Utilisation de la transformation de Laplace pour l'évaluation de fonctions de répartitions

P. Krée, P. N. Met

UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE POUR L'EVALUATION DE FONCTIONS DE REPARTITION.

P. KREE et P. N. MET.

Summary

Use of Laplace transform (with an integration in the complex plane) in way to compute and evaluate the distribution function of a random variable. The authors give several numerical examples (in particular to the browican motion).

Soit f(x) dx une loi de probabilité sur la droite R dont la densité est une fonction intégrable f. Soit F la fonction de répartition (F. R.) de cette loi et soit $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f (T.F.)

(1) $$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixv}\, dx$$

(2) Comme F' = f et comme $\hat{F'} = \hat{f} = i\, v\, \hat{F}$, on peut songer à utiliser formellement la formule d'inversion de Fourier pour calculer F (x), si l'on connaît $\hat{f}$:

(3) $$F(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(v)}{i\, v}\, e^{ixv}\, dv$$

Mais cette formule n'a pas de sens car $v^{-1}\ \hat{f}(v)$ n'est pas intégrable au voisinage de l'origine. Nous allons voir que la considération de transformées de Laplace (T.L.), permet de donner un sens à cette formule. Les nouvelles formules obtenues se prêtent souvent très bien au calcul numérique (voir paragraphes 2, 3 et 4), mais elles permettent aussi d'obtenir des évaluations asymptotiques de F (x) pour |x| très grand. Ne disposant pas du temps machine nécessaire nous n'avons pu dresser des tables complètes de fonctions de répartition. Mais nous signalons que notre méthode peut être utilisée chaque fois que l'on connaît la T.L. de la loi dont on cherche la F.R.

1 - PRELIMINAIRES

(4) **Définition**

Soit m une mesure de probabilité sur R admettant une densité. On introduit le plan C_p de la variable complexe $p = u + iv$. On suppose qu'il existe un intervalle $I = (u_o, u_1)$ contenant 0 tel que

(5) $$\forall\ \alpha \in I \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dm(t) < \infty$$

Alors la fonction

(6) $$p \mapsto M(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}\, dm(t)$$

définie pour $\mathrm{Re}\,p \in (u_0, u_1)$, est appelée la tranformée de Laplace de m.

(7) Remarque

a) M (p) est une fonction holomorphe de p, définie dans la bande verticale où $u_0 < \mathrm{Re}\,p < u_1$.

b) Introduisons la T.F. $\hat{m}$ de m

(8) $$\hat{m}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt}\, dm(t)$$

Alors

(9) $M(iv) = \hat{m}(v)$

Autrement dit la T.F. de m est la restriction de la transformée de Laplace à l'axe imaginaire du plan complexe $\mathbb{C}_p$, Donc, on peut considérer la transformée de Laplace de m comme étant le prolongement holomorphe à un voisinage de l'axe imaginaire, de la T.F. de m.

c) Soient a_1 et a_2 ($a_1 < a_2$) deux nombres réels et soient m et n deux lois de probabilités sur $\mathbb{R}$ vérifiant (5), c'est-à-dire admettant des T.L. M(p) et N(p), définies au moins pour $a_1 \leqslant \mathrm{Re}\,p \leqslant a_2$. Alors il en est de même pour $q = m * n$ et l'on a $Q(p) = M(p).\,N(p)$

d) On rappelle qu'une loi de probabilité m n'admet pas forcément une T.L. définie pour $|\mathrm{Re}\,p| < \epsilon$. Par exemple la loi de probabilité de densité $\pi^{-1}\ (1 + x^2)^{-1}$, admet pour T.F. $\exp(-|v|)$. Comme cette fonction n'est pas dérivable, elle n'est pas prolongeable en une fonction holomorphe de part et d'autre de l'axe imaginaire'

(10) **Le problème considéré**

a) On