De l'œuvre de Maurice FRECHET

A. Ropars

De l'OEUVRE de Maurice FRECHET

A. ROPARS

Maurice Fréchet peut être considéré comme l'un des fondateurs des Mathématiques modernes. Hadamard et Borel furent ses professeurs. En lui enseignant le calcul des Variations Hadamard lui fit découvrir l'Analyse fonctionnelle. Dans son cours sur la théorie des Fonctions de variables réelles, Borel avait souligné l'importance de la théorie des Ensembles. Par leur enseignement et leur soutien ils eurent une influence déterminante sur l'orientation et la réalisation de ses travaux.

Le début de sa carrière scientifique fut surtout consacré à des recherches théoriques. Reprenant les résultats de Volterra et d'une façon plus générale ceux déjà acquis de l'Analyse fonctionnelle il s'attache à élargir leur domaine d'application : c'est-à-dire à ne plus considérer uniquement des fonctions numériques dont la variable est une fonction ordinaire mais des fonctions quelconques (abstraites) définies sur des ensembles de points qu'il appelle «Espaces Abstraits» La théorie des ensembles lui fournit les techniques indispensables à cette tâche. En 1906 il expose ses premiers travaux dans une thèse : «Sur quelques points du calcul fonctionnel». Cette thèse n'est que la première étape d'études consacrées à étendre aux Espaces Abstraits les notions de théorie des fonctions et de calcul différentiel et intégral.

Au sujet du terme «abstrait» une précision s'impose. M. Fréchet ne s'est jamais livré à des généralisations ou à des abstractions académiques mais gratuites. Pour chacune d'elles, il est parti d'un problème mathématique précis et a toujours eu pour but de rester applicable, tant en Mathématiques que dans les Sciences expérimentales et techniques.

En cherchant à étendre aux fonctionnelles de Volterra les propriétés des fonctions continues il s'aperçoit que la connaissance de la nature de la variable importe peu, qu'il suffit d'imposer des conditions simples et générales à la définition de la convergence sur l'espace de la variable. En 1906, M. Fréchet envisage des espaces sur lesquels la convergence est compatible avec une distance : les Espaces Métriques. Ces espaces permettent de généraliser les suites de Cauchy et ont été l'objet de nombreuses études en topologie (Haussdorff, Banach). Etudes qui ont abouti à des théorèmes généraux fort utiles pour l'Analyse fonctionnelle mais aussi pour l'Arithmétique et la Géométrie algébrique. Le premier, aussi, pour les espaces métriques, il introduit la notion d'espace précompact. Pour les espaces non métrisables son idée première est d'associer à chaque point une famille dénombrable de voisinages.

Précurseur, il l'est encore pour la compacité. Mais dans un sens légèrement différent de celui utilisé actuellement : les points d'accumulation d'un sous-espace compact peuvent ne pas appartenir à l'espace. Considérant les champs fonctionnels les plus usuels (fonctions continues, mesurables, de carré sommable, holomorphes, des séries absolument convergentes ...) il vérifie si, pour un type de convergence donné, ces espaces sont métrisables, complets, séparables, compacts.

6.

En 1907-1908, satisfaisant au désir de Hadamard d'établir une base géométrique pour la théorie des fonctionnelles il introduit (en même temps que Schmidt) le langage de la géométrie euclidienne dans l'espace de Hilbert : norme, inégalité triangulaire. Il démontre qu'il est séparable et complet. A la même époque et parallèlement à Riesz il remarque que l'espace des fonctions de carré sommable peut être muni d'une structure géométrique identique à celle de l'espace de Hilbert et que ce dernier est isomorphe à son dual.

Afin de comparer entre eux les différents champs fonctionnels usuels il formule une définition de la dimension qui ne tient pas compte du nombre de coordonnées. Ce qui lui permet, par exemple, de différencier au vu de la dimension, et bien que cette dernière soit infinie, les espaces métriques séparables des espaces métriques non séparables.

Partant de la raison d'être de la différentielle d'une fonction il définit la différentielle d'une fonctionnelle, puis d'une fonction abstraite (1925), ce qui l'oblige à déterminer les types de structure d'espaces abstraits permettant cette généralisation. En 1913 Radom avait publié son célèbre mémoire dans lequel il élabore une intégrale sur $\mathcal{R}^n$ en partant d'une fonction complètement additive d'ensemble définie sur les ensembles de $\mathcal{R}^n$ mesurables pour la mesure de Lebesgue. Considérant une telle fonction définie sur une famille de parties d'un espace abstrait, Fréchet remarque qu'il suffit que la famille de parties soit stable pour les opérations de réunion dénombrable et de différence, pour pouvoir utiliser le procédé de Radom et définir une intégrale abstraite.

L'extension aux fonctionnelles, puis aux fonctions abstraites du théorème de Weierstrass sur l'approximation d'une fonction continue par un polynome l'a conduit à généraliser la notion de polynome.

Ces travaux théoriques sont ceux qui ont le plus contribué à la renommée de M. Fréchet. L'essentiel en est exposé dans son livre «Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale» publié en 1928. Pour établir les résultats ci-dessus et étant parti de points mathématiques précis, il a résolu un certain nombre de problèmes de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. D'autre part, des propositions établies dans le langage de la théorie des Espaces Abstraits sont directement applicables à l'analyse classique.

En 1920, il est professeur à l'Institut d'Enseignement commercial supérieur de Strasbourg où il enseigne les Statistiques et la théorie des Assurances. A partir de cette date et en étroite collaboration avec Borel il consacre de plus en plus de temps au Calcul des Probabilités et à ses applications. Dans ce domaine son œuvre est plus dispersée. Il reprend les notions les plus récentes et il s'efforce de les approfondir ou bien de les mieux formaliser.

L'ensemble des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité constitue un espace abstrait, domaine de ses investigations. Partant des résultats de Cantelli sur la convergence en probabilité il démontre (1930) que pour ce mode de convergence l'espace ci-dessus est métrisable, complet. Il donne deux distances compatibles avec cette convergence et énonce des conditions de compacité pour un sous espace de variables aléatoires. Il démontre que, par contre, il n'existe pas de distance compatible avec la convergence presque sûre.

Intéressé par les probabilités en chaîne il étudie le comportement limite des itérés d'une matrice de transition et d'un noyau de Fredholm. Ses travaux les plus récents sont consacrés aux fondements des Probabilités : probabilités objectives et subjectives.

Son enseignement à Strasbourg mais aussi son goût profond pour le réel expliquent l'attachement de M. Fréchet aux Statistiques. Il consacre plusieurs articles pour montrer les erreurs que peut entraîner une utilisation systématique du coefficient de corrélation. Il étudie ce qu'il appelle les valeurs typiques d'un échantillon (moyenne, médiane, fractile ...). L'«Inégalité de Fréchet» est très utilisée dans la théorie de l'estimation.

Pour compléter cet aperçu de l'œuvre de M. Fréchet, il faut encore signaler un certain nombre de publications relatives au Calcul d'erreur, aux Assurances, à l'Econométrie et à la Pédagogie. Oeuvre dont la profondeur et l'influence ne le cèdent en rien à la diversité et l'étendue (environ trois cent cinquante publications).

Reçu en Septembre 1973
86, Av. E. Zola
75015 PARIS