cas sont possibles.

Démontrons tout d'abord que pour tout $a \in A$ et à condition que le corps F ait une infinité d'éléments, il existe une infinité d'éléments $\alpha \in F$ tels que $\alpha \neq o$ et $\alpha I + R_a$ soit inversible :

en effet, dire que $\alpha I + R_a$ n'est pas inversible, c'est dire que $\Delta(\alpha I + R_a) = 0$, c'est-à-dire que α est valeur propre de R_a ; R_a possède au plus n valeurs propres distinctes, donc pour tout α n'appartenant pas à l'ensemble fini formé par les n valeurs propres et l'élément o, $\alpha I + R_a$ est inversible.

– s'il n'existe pas d'éléments de R(A) inversibles, il n'existe que des T(A)-isotopes de la forme «t', θ ' n'appartiennent pas à R(A)».

– s'il existe des éléments de R(A) inversibles A possède des T(A)-isotopes de toutes les formes rencontrées.

Voyons maintenant quels sont les cas où A admet des T-isotopes, c'est-à-dire des T(A)-isotopes A_O telles que $T(A) = T(A_O)$:

a) Si $T(A) = R(A)$, toute T(A)-isotope de grade supérieur à 1 est une T-isotope de A ;

b) Si $T(A) \neq R(A)$

– s'il n'existe pas d'éléments de R(A) inversibles, toutes les T(A)-isotopes sont T-isotopes

– s'il existe des éléments de R(A) inversibles, les T(A)-isotopes de la forme «t', θ', n'appartiennent pas tous deux à R(A)» sont T-isotopes ; les T(A)-isotopes de la forme «t' et θ' appartiennent à R(A)» sont T-isotopes seulement lors - qu'elles sont de grade supérieur à 1.

Condition pour qu'une algèbre commutative de grade supérieur à 1, ait une T-isotope commutative de grade 1.

Condition nécessaire

D'après ce qui précède, il faut que A possède un élément unité et que pour tout $T \in T(A)$, il existe $\gamma \in F$ et $x \in A$ tels que, pour un t au moins de T(A), t étant inversible, $T = \gamma t^{-1} + R_x$

Ces conditions sont suffisantes

En effet, puisque A possède un élément unité, comme nous l'avons vu plus haut, $t(A) = T(A_O)$ pour toute T(A)-isotope, qui est donc une T-isotope.

Soit A_O la T-isotope définie par :

$$R_x{}^O = L_x{}^O = R_{t(x)}t$$

Pour tout $T^O \in T(A_O)$, il existe $T \in T(A)$ tel que $T^O = T$; puisque t est inversible, $T = T't$; d'après l'hypothèse : $T' = \gamma t^{-1} + R_x$

donc $T't = T = \gamma I + R_x t$; $T = \gamma I + R^O{}_{t^{-1}(x)}$

Donc pour tout $T^O \in T(A_O)$

$T^O = \gamma I + R^O{}_{t^{-1}(x)}$ $\qquad T^O = \gamma I + R_y$

et A_O est de grade 1.

Deuxième Partie

INTRODUCTION

Nous donnons tout d'abord un bref rappel sur les notions de génétique nécessaires à la compréhension de cette partie.

Vient ensuite un chapitre étudiant les diverses sortes d'algèbre utilisées en génétique : ces algèbres, algèbre génétique, train algebra, special train algébra, ont été introduites par Etherington et Schafer.

Nous appliquons alors les notions de grade et d'ensemble A* à certaines algèbres génétiques, et en déduisons un certain nombre de résultats sur ces algèbres.

BIBLIOGRAPHIE

ETHERINGTON Genetic algebras
(Proc. Roy. Soc. Edinburgh, t. 59. p 242 - 258)

ETHERINGTON Special train algebras
(Quart. J. Maths. t. 12, p.1 - 8)

SCHAFER Structure of genetic algebras
(Amer. J. Math., t. 71, p.121 - 135)

GONSHOR Special train algebras arising in genetics
(Proc. Edinburgh Math. Soc.(2), t. 12, p.41 - 53)

Chapitre I

NOTIONS de GENETIQUE.

Les caractères héréditaires, ou génétiques, sont déterminés par de petites particules matérielles, les gênes, qui se trouvent dans toutes les cellules du corps. En général, les gênes se transmettent sans altération de génération en génération. D'autre part, on les trouve le plus souvent par paires. Si une paire donnée est formée de deux gênes identiques, l'individu est «homozygote» relativement au caractère considéré ; si les gênes ne sont pas les mêmes, l'individu est «hétérozygote ».

Soit donc un caractère déterminé, - par exemple la couleur d'une fleur celle des yeux, etc. - qui puisse présenter deux modalités, foncé et clair, ou rouge et blanc, etc...

La paire de gênes correspondant à ce caractère pourra être alors : AA, aa, ou Aa. AA et aa étant homozygotes, Aa étant hétérozygote. A et a sont dits gênes allèles.

Aa, AA et aa sont les trois génotypes possibles. Le génotype donne donc l'expression de la constitution génétique de l'individu.

Mais il faut tenir compte également de son phénotype, c'est-à-dire de son apparence relativement au caractère considéré ; la relation entre génotype et phénotype dépend alors des caractéristiques des gênes qui déterminent le caractère.

Exemples :

Prenons comme caractère étudié la couleur des belles de nuit. Cette couleur est déterminée par une paire de gênes pouvant être

RR	BB	RB
rouge	blanc	rose

Les homozygotes sont rouges ou blanc, les hétérozygotes roses. Il y a dans ce cas identité entre génotype et phénotype.

Prenons au contraire la couleur du pelage chez les souris.

Les génotypes sont :

GG	GB	BB

Les phénotypes sont respectivement :

gris	gris	blanc

L'homozygote gris présente le même phénotype que l'hétérozygote. Les gênes tels que G sont dits «dominants», ceux tels que g sont dits «récessifs».

Enonçons maintenant les lois de Mendel.

Première loi de Mendel

Comme nous l'avons dit précédemment, les gênes se trouvent par paires dans toutes les cellules d'un organisme adulte. Cela à une exception près : les cellules reproductrices, ou «gamètes», n'ont chacune que l'un des gênes d'une paire donnée.

Ainsi, considérons un individu AA : tous les gamètes qu'il fournit contiennent le gêne A. De même, tous les gamètes fournis par un individu aa contiennent le gêne a. Mais dans le cas d'un individu Aa, les gamètes contiennent soit le gêne a, soit le gêne A, et ceux-ci en proportions égales généralement.

Au moment de la reproduction, un spermatozoïde porteur de l'un des gênes du parent mâle s'unit à un ovule porteur de l'un des gênes du parent femelle, pour donner un oeuf, ou zygote, qui possède alors une paire de gênes. Cet oeuf se développera pour donner un individu dont les cellules contiendront un gêne provenant de l'un des parents et un gêne de l'autre parent.

C'est ce qui exprime la première loi de Mendel.

Prenons maintenant quelques exemples de croisement, de manière à voir ce qui se produit.

Croisons, par exemple, un individu AA et un individu aa. Tous les gamètes libérés par le premier contiendront le gêne A, tous ceux libérés par le second contiendront a.

Tous les individus produits seront alors du même génotype : Aa.

Si le couple de gênes considéré est tel que A soit dominant et a récessif, tous les enfants présenteront le même phénotype que le parent AA ; le phéno type aa aura disparu, seulement momentanément d'ailleurs, ce qu'il est facile de voir en croisant deux individus Aa. Chaque hétérozygote produit les gênes A, et a, en même nombre. Les individus produits pourront alors être Aa, AA ou aa, et dans les proportions 1/4 pour AA, 1/2 pour Aa, et 1/4 pour aa. Le phénotype aa, qui avait disparu, reparaît lors de ce croisement. Les individus AA et Aa auront le même phénotype.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des caractères pour lesquels les deux parents jouent des rôles symétriques. Il en existe cependant qui sont directement liés au sexe : nous regarderons ce cas de plus pres dans quelques paragraphes.

Deuxième loi de Mendel

Considérons maintenant simultanément deux ou plusieurs caractères héréditaires:

La deuxième loi de Mendel dit que, lors de la reproduction, les paires de gênes considérées, sont transmises indépendamment les unes des autres.

Ainsi, soit deux paires de gênes A, a et B, b ; croisons un individu AA BB avec un individu aa bb ; les produits de ce croisement seront alors tous de formule génotypique AaBb.

Si nous croisons ensuite deux individus, AaBb, la loi de Mendel nous dit que chacun produira quatre sortes de gamètes, — AB, ab, Ab, aB, en nombres égaux, ce qui donne neuf génotypes distincts

AABB	AaBb	AABb	AaBB
aabb	Aabb	aaBb	
AAbb	aaBB		

Dans certains cas, la deuxième loi de Mendel se vérifie bien, mais il existe de nombreuses exceptions. Et ces exceptions s'expliquent grâce aux notions que nous allons exposer dans le paragraphe suivant, et en particulier grâce à la représentation chromosomique.

Chromosomes et linkage

Dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué l'hérédité grâce à la présence des gênes, et cela de façon assez abstraite, sans nous préoccuper de la façon dont ceux-ci étaient répartis dans la cellule vivante.

Les gênes sont de petites particules matérielles, très nombreuses, situées à l'intérieur du noyau de la cellule, et y sont alignées le long de corpuscules appelés chromosomes. Les chromosomes sont présents par paires, et le nombre de paires est généralement constant pour une espèce donnée.

Ainsi l'homme a 23 paires de chromosomes, la drosophile 4 paires, la souris 20.

Les deux gènes d'une paire déterminant les modalités d'un caractère donné se trouvent localisés en deux endroits précis d'une paire de chromosomes bien déterminés et ces «endroits» sont appelés les «loci».

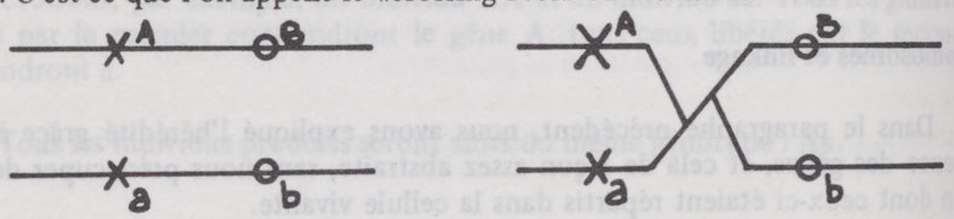
Ce sont donc les loci qui sont alignés sur les chromosomes ; un locus donné peut être occupé par l'un ou l'autre des allèles déterminant un facteur particulier.

La seconde loi de Mendel s'applique bien aux chromosomes. Il en résulte que les gènes dont les loci se trouvent sur des chromosomes différents seront transmis de façon indépendante. Mais les gênes dont les loci se trouvent sur le même chromosome ne se comportent pas suivant la loi de Mendel. Et leur comportement dépendra de la proximité des loci sur le chromosome. C'est ce que l'on appelle le phénomène du «linkage».

Voyons sur un exemple ce que signifie le linkage.

Soit un individu AaBb, et supposons que les loci considérés se trouvent sur la même paire de chromosomes. On peut avoir, soit A et B sur un chromosome et a et b sur l'autre – ce que l'on appelle «coupling» AB/ab, soit A et b sur un chromosome et a et B sur l'autre, ce qu'on appelle «répulsion» Ab/aB.

Les phénomènes qui constituent la reproduction sont assez complexes. La production des gamètes s'effectue suivant le mécanisme de la meïose: un seul chromosome de chaque paire passe dans chaque gamète ; ce qui entraîne bien que chaque gamète ne possède que l'un des deux gènes homologues d'une paire. Et pendant la meïose, il y a des échanges entre les deux chromosomes d'une paire. C'est ce que l'on appelle le «crossing-over» ou recombinaison :



Si le nombre de points d'échange entre A et B est pair, le résultat final sera identique à la situation de départ en ce qui concerne ABab.

Mais si ce nombre est impair, nous pouvons obtenir les combinaisons Ab/aB, en étant partis de AB/ab, et inversement.

Nous allons donc définir la fraction de recombinaison, y, qui est la proportion des gamètes ayant subi le crossing-over ; 1-y est alors la proportion des gamètes qui sont restés ceux des parents. Ainsi, si nous effectuons un croisement AB/ab x ab/ab, avec absence de linkage, nous aurons les quatre sortes de gamètes AB', Ab, aB et ab en proportions égales. Et s'il y a dominance de A sur a et de B sur b, les produits du croisement seront répartis également en quatre classes de phénotypes.

Mais s'il y a linkage, les quatre classes de phénotypes n'auront plus le même nombre d'individus.

Nous aurons les proportions :

AB	Ab	aB	ab
$\frac{1}{2}(1 - y)$	$\frac{1}{2}\,y$	$\frac{1}{2}\,y$	$\frac{1}{2}(1 - y)$

L'absence de linkage correspond donc à la valeur $y = \frac{1}{2}$.

La valeur de y est variable suivant la proximité des loci considérés sur le chromosome : si les deux loci sont éloignés, y sera important, car il n'y aura pas de grande différence entre ce cas et l'absence de linkage. Au contraire, si les deux loci sont proches, le linkage sera important et la valeur de y sera faible.

Carte chromosomique

La notion de fraction de recombinaison a été utilisée pour mesurer la distance des loci sur un chromosome. En effet, sa valeur peut être déterminée expérimentalement, et l'on en déduit alors la «distance» des loci considérés. Mais ce calcul n'est valable en fait que si les loci sont suffisamment proches, donc si y est faible. En effet, c'est dans ce cas seulement que la propriété d'addition est vérifiée : si l'on considère trois loci ABC, pris dans cet ordre, y_{AC} est égale à la somme de y_{AB} et de y_{BC}, seulement si ces valeurs sont faibles. On a alors voulu définir la distance entre deux loci comme la valeur moyenne du nombre de points d'échange sur le segment joignant ces deux loci ; cette définition respecte évidemment la propriété d'additivité. On suppose que les points d'échange sont des évènements aléatoires, leur densité moyenne étant constante, lorsqu'on utilise une échelle de mesure convenable. Cela signifie que le nombre de points d'échange entre A et B pour une seule meïose s'écrit suivant une distribution de Poisson, dont le paramètre est la distance x entre A et B. La probabilité pour qu'il y ait exactement r points d'échange est :

$$P_r(x) = \frac{x^r e^{-x}}{r!}$$

$$\text{d'où } y = \sum_{r=0}^{\infty} P_{2r+1}(x) = e^{-x} \sum \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} \quad \text{et } y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$$

ce qui est la formule de Haldane. On retrouve bien dans cette formule le fait que pour des loci proches, x et y sont équivalents.

On mesure ces distances en morgans, ou centimorgans.

Cependant, cette étude n'est satisfaisante que dans les cas où les crossing over sont eux-mêmes des évènements aléatoires et indépendants les uns des autres, Dans les cas d'«interférence», c'est-à-dire lorsque l'existence d'un crossing-over en un point déterminé tend à influencer l'existence d'autres crossing-over dans le voisinage, la distance définie plus haut ne convient plus. Il faut alors faire appel à des métriques spéciales, comme celle de Kosambi, par exemple. Elles permettent de tenir compte avec plus de fidélité des phénomènes qui interviennent en réalité.

Transmission du sexe et des caractères liés au sexe.

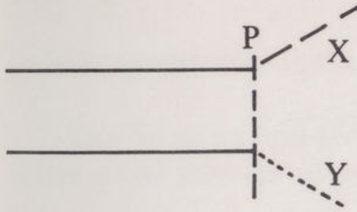
La transmission du sexe se trouve déterminée par une paire de chromosomes «hétérosomaux» ainsi désignés par opposition aux autres, les chromosomes «autosomaux». Les chromosomes hétérosomaux sont de deux sortes, les X et les Y.

Le sexe homogamétique a pour formule XX, le sexe hétérogamétique a pour formule XY. Chez les mammifères, le mâle est XY et la femelle XX ; chez les oiseaux, chez certains poissons, c'est le contraire.

Au moment de la reproduction, l'individu XX libère le gamète X, tandis que l'individu XY libère les gamètes X et Y en proportions égales. L'oeuf produit aura donc pour formule XX ou XY et appartiendra donc à l'un ou l'autre sexe.

D'autre part, ces chromosomes X ou Y ne déterminent pas que le sexe. Ils portent en général un grand nombre de gênes déterminant d'autres caractères. Ces caractères sont dits liés au sexe.

Considérons alors les chromosomes hétérosomaux et voyons leur constitution. Les parties en trait plein forment une paire, et se comportent comme des chromosomes autosomaux, tandis que les autres segments se comportent différemment ; ainsi, il ne peut y avoir entre eux aucun crossing-over dans le cas XY, alors que dans le cas XX, il peut s'en produire. Il en résulte que nous pouvons distinguer trois sortes de caractères liés au sexe :



Premier cas :

Les loci se trouvent sur les segments identiques. Nous avons comme individus possibles :

Xa/Xa ; XA/Xa ; XA/XA ;

YA/Xa ; Ya/XA ; YA/XA ; Ya/Xa .

En effectuant des croisements appropriés à la mesure du coefficient de recombinaison, nous déterminerons en fait si le locus considéré est près ou loin du point limite P ; y indique alors le nombre de points d'échange entre le locus et le point P. On désigne ces caractères par l'expression : caractères liés au sexe.

Deuxième cas :

Supposons que le locus se trouve sur le deuxième segment du chromosome X et que le chromosome Y ne joue pas de rôle vis-à-vis du caractère considéré. C'est le cas du daltonisme, par exemple. Dans ce cas, il n'y a pas de recombinaison, et l'on dit que le caractère est totalement lié au chromosome X.

Troisieme cas :

Il peut y avoir enfin liaison totale avec le chromosome Y, ce qui est assez rare.

On peut, enfin, considérer le linkage entre deux caractères ordinaires, mais situés sur les chromosomes hétérosomaux. La même étude que ci-dessus peut alors être réalisée.

Les développements que nous venons de donner sont suffisants pour la compréhension de ce qui va suivre ; mentionnons cependant que les lois de Mendel ne se vérifient pas toujours aisément, et qu'il faut tenir compte de nombreux phénomènes susceptibles de les altérer : par exemple, la mutation, la sélection - naturelle ou provoquée - les anomalies, comme la polyploïdie par exemple.

Partie II

Chapitre II

Diverses sortes d'algèbres utilisées en génétique.

Chapitre III

Application à divers problèmes de génétique.

RESUME

Ces deux chapitres rappellent et étendent les notions introduites par Etherington, algèbre pondérée, algèbre génétique, train algebra, special train algébra ; on y construit à l'aide des lois de la génétique, certaines algèbres ainsi introduites, et l'on étudie leurs propriétés.

Chapitre IV

Grade des special train algebras dont le noyau est nilpotent d'altitude 1 ou 2.

Nous avons vu que les special train algebras possèdent en général au moins un idempotent non nul. Nous nous plaçons dans ce cas.

La base de A s'écrit alors : $(e, u_1 \ldots, n_{n-1})$ avec

$$e^2 = e \qquad eu_i = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1})$$

$$u_i u_j = (u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_{n-1}) \qquad \forall\, i, j \qquad i \leqslant j$$

Nous allons donner des résultats pour de telles algèbres définies sur R ; tout d,abord lorsque le noyau est nilpotent d'altitude 1.

i Algèbre dont le noyau est nilpotent d'altitude 1.

Alors $\qquad e^2 = e$

$$u_i u_j = 0 \qquad \forall\, i,j \qquad \lambda_i, \beta_{ik} \in R$$

$$eu_i = \lambda_i u_i + \sum_{i+1}^{n-1} \beta_{ik} u_k$$

On forme l'équation au rang de A :

$$x^{k+1} + \delta_1 x^k + \ldots + \delta_k x = 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Ou encore, avec des racines éventuellement complexes :

$$x\,(x-\xi)\,(x-\rho_{k-1}\xi)\ldots\;\;(x-\rho_{k-1}\xi) \;=\; 0$$

où $\quad x = \xi e + \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i \qquad\qquad \xi = w\,(x)$

1er cas k = 1

L'équation au rang est alors $x\,(x - \xi) = 0$

Alors, comme

$$x^2 \quad \xi x = \xi \sum_{1}^{n-1} \eta_i \;\; (2eu_i - u_i)$$

nécessairement, puisque $x^2 - \xi x = 0$ pour tout x, tous les coefficients des η_i doivent être nuls et

$$eu_i = \frac{1}{2}\, u_i$$

Alors, dans T(A) :

$$R_eR_e \qquad = -\frac{1}{2} I + \frac{3}{2}\; R_e$$

$$R_eR_{u_i} \qquad = \frac{1}{2}\; R_{u_i} \qquad \forall\, i$$

$$R_{u_i}R_e \qquad = R_{u_i} \qquad \forall\, i$$

$$R_{u_i}R_{u_j} \qquad = 0 \qquad \forall\,(i,\,j)$$

Le grade de T(A) est donc 1

De plus R_x, qui vérifie son équation caractéristique de degré n, vérifie également l'équation de degré 2.

$$R_x{}^2 = \frac{3}{2}\, \xi R_x - \frac{\xi^2}{2}\, I$$

Enfin tout élément T de T(A), qui s'écrit $T = \alpha I + R_x$, vérifie l'équation :

$$T^2 - (2\alpha + \frac{3}{2}\xi)\, T + (\alpha^2 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{3}{2}\xi\alpha)\, I = 0$$

On voit que T(A) est pondérée : la fonction $r(T) = \alpha + \xi$ vérifie les axiomes de définition d'une fonction poids ; elle est de rang 2 ; cependant T(A) n'est pas train algebra, donc, à fortiori, n'est ni algèbre génétique, ni special train algebra.

2ème cas k = 2

L'équation au rang s'écrit :

$x(x - \xi)(x - \rho\xi)$ O 0 où ρ est nécessairement réel.

Or, $x^2 - \xi x = \xi \sum_{1}^{n-1} \eta_i\, (2eui - u_i)$

$$x(x^2 - \xi x) = \sum_{1}^{n-1} \eta_i\, (2\, (eu_i)e - eu_i)$$

$$x(x - \xi)(x - \rho\xi) = \xi^2 \sum_{1}^{n-1} \eta_i\, [2(eu_i)e - (2\rho + 1)\, eu_i + \rho u_i]$$

Dire que l'équation au rang est de degré 3, c'est dire que :

$2(eu_i)e - (2\rho + 1)\, eu_i + \rho u_i = 0$ pour tout i

On peut voir alors que :

$$R_eR_eR_e = (\frac{3}{2} + \rho)\, R_eR_e - (\frac{3\rho}{2} + \frac{1}{2})\, R_e + \frac{\rho}{2}\, I$$

$$R_{u_i}R_e = R_{u_i}$$

$$R_{u_i}R_eR_e = R_{u_i} \qquad \text{pour tout } i$$

$$R_eR_{u_i}R_e = R_eR_{u_i}$$

$$R_eR_eR_{u_i} = -\frac{\rho}{2}\, R_{u_i} + (\rho + \frac{1}{2})\, R_eR_{u_i}$$

$R_{u_i} R_{u_j} = 0$ pour tout (i, j)

La base est donc contenue dans :

$$\left\{ I,\ R_e,\ R_{u_i},\ R_e R_e,\ R_e R_{u_i}\ ;\ i = 1, \dots n \right\}$$

Le grade est donc 2 au plus.

Ici encore, R_x vérifie une équation du 3e degré :

$$R_x{}^3 - \xi\left(\frac{3}{2} + \rho\right) R_x{}^2 + \xi^2 \left(\frac{3\rho}{2} + \frac{1}{2}\right) R_x - \xi^3 \frac{\rho}{2} I = 0$$

Cas général

L'équation au rang, de degré $k + 1$, s'écrit :

$$x(x - \xi)(x - \rho_1 \xi) \dots (x - \rho_{k-1} \xi) = 0$$

ce qui équivaut par identification à :

$$R_e{}^k (u_i) = a_1 R_e^{k-1} (u_i) + \dots + a_k u_i \quad \text{pour tout } i$$

Les racine de l'équation :

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

sont les λ_i, ce qui prouve que les λ_i distincts sont au nombre de k au plus. D'autre part, on voit facilement par récurrence que ces racines sont :

$$\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{k-1}, \frac{1}{2}$$

ce qui prouve en même temps que les racines de l'équation au rang sont réelles dans ce cas.

On va prouver que le grade est k au plus, c'est-à-dire que la base est contenue dans :

$$\left\{ \begin{array}{l} I,\ R_e,\ R_e{}^2, \dots R_e{}^k \\ \\ R_{u_i},\ R_e R_{u_i}, \dots R_e^{k-1}\ R_{u_i} \end{array} \right.$$

(on a toujours $R_{u_i} R_e = R_{u_i}$)

Montrons tout d'abord que :

$$R_e^{k+1} = \beta_k I + \beta_{k-1} R_e + \dots + \beta_o R_e^k$$

c'est-à-dire qu'il existe β_o, ... β_k tels que

$$\begin{cases} \beta_o + \dots + \beta_k = 1 \\ R_e^{k+1} (u_i) = \beta_k u_i + \dots + \beta_o R_e^k (u_i) \ ; i = 1, \dots, n \end{cases}$$

ou encore, en remplaçant $R_e^k (u_i)$ par sa valeur et en identifiant :

$$\begin{cases} \beta_k + \beta_o a_k = a_1 a_k \\ \\ \beta_j + \beta_o a_j = a_1 a_j + a_{j+1} \\ \\ \beta_1 + \beta_o a_1 = a_1^2 + a_2 \\ \\ \beta_k + \dots + \beta_o = 1 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les k premières égalités, et en utilisant la dernière, on obtient :

$$\beta_o (\sum_1^k a_i - 1) = (1 + a_1)(\sum_1^k a_i - 1)$$

– Cas où $\sum_1^K a_i \neq 1$

$$\beta_o = 1 + a,$$

$$\beta_1 = a_2 - a_1$$

$$\beta_j = a_{j+1} - a_j$$

$$\beta_{k-1} = a_k - a_{k-1}$$

$$\beta_k = - a_k$$

Donc, si 1 n'est pas racine de l'équation dont les coefficients sont les a_i :

$$R_e^{k+1} = - a_k I + (a_k - a_{k-1}) R_e + \ldots + (a_{j+1} - a_j) R_e^{k-j} + \ldots + (1 + a_1) R_e^k$$

– Cas où $\sum_1^k a_i = 1$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que R_e^k s'exprime en fonc tion des R_e^j $j < k$; on a alors ;

$$R_e^k = a_k I + a_{k-1} R_e + \ldots + a_1 R_e^{k-1}$$

D'autre part, on voit facilement que :

$$R_e^k R_{u_i} = a_k R_{u_i} + \ldots + a_1 R_e^{k-1} R_{u_i} \; ; \; i = 1, \ldots, n$$

Le grade de T(A) est donc k au plus

On peut voir que R_x vérifie une équation de degré k + 1 :

On pose $R_x = \xi R_e + \sum_1^{\eta_i} \eta_i R_{u_i}$

On calcule R_x^p de p = 1 à p = k, et, par identification, l'on obtient :

$$R_x^{k+1} = -\xi^{k+1} a_k I + \ldots + \xi^{p+1}(a_{p+1} - a_p) R_x^{k-p} + \ldots + (1+a_1) R_x^k$$

II Algèbre dont le noyau est nilpotent d'altitude 2

Dans une telle algèbre, la base s'écrit :

(e, u_i, w_j) $i = 1, \ldots p$; $j = 1, \ldots q$; $q+p = n-1$ avec :

$e^2 = e$; $u_i u_k = (wj)$; $w_j w_k = 0$ $\qquad \forall (i, j, k)$

$eu_i = (u_i, u_{i+1}, \ldots u_p, w_1, \ldots, w_q)$ $\qquad \forall$ j

$ew_j = (w_j, w_{j+1}, \ldots, w_q)$ $\qquad \forall$ i

$u_i w_j = 0$ $\qquad \forall (i, j)$

On pose $x = \xi e + \sum_1^p \delta_i u_i + \sum_1^q \eta_k w_k$

Nous allons, comme plus haut, étudier la valeur du grade en fonction du degré $k + 1$ de l'équation au rang.

Cas $k = 2$

L'équation au rang est $x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0$

Calculons :

$$x^2 = \xi^2 e + 2\xi \sum_1^p \delta_i e u_i + 2\xi \sum_1^q \eta_k e u_k + \sum_{i,j} \delta_i \delta_j u_i u_j$$

$$x^2 = \xi x = \xi \sum_1^p \delta_i (2eu_i - u_i) + \xi \sum_1^q \eta_k) 2ew_k - w_k) + \sum_{i,j} \delta_i \xi_j u_i u_j$$

$$x(x^2 - \xi x) = \xi^2 \sum_1^p \delta_i [2(eu_i)e - eu_i] + \xi^2 \sum_1^q \eta_k [2(ew_k)e - ew_k]$$

$$+ \sum_{i,j} \xi \delta_i \delta_j e(u_i u_j) + \xi \sum_{i,j} \delta_i \delta_j [2(eu_i)u_j - u_i u_j]$$

D'où la condition $x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0$ pour tout $x \in A$ est équivalente à

$$\sum_1^p \delta_i \xi^2 [2(eu_i)e - (2+1) eu_i + \rho u_i] + \sum_1^q \eta_i \xi^2 [2(ew_i)e - (2\rho+1)ew_i + \rho w_i]$$

$$+ \sum_{i,j} \delta_i \delta_j \xi [2(eu_i)u_j + (u_i u_j)e - (\rho + 1) u_i u_j] = 0$$

Cette identité doit être vraie pour tout n_i et tout δ_j ; on voit alors qu'elle est équivalente au système :

$$\left.\begin{array}{l} 2(eu_i)u_j + (u_i u_j)e - (\rho + 1) u_i u_j = 0 \\ \\ 2(eu_i)e - (2\rho + 1)eu_i + \rho u_i = 0 \\ \\ 2(ew_i)e - (2\rho + 1)ew_i + \rho w_i = 0 \end{array}\right\} \forall\ i,j = 1, \dots n$$

Le système de 3 relations ne permet pas de conclure ; mais on voit d'autre part que, si l'on écrit :

$$u_i u_j = \Sigma \lambda_{ijk} w_k$$

$$(u_i u_j)\, e = \Sigma\, \lambda_{ijk} e w_k$$

$$[(u_i u_j)\, e\,]\, e = \Sigma\, \lambda_{ijk}\, (ew_k) e$$

Or $(ew_k)\, e = (\rho + \frac{1}{2})\, ew_k - \frac{\rho}{2} w_k$ d'où

$$[(u_i u_j) e\,]\, e - (\rho + \frac{1}{2})\ (u_i u_j)\, e + \frac{\rho}{2} u_i u_j = 0 \qquad \forall\ i,j$$

relation que l'on adjoint aux 3 précédentes ; on voit alors que les produits d'ordre 4 s'expriment en fonction des produits d'ordre inférieur ; cependant, les relations obtenues ne vérifient pas les conditions de comptabilité. Il faut donc considérer des produits d'ordre plus élevé.

Utilisant donc le systeme :

$$\left.\begin{array}{l} 2(eu_i)u_j + (u_i u_j)e - (\rho + 1)\, u_i u_j = 0 \\ 2(eu_i)e - (2\rho + 1)eu_i + \rho u_i = 0 \\ 2(ew_i)e - (2\rho + 1)\, ew_i + \rho w_i = 0 \\ [(u_i u_j)e]e - (\rho + \frac{1}{2})\ (u_i u_j)\, e + \frac{\rho}{2} u_i u_j = 0 \end{array}\right\} \forall\, (i, j)$$

Le calcul montre que la base est contenue dans :

$$\left.\begin{array}{l} I,\ R_e,\ R_{u_i}, \\ R_e R_e,\ R_e R_{u_i},\ R_{u_i} R_e,\ R_e R_{w_j},\ R_{u_i} R_{u_j} \\ R_e R_{u_i} R_e,\ R_{u_i} R_e R_{u_j} \end{array}\right. \qquad \forall\ i,j = 1, \dots n$$

Le grade est alors 3 au plus.

cas $k = 3$

L'équation au rang s'écrit :

$$x(x-\xi)(x-\rho\xi)(x-\sigma\xi) = 0$$

Comme précédemment :

$$\sum_1^p \delta_i \xi^3 \left\{ 2\,[(eu_i)\,e]e - (2\rho + 1 + 2\sigma)(eu_i)\,e + (2\rho\sigma + \sigma + \rho)eu_i - \sigma\rho u_j \right\}$$

$$+ \sum_1^q \eta_i \xi^3 \left\{ 2[(ew_i)e]\,e - (2\sigma + 2\rho + 1)(ew_i)e + (2\rho\sigma + \sigma + \rho)ew_i - \sigma\rho\, w_i \right\}$$

$$+ \sum \delta_i \delta_j \xi^2 \Big\{ 2[(eu_i)u_j]e + 2\,[(eu_i)e]u_j + [(u_i u_j)e]\,e -$$

$$-(\rho + \sigma + 1)(u_i u_j)e - (2\rho + 2\sigma + 1)(eu_i)u_j + (\rho\sigma + \sigma + \rho)\,u_i u_j \Big\} = 0$$

D'où, comme au cas précédent, 3 relations.

Mais de plus :

$u_i u_j = \Sigma\lambda_{ijk} w_k$ d'où

$$\left\{[u_i u_j)e]e\right\} e = \left\{ [(u_i u_j)e]e, (u_i u_j)e, u_i u_j \right\}$$

D'autre part :

$eu_i = \Sigma\lambda_{ik} u_k + \Sigma u_{ik} w_k$ d'où

$eu_i)u_j = \Sigma\, \lambda_{ik} u_k u_j$

$[(eu_i)u_j]\,e = \Sigma\lambda_{ik}(u_k u_j)e$

En utilisant la relation précédente :

$$[(eu_i)\ u_j]e]e = \left\{[(eu_i)u_j]e]e\ ;\ [(zu_i)u_j]e\ ;\ (eu_i)u_j\right\}$$

D'où le système de relations, pour i, j = 1,... n

$$[(ew_i)e]e = [(ew_i)e\ ;\ ew_i\ ;\ w_i]$$

$$[(eu_i)e]e = [(eu_i)e\ ;\ eu_i\ ;\ u_i]$$

$$[(u_iu_j)e]e]e = \left\{[(u_iu_j)e]e\ ;\ (u_iu_j)e\ ;\ u_iu_j\right\}$$

$$[(eu_i)u_j]e]e]e = \left\{[(eu_i)u_j]e]e\ ;\ [(eu_i)u_j]e\ ;\ (eu_i)u_j\right\}$$

$$[(eu_i)e]u_j = \left\{[(eu_i)u_j]e\ ;\ (eui)\ u_j\ ;\ [(u_iu_j)e]e\ ;\ (u_iu_j)e\ ;\ u_iu_j\right\}$$

On effectue les calculs grâce à ce système et l'on trouve le résultats suivant:

Le grade est de 5 au plus.

Cas général

De même que plus haut, l'identification donne 3 relations, d'une forme analogue.

De plus :

$$u_iu_j = \Sigma\lambda_{ik}w_k \qquad \text{d'où}$$

$$R_e^{\,k}\,(u_iu_j) = a_1Re^{k-1}\,(u_iu_j) + \ldots + a_ku_iu_j$$

$$eu_i = \Sigma\lambda_{ik}u_k + \Sigma u_{ik}w_k \quad \text{d'où}$$

$$R_e^{\,k}\,[(eu_i)u_j] = a_1R_e^{\,k-1}\,[(eu_i)\,u_j] + \ldots + a_k\,(eu_i)u_j$$

$$[(eu_i)e]\,u_j = \Sigma\lambda_{ik}(eu_k)u_j$$

D'où l'expression de : $R_e^{k} [(eu_i)e)u_j]$

et ainsi de suite jusqu'à $R_e^{k} [R_{uj}R_e^{k-2} (u_i)]$ qui s'exprime de même.

D'où le système :

$$R_e^{k}(u_i) = a_1 R_e^{k-1} (u_i) + \dots + a_k u_i$$

$$R_e^{k}(w_i) = a_1 R_e^{k-1} (w_i) + \dots + a_k w_i$$

$$R_e^{k}(u_i u_j) = a_1 R_e^{k-1} (u_i u_j) + \dots + a_k u_i u_j$$

$$R_e^{k}[(eu_i)\, u_j] = a_1 R_e^{k-1} [(eu_i)u_j] + \dots + a_k (eu_i)u_j$$

$$R_e^{k}[R_{u_j} R_e^{p} (u_i)] = a_1 R_e^{k-1} R_{u_j} R_e^{p} (u_i) + \dots + a_k R_{u_j} R_e^{p} (u_i)$$

$$R_e^{k}[R_{u_j} R_e^{k-2} (u_i)] = a_1 R_e^{k-1} R_{u_j} R_e^{k-2} (u_i) + \dots + a_k R_{u_j} R_e^{k-2} (u_i)$$

ainsi qu'une relation exprimant $R_{u_j} R_e^{k-1} (u_i)$ $(i,j = 1, \dots n)$

Considérons les produits d'ordre 2k. Ce sont :

$R_e^{2k-1} (u_i)$; $R_e^{2k-1} (w_i)$; $R_e^{2k-2} (u_i u_j)$; $R_e^{2k-3} R_{u_j} R_e (u_i)$; ... ;

... ; $R_e^{2k-2-p} R_{u_j} R_e^{p} (u_i)$; ... ; $R_e^{k-1} R_{u_j} R_e^{k-1} (u_i)$

tous donnés par le tableau de relations, et

$R_e^{k-2} R_{u_j} R_e^{k} (u_i)$; ... ; $R_e^{p} R_{u_j} R_e^{2k-2-p} (u_i)$; ... ; $R_{u_j} R_e^{2k-2} (u_i)$;

où $R_e^{k}(u_i)$ peut être remplacé par sa valeur.

Tous les produits d'ordre 2k s'expriment en fonction des produits d'ordre inférieur, cependant la condition de compatibilité n'est pas remplie.

Le calcul montre qu'en fait **le grade est de 2k-1 au plus.**

III Relations entre les λ_i et les racines de l'équation au rang

═══ Comme nous l'avons vu plus haut, si A est une algèbre quelconque, l'ensemble des racines de l'équation est contenu dans l'ensemble des valeurs propres de R_x (valeur 0 exceptée éventuellement).

═══ Dans une **algèbre pondérée**, la valeur $w(x) = \xi$ est toujours racine de l'équation au rang, et s'il existe plusieurs fonctions poids différentes - c'est-à-dire s'il existe plusieurs idéaux de dimension n-1, comme vu plus haut - ces fonctions représentent autant de racines de l'équation au rang, et sont donc toujours des valeurs propres de R_x.

═══ Plaçons-nous maintenant dans le cas d'une special train algebra dont le noyau est nilpotent d'altitude 1.

Comme nous venons de la voir, si l'équation au rang est de degré k+1, soit:

$$x(x-\xi)(x-\rho_1\xi)\dots(x-\rho_{k-1}\xi') = 0 \qquad \rho_i\,(R$$

alors, de **manière équivalente** :

$$R_e^k(u_i) = a_1 R_e^{k-1}(u_i) + \dots + a_k u_i$$

En tenant compte du fait que :

$$eu_i = \lambda_i u_i + \sum_{k=i+1}^{n-1} \beta_{ik} u_k$$

et par identification, on obtient le résultat suivant : les (n-1) valeurs λ_i (i = 1, ... n-1) vérifient l'équation :

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

Explicitons l'expression des a_i :

pour k = 1 :

$$R_e(u_i) - \frac{1}{2}u_i = 0$$

pour k = 2 :

$$R_e^{2}(u_i) - (\rho + \tfrac{1}{2})\, R_e(u_i) \; + \frac{\rho}{2} u_i = 0$$

pour k = 3 :

$$R_e^{3}(u_i) - (\rho_1 + \rho_2 + \tfrac{1}{2})\, R_e^{2}(u_i) \; + (\frac{\rho 1}{2} \; + \frac{\rho 2}{2} + \; \rho_1 \rho_2)\, R_e(u_i) \; - \frac{\rho 1 \rho 2}{2} u_i \; 0$$

Raisonnons par récurrence et supposons que pour la valeur k, nous ayions

$$R_e^{k}(u_i) - (\sum_{1}^{k-1} \rho_i + \frac{1}{2}) R_e^{k-1}(u_i) + \dots + (-1)^k \; \frac{\prod_{1}^{k-1} \rho_i}{2} \; u_i = 0$$

On voit facilement qu'alors, pour la valeur k+ 1

$$R_e^{k+1}(u_i) - (\sum_{1}^{k} \rho_i + \frac{1}{2})\, R_e^{k}(u_i) + \dots + \; (-1)^{k+1} \, \frac{1}{2} \, \prod_{1}^{k} \rho_i u_i = 0$$

Il en résulte que l'ensemble des racines de l'équation vérifiée par tous les λ_i :

$$x^k = a_1 x^{k+1} \; + \dots + a_k$$

se trouve être :

$\frac{1}{2}, \rho_1, \dots, \rho_{k-1}$

En rajoutant la valeur $\lambda_o = 1$ correspondant à la racine ξ, les n valeurs propres de la matrice R_x peuvent prendre uniquement les valeurs numériques :

$\xi, \frac{\xi}{2}, \; \rho_1 \xi, \dots, \rho_{k-1} \xi$

Soit k+ 1valeurs numériques au plus.

L'ensemble des nombres $\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}$ peut donc prendre au plus k valeurs distinctes.

Si donc, dans une telle algèbre, nous constatons que les nombres $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ sont tous distincts, nous en déduirons que l'équation au rang est de degré n+1, c'est-à-dire que cette équation est :

$$\lambda\left(|\lambda I - R_x|\right) = 0$$

où l'on remplace, tous calculs effectués,λ par x.

Si il y a exactement k nombre λ_i distincts, alors le degré de l'équation au rang est $\geqslant k+1$.

La réciproque n'est pas vraie . il se peut que l'algèbre A considérée possède un faible nombre de λ_i distincts, mais que le degré de l'équation au rang soit beaucoup plus élevé.

Exemples .

— Soit une algèbre A sur R engendrée par (e, u_1, u_2) avec :

$$eu_1 = \rho u_1 + \sigma u_2 \ ; \ eu_2 = \rho u_2 \ ; \ e^2 = e \ ; \ u_1u_2 = u_1^{\ 2} = u_2^{\ 2} = 0$$

C'est bien une special train algebra, son noyau est nilpotent d'altitude 1 elle possède un idempotent ; puisqu'elle est de dimension 3, son équation au rang est de degré $\leqslant 4$.

Les valeurs λ_1 et λ_2 sont égales au nombre ρ.

L'élément $x \in A$ vérifie :

$$x(x-\xi)(x-\rho\xi)(x-\rho\xi) = 0.$$

x vérifie-t-il une équation de degré inférieur ?

C'est-à-dire a-t-on :

$$(eu_i)\, e - (\rho + \frac{1}{2})\, eu_i + \frac{\rho}{2} u_i = 0 \text{ pour } i = 1, 2$$

pour u_2 c'est vérifié.

Pour u_1, cette égalité n'est vraie que si :

$$\sigma(\rho - \frac{1}{2}) = 0$$

Pour que le degré de l'équation au rang s'abaisse, il faut soit

$\sigma = 0$ si $\rho \neq \frac{1}{2}$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Sinon son degré est de 4.

– Soit une algèbre A sur R engendrée par :

$(e, u_1\ u_2, u_3)$ avec

$e^2 = e\ ;\ u_i u_j = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3\ ;$

$$eu_1 = \rho u_1 + \sigma' u_2 + \tau u_3\ ;\ eu_2 = \rho u_2 + \sigma u_3\ ;\ eu_3 = \rho u_3$$

Nous avons bien une special train algebra, le noyau est nilpotent d'altitude 1, il y a un idempotent ; son équation au rang est de degré $\leqslant 5$.

L'équation $x(x - \xi)(x - \rho\xi)(x - \rho\xi)(x - \rho\xi) = 0$ est toujours vérifiée. Ici les 3 nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tous égaux à ρ. Pour que l'équation au rang soit de degré 3:

$x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0$ il faut et il suffit que :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(\rho - \tfrac{1}{2}) = 0 \\ &\sigma'(\rho - \tfrac{1}{2}) = 0 \\ &\tau(\rho - \tfrac{1}{2}) + \sigma\sigma' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{donc si } \rho \neq \tfrac{1}{2} \quad \sigma = \sigma' = \tau = 0 \\ &\text{si } \rho = \tfrac{1}{2}, \text{ soit } \sigma, \text{ soit } \sigma' = 0 \end{aligned}$$

Pour que l'équation au rang soit de degré 4

$x(x-\xi)(x-\rho\xi)(x-\rho\xi)=0$ il faut et il suffit que :

$\sigma\sigma'(2\rho-1) = 0$

Donc si $\rho \neq \frac{1}{2}$

pour que l'équation au rang soit de degré 3, il faut et il suffit que

$\tau = \sigma = \sigma' = 0$

pour que l'équation au rang soit de degré 4 il faut et il suffit que

$\tau\rho - \sigma\sigma'(2\rho-1) = 0$

Sinon le degré est 5, malgré la racine triple en λ.

Si $\rho = \frac{1}{2}$

pour obtenir le degré 3 $\Longleftrightarrow \sigma\sigma' = 0$

pour obtenir le degré 4 $\Longleftrightarrow \tau = 0$

Sinon le degré est 5.

Remarque

Nous avons vu que, lorsque le degré de l'équation au rang est k+1, R_x vérifie l'équation

$$R_x^{k+1} = +\xi(1+a_1)R_x^{k}+\ldots+ -\xi^{k+1}a_k I$$

dont les racines sont $\xi, \frac{\xi}{2}, \rho_1\xi, \ldots \rho_{k-1}\xi$

Si $k = n-1$, R_x vérifie cette équation, de degré n, et son équation caractéristique, qui est également de degré n, et les racines de cette équation caractéristique sont :

$\xi, \lambda_1\xi, \ldots \lambda_{n-1}\xi$

Si le degré de l'équation au rang est bien n,et non inférieur à n, il faut alors que ces deux équations vérifiées par R_x soient identiques, c'est-à-dire que

$$[\xi, \frac{1}{2}\xi, \rho_1\xi, ..., \rho_{n-2}\xi] = [\xi, \lambda_1\xi, ... \lambda_{n-1}\xi]$$

Autre exemple, plus général

Soit 1 une special train algebra, de dimension n, dont le noyau est nilpotent d'altitude 1.

Supposons que les valeurs propres de R_x soient toutes égales à $\rho\xi$ (sauf celle qui est ξ).

A quelle condition le degré de l'équation au rang est-il 3, c'est-à-dire, à quelle condition a-t-on :

$x(x - \xi)(x - \rho\xi) = 0$ pour tout x de A.

Nous savons que cette condition est équivalente à :

$R_e^2(u_i) - (\rho + \frac{1}{2}) eu_i + \frac{\rho}{2} u_i = 0$ pour tout $i = 1, ... n$

Alors $eu_i = \rho u_i + \sum_{i+1}^{n-1} \beta_{ik} u_k$

Pour $eu_{n-1} = \rho u_{n-1}$, la relation est vérifiée :

$eu_{n-2} = \rho u_{n-2} + \beta_{n-2, n-1} u_{n-1}$

En identifiant on obtient la condition :

$\beta_{n-2, n-1}(\rho - \frac{1}{2}) = 0$

Supposons donc $\rho \neq \frac{1}{2}$ et continuons le calcul.

Alors $\beta_{n-2\, n-1} = 0$

$$eu_{n-3} = \rho u_{n-3} + \beta_{n-3,n-2} u_{n-2} + \beta_{n-3,\, n-1} u_{n-1}$$

En identifiant

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{n-3,\, n-2}(\rho - \frac{1}{2}) = 0 \\ \beta_{n-3,n-1}(\rho - \frac{1}{2}) = 0 \end{array}\right\}$$

Donc, si

$$\rho \neq \frac{1}{2}, \quad \beta_{n-3,\, n-2} = \beta_{n-3,\, n-1} = 0$$

on voit facilement, en continuant le calcul, que si

$$\rho \neq \frac{1}{2}, \quad eu_i = \rho\, u_i \text{ pour tout i.}$$

Donc, si la valeur commune des valeurs propres de R_e n'est pas $\frac{1}{2}$, le degré de l'équation au rang est 3 si et seulement si

$$eu_i = \rho u_i \qquad \forall\ i = 1, \dots n$$

Si maintenant $\rho = \frac{1}{2}$:

Alors $\quad eu_{n-1} = \frac{1}{2} u_{n-1}$

$$eu_{n-2} = \frac{1}{2} u_{n-2} + \sigma_{21} u_{n-1}$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$eu_{n-i} = \frac{1}{2} u_{n-i} + \sigma_{i1} u_{n-(i-1)} + \dots + \sigma_{i,(i-1)} u_{n-1}$$

$$- -$$

$$eu_1 = \frac{1}{2} u_1 + \sigma_{n-1,1} u_2 + \dots + \sigma_{n-1,n-2} u_{n-1}$$

Il faut et il suffit que l'identité :

$$(eu_i)e - eu_i - \frac{1}{4} u_i = 0$$

soit vérifiée pour tout i.

Pour u_{n-1} il n'y a pas de condition :

Pour u_{n-2} non plus.

Pour u_{n-3} : $\sigma_{21}\ \sigma_{31} = 0$

Pour u_{n-4} : deux conditions $\begin{cases} \sigma_{41}\sigma_{31} = 0 \\ \sigma_{41}\sigma_{32} + \sigma_{42}\ \sigma_{31} = 0 \end{cases}$

Pour u_{n-i} : $\begin{cases} \sigma_{i1}\,\sigma_{i-1,1} = 0 \\ \sigma_{i-1,2}\,\sigma_{i,1} + \sigma_{i2}\ \sigma_{i-2,1} = 0 \\ \text{-----------------} \\ \sigma_{i,1}\,\sigma_{i-1,i-2} + \sigma_{i2}\,\sigma_{i-2,i-3} + \dots + \sigma_{i,i-2}\ \sigma_{21} = 0 \end{cases}$

Pour u_1 (n-3) conditions qui s'écrivent de même.

D'où un ensemble de $\frac{(n-3)(n-2)}{2}$ relations qui doivent être satisfaites. Leur forme montre qu'elles sont toujours compatibles.

Cas d'une special train algebra dont le noyau est nilpotent d'altitude 2.

Dans le cas précédent, nous avions l'équivalence entre deux propositions :

- le degré de l'équation au rang est k+1
- la relation : $R_e^{\,k}(u_i) = a_1 R_e^{\,k-1}(u_i) + \dots + a_k u_i$ est vérifiée pour tout i.

Ici nous avons l'équivalence entre deux propositions :

– le degré de l'équation au rang est k+1.
– le système :

$$\begin{cases} R_e{}^k(u_i) = a_1 R_e{}^{k-1}(u_i) + \ldots + a_k u_i \\ \\ R_e{}^k(w_i) = a_1 R_e{}^{k-1}(w_i) + \ldots + a_k w_i \\ \\ R_{u_j} R_e{}^{k-1}(u_i) = \left\{ R_e{}^{k-1}(u_i u_j), R_e{}^{k-1}[(eu_i)U_j], \ldots, u_i u_j \right\} \end{cases}$$

est vérifié pour tous les u_j, u_i, w_i.

Les valeurs propres de R_e vérifient encore :

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$$

et l'ensemble des racines de cette équation est :

$$\frac{1}{2}, \rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$$

Les valeurs propres de la matrice R_x peuvent donc prendre uniquement les valeurs numérique :

$$\xi, \frac{\xi}{2}, \rho_1 \xi, \ldots, \rho_{k-1}\xi$$

Si donc il y a exactement k λ_i distincts, alors le degré de l'équation au rang est $\geqslant k + 1$.

Cependant, pour que le degré de l'équation au rang s'abaisse effectivement, le nombre de conditions à satisfaire est plus important que dans le cas précédent, à cause de la relation supplémentaire imposée.

Exemples :

– soit une algèbre A sur R engendrée par :

(e, u_1, u_2, w) avec

$eu_1 = \rho u_1 + \sigma' u_2 + \tau w \;;\; e^2 = e \;;$

$eu_2 = \rho u_2 + \sigma w$

$u_1 u_2 = \theta w$

$u_1^2 = \theta_1 w$

$u_2^2 = \theta_2 w$

$ew = \rho w$

$u_i w = w^2 = 0 \qquad i = 1, 2$

C'est une spciela train algebra dont le noyau est nilpotent d'altitude 2, elle possède un idempotent ; puisqu'elle est de dimension 4, son équation au rang est de degré $\leqslant 5$. Les valeurs propres de R_x sont ξ et $\rho\xi$; $x \in A$ vérifie ;

$$x(x - \xi)(x - \rho\xi)(x - \rho\xi)(x - \rho\xi) = 0$$

A quelles conditions le degré est-il 3 ?

Il faut et il suffit que ,

$$\begin{cases} (eu_i)e - (\rho + \frac{1}{2})\, eu_i + \frac{\rho}{2} u_i = 0 & i = 1, 2 \\ (ew)e - (\rho + \frac{1}{2})\, ew + \frac{\rho}{2} w = 0 & \\ 2\,(eu_i)u_j + (u_i u_j)e - (\rho + 1)\, u_i u_j = 0 & i, j = 1,2 \end{cases}$$

En explicitant, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(\rho - \frac{1}{2}) = 0 \\ \sigma'(\rho - \frac{1}{2}) = 0 \\ \tau(\rho - \frac{1}{2}) + \sigma\sigma' = 0 \end{array}\right\}$$

si donc $\rho \neq \frac{1}{2}$

$\sigma = \sigma' = \tau = \theta_1 = \theta_2 = \theta = 0$

nous sommes ramenés à une special train algebra dont le noyau est nilpotent d'altitude 1.

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 (\rho - \frac{1}{2}) - \sigma' \theta = 0 \\ \\ \theta_2 (\rho - \frac{1}{2}) = 0 \\ \\ \theta(\rho - \frac{1}{2}) = \sigma \theta_2 = 0 \\ \\ \theta (\rho - \frac{1}{2}) = 0 \end{array}\right\}$$

si $\rho = \frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\sigma\sigma' = o$ $\qquad\qquad$ $\sigma' \theta = \sigma' \theta_2 = 0$

soit $\sigma = 0$ $\qquad$ alors $\theta = \theta_2 = 0$ $\qquad$ σ', τ, θ_1 quelconques

soit $\sigma' = 0$ $\qquad$ alors $\theta_2, \theta_1, \theta, \sigma, \tau$ $\qquad$ quelconques.

C'est-à-dire, unes special train algebra de dimension 4, possédant un idempotent, et dont le noyau est effectivement nilpotent d'altitude 2, a une équation au rang de degré 3 si et seulement si :

— ou bien :

$e^2 = e$; $u_i w = w^2 = 0$

$eu_1 = \frac{1}{2} u_1 + \sigma' u_2 + \tau w$

$eu_2 = \frac{1}{2} u_2$

$ew = \frac{1}{2} w$

$u_1{}^2 = \theta_1 w$; $u_2{}^2 = u_1 u_2 = 0$

– ou bien :

$e^2 = e\,;\ u_1 w = w^2 = 0$

$eu_1 = \frac{1}{2} u_1 + \tau w$

$eu_2 = \frac{1}{2} + \sigma u$

$ew = \frac{1}{2} w$

$u_1 u_2 = \theta w\ ;\quad u_1{}^2 = \theta_1 w\quad ;\quad u_2{}^2 = \theta_2 w$

A quelles conditions le degré est-il 4 ?

Il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} [(eu_i)e]\,e - (2\rho + \frac{1}{2})\,(eu_i)\,e + (\rho^2 + \rho)eu_i - \frac{\rho^2}{2} u_i = 0 \\ [(ew)e]e - (2\rho + \frac{1}{2})\,(ew)e + (\rho^2 + \rho)\,ew - \frac{\rho^2}{2} w = 0 \\ [(eu_i)u_j]e + [(eu_i)e]u_j + [(u_i u_j)e]e - (\rho + \frac{1}{2})\,(u_i u_j)\,e - (2\rho + \frac{1}{2})\,(eu_i)u_j + \\ \qquad + (\frac{\rho^2}{2} + \rho)\,u_i u_j = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$(\rho - \frac{1}{2})\ \sigma\sigma' = 0$

$(\rho - \frac{1}{2})\ \sigma'\theta_2 + \frac{\rho^2}{2}\theta = 0$

$(\rho - \frac{1}{2})\ \sigma'\theta\,\frac{\rho^2}{2}\ \theta_1 = 0$

$p^2\theta\ = 0$

$\rho^2\theta_2 = 0$

Ces exemples montrent certaines conditions sur la table de multiplication, nécessaires et suffisantes pour que le degré de l'équation au rang s'abaisse en cas de racine propre multiple.

Interprétation génétique

Soit un élément $a \in A$; nous avons vu qu'un tel élément peut s'interpréter comme une population si son poids est 1 ; si son poids n'est pas 1, nous dirons que c'est une «population généralisée» ; faire subir la transformation T à l'élément a, c'est lui faire subir un certain nombre de croisements successifs ; lorsque T décrit T(A), l'ensemble T(a) $T \in T(A)$ représente l'ensemble de toutes les «populations» qu'il est possible d'obtenir à partir de a.

Dire que T(A) est de grade q, c'est dire que :

$$t(a) = \sum_{1}^{p} \alpha_i \theta_i(\alpha) \qquad \text{où} \quad p_i = R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_q}}$$

Il suffit donc de connaître les $\theta_i(a)$, c'est-à-dire d'effectuer q+1 croisements au plus pour chaque θ_i, et l'on sait que, quel que soit $t \in T(A)$, t(a) est combinaison linéaire des $\theta_i(a)$, qui sont au nombre de p.

Dans les cas que nous avons considérés au cours de ce chapitre, nous avons vu tout d'abord (lorsque le noyau est nilpotent d'altitude 1) que lorsque le degré de l'équation au rang est k+1 - c'est-à-dire lorsqu'un élément croisé k+1 fois avec lui-même s'exprime en fonction des résultats de p croisements successifs (x^p, $p < k+1$) - le grade est k au plus, c'est-à-dire que tout t(a) s'exprime en fonction de populations obtenues par k+1 croisements au plus.

Mêmes résultats lorsque le noyau est nilpotent d'altitude 2.

Application aux algèbres gamétiques de la notion de T(A)-isotopie

Considérons l'algèbre gamétique de l'hérédité mendélienne simple, et l'algèbre gamétique avec mutations.

Ces deux algèbres, bâties sur le même anneau, ont respectivement pour tables :

$$D^2 = D \,;\, DR = RD = \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} R \,;\, R^2 = R \,;\, \text{et}$$

$$DoD = (1 - r) D + rR \,;\, RoR = sD + (1 - s) R$$

$$DoR = RoD = \frac{1}{2}(1 - r + s) D + \frac{1}{2}(1 + r - s) R$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Soit A l'algèbre gamétique de l'hérédité mendélienne simple :

soit A_o l'algèbre gamétique avec mutations.

– **Lorsque $r + s \neq 1$, A_o est T(A) isotope de A.**

– **Lorsque $(r + s)^2 \neq 1$, A et A_o sont T-isotopes, et l'algèbre A étant de grade 1, l'algèbre A_o est de grade 1.**

– **Lorsque $r + s = -1$, $T(A_o) \subset T(A)$ et A_o est une algèbre associative à un élément unité.**

– **Lorsque $r + s = 1$, A_o n'est pas T(A)-isotope de A ; A_o est alors associative à élément unité.**

En effet, l'on voit facilement que pour tout x de A

$R^o{}_x = R_{t(x)}t$ avec

$t = (1 - 2r - 2s)I + 2sR_D + 2rR_R$

On vérifie bien qu'en appliquant cette formule :

$DoD = (1 - r)D + rR$; $RoR = sD + (1 - s) R$

$DoR = RoD = \frac{1}{2}(1 + s - r) D + \frac{1}{2}(1 - s + r)R$

$t = \begin{pmatrix} 1 - r & s \\ r & 1 - s \end{pmatrix}$ par rapport à la base (D, R)

$|t| = 1 - r - s$

1) Soit donc $r + s \neq 1$

t est inversible et A_o est T(A) isotope de A ;

$$t^{-1} = \frac{1+r+s}{1-r-s} I - \frac{2s}{1-r-s} R_D - \frac{2r}{1-r-s} R_R$$

T^{-1} n'appartient à R(A) que pour $r + s \neq -1$.

Donc si $(r + s) \neq -1$, $T(A) = T(A_o)$, A et A_o sont T-isotopes, et A_o est de grade 1.

2) Si $(r + s) = -1$

$DoD = (1 - r) D + rR$; $RoR = -(1 + r)D + (2 + r)R$;

$DoR = - rD + (1 + r)R$

$t = 3I - 2 (1 + r) R_D + 2_r R_R$; $t^{-1} = (r + 1) R_D - rR_R$

Appliquant la théorie de la partie I :

l'élément $e = (r + 1) D - rR$ est élément unité de A_o ; de plus $(DoD)oR = Do(DoR)$ et $(RoR)oD = Ro(RoD)$ et A_o est une algèbre associative à élément unité.

3) Si $r + s = 1$

$D^2 = (1 - r) D + rR = R^2 = DR$

A_o est associative et a pour élément unité :

$o = (1 - r) D + rR$.

Chapitre V

Résumé

On étudie la nature et les propriétés de l'ensemble ordonné A* associé à une special train algebra, et on donne une interprétation génétique des propriétés ainsi déterminées : en effet, A* peut être considérée comme un abre généalogique, et, suivant les cas, tous les éléments ont ou non un ancêtre commun, et deux éléments quelconques ont ou non un plus proche descendant commun ou un plus proche ancêtre commun.

PARTIE III

CHAPITRE I

RESUME

Une algèbre A est pondérée lorsqu'elle possède une fonction poids, c'est-à-dire un homomorphisme d'algèbre non singulier, appliquant A sur son corps de base F ; lorsque A est de dimension finie, soit n, A est pondérée si et seulement si elle possède un idéal N de dimension n – i, l'idéal A^2 n'étant pas contenu dans N.

Une algèbre A commutative et de dimension n est de grade I si, étant donné une base de A, soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, l'algèbre des transformations de A, notée T(A), possède une base de la forme $(I, R_{e_1}, ..., R_{e_{m}})$, où I est l'application identique de A dans A, R_{ei} la multiplication à droite (et à gauche) par l'élément e_i et m le rang du système $(R_{e_1}, ..., R_{e_n})$.

Toute algèbre A associative est évidemment un cas particulier d'algèbre de grade I ; les algèbres A telles que R(A), espace vectoriel des multiplications, soit une algèbre, en sont également des cas particuliers ; nous excluons ces deux cas.

Soit donc une algèbre A pondérée, commutative, de dimension finie n et de grade I ; le corps F est de caractéristique nulle.

Soit $(e, u_1, u_2, ..., u_{n-1})$ une base de A telle que e soit de poids I et $(u_1, ..., u_{n-1})$ une base de N.

Il existe des éléments de F :

$\lambda,\ \mu, \nu_i, \lambda_{ik}, \lambda'_{ik}, \lambda_{ijk}$; $\quad$ i, j, k = 1, 2, ..., n – 1

tels que

$$\left.\begin{array}{ll} R_eR_e & = \lambda I + \mu R_e + \sum_i \nu_i R_{ui} \\ R_eR_{ui} & = \sum_k \lambda_{ik} R_{u}k \\ R_{ui}R_e & = \sum_k \lambda'_{ik} R_{uk} \\ R_{u_i}R_{u_j} & = \sum_k \lambda_{ijk} R_{uk} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{pour tout } i, j = I, ..., n-1, \\ \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \neq 0 \text{ [R(A) n'est pas une algèbre]} \end{array}$$

Les résultats que nous allons démontrer vont dépendre du rang du système $S = (eu_i)_i = 1, ..., n-1$.

1. **Le rang du système est n–1.**

On démontre alors que : pour tout i, j, $R_eR_{ui} = R_{eui}$ et $R_{uiuj} = R_{uiuj}$. N est une sous-algèbre associative ; si N est nilpotente, N est le radical de A ; sinon, N possède un idempotent u.

Appliquons ces résultats à deux cas particuliers.

1) l'élément e est idempotent.

La tranformation R_e n'admet alors que deux valeurs propres possibles, qui sont I et ($\neq \lambda$) ; lorsque ces deux valeurs sont distinctes, les sous-espaces $N_1 = (n_1 \in N ; en_1 = n_1)$ et $N_2 = (n_2 \in N ; en_2 = -\lambda n_2)$ sont supplémentaires da

dans N, et $N_1 N_2 = 0$.

2) l'équation au rang de A est de degré 3

Elle s'écrit :

$$x^3 + (\alpha\xi + \Sigma\, \alpha_i\eta_i\,)x^2 - \xi[(\alpha+1)\xi + \Sigma\, \alpha_i\eta_i\,]\,x = 0,$$

où $x \in A$; $x = \xi e + \sum_i n_i u_i$; $x \in F$; $x_i \in F$; $i = 1,..., n-I$.

a, N est nilpotente :

Voici la liste des cas possibles .

– $R_{u_i} R_{u_j} = 0$ pour tout (i, j) ; $e^2 = e$; $R_e R_e = -(1/2) I + (3/2) R_e$; si $\alpha \neq 2$, $eu_i = (1/2) u_i$ pour tout i ; si $\alpha = -2$, ind,termination ;

– $R_{u_i} R_{u_j} = 0$ pour tout (i, j) ; $\alpha_i = 0$ pour tout i; $eu_i = u_i$ pour tout i ;

$\alpha = -2$; $\lambda = -1/2$;

– $R_{u_i} R_{u_j} = 0$ pour tout (i, j) ; $\alpha_i = 0$ pour tout i ; $eu_i = \lambda_{u_i}$ pour tout i ;

si $e^2 = e$, $\lambda = -1/2$ ou $\lambda = \alpha + I$; si $e^2 \neq e$, $\lambda = \alpha + 1$;

si $\lambda = -1/2$, $\alpha = -2$, indétermination.

– Pour tout n tel que $\sum_i \alpha_i \eta_i \neq 0$, $n^2 = 0$, $\alpha = -3/2$; $\lambda = -1/2$;

$\mu = 3/2$; $eu_i = (1/2) u_i$ pour tout i ; $e^2 = e$.

b. N n'est pas nilpotente : soit

$N = (n' \in N ; \sum_1 \alpha_i n_i = 0)$

– Si $e^2 \neq e$: u est unique et colinéaire à $e^2 - e$; $eu = -(\alpha + I)u$; $en' = (1/2)$ n' pour tout $n' \in N'$; $N'^2 = (0)$; u N' = (0).

– Si $e^2 = e$, $eu = u$; $\alpha = -2$; $en' = (1/2) n'$; $N'^2 = (0)$; u N' = (0).

2 Le rang du systeme S est n – p – I (p > 0).

Nous pouvons prendre pour base de A : $(e, u_1, ..., u_{n-p}, ..., u_{n-1})$ telle que $eu_1, ..., eu_{n-p-1}$ soient indépendants et $eu_{n-1} = ... = eu_{n-p} = 0$; on démontre alors qu'ici aussi :

$R_e R_{u_i} = R_{eu_i}$ et $R_{u_i} R_{u_j} = R_{u_i u_j}$ pour tout i, j , de plus, pour tout i et pour tout j = 1, ..., p, $u_i u_{n-j} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{i,n-j,k} u_{n-k}$, les coefficients γ étant non tous nuls.

Application au cas où A possède une équation au rang de degré 3.

On démontre que N ne peut être nilpotente et par conséquent il existe toujours un idempotent non nul dans N.

a. S'il existe un α_{n-j} (j = 1, ..., p) non nul :

Soit $\mathcal{U}$ la sous-algèbre engendrée par $(u_{n-p}, \dots, u_{n-1})$ alors $u \in \mathcal{U}$; $N^2 \subset \mathcal{U}$; $\alpha = I$; eu = 0 ; $e^3 = e^2$; $N'^2 = (0)$; u N' = $\{0\}$; en' = (1/2) n' ; u est colinaire à $e^2 - e$ si $e^2 \neq e$.

b. Si tous les α_{n-j}(j = 1, ..., ρ) sont nuls :

$(3u_iu_k + \alpha_i u_k + \alpha_k u_i) = (0)$ pour tout (i, k) ; $\alpha \neq -1$; $e^2 \neq e$; eu = $-(\alpha + I)$u ; $e^2 - e$ est colinéaire à u ; en' = (1/2)n' ; $N'^2 = (0)$; u N' = (0).

Chapitre II

Résumé

Ce chapitre généralise, d'une part, la notion d'algèbre pondérée et les algèbres associées ; il démontre d'autre part le résultat suivant : Soit A une algèbre 2 pondérée de grade 1, telle que R(A) ne soit pas une algèbre ; pour toute base $(e_1, e_2, u_1, - u_{n-2})$ de A (e_1 et $e_2 \in N$) : $R_{e_1} R_{u_i} = R_{e_1 u_i}$; $R_{e_2} R_{u_i} = R_{e_2 u_i}$; $R_{u_i} R_{u_j} = R_{u_i u_j}$ pour tout i, j = 1, ..., n-2.

4, Parc de Lyons
76130 – MONT SAINT AIGNAN

TABLE DES MATIERES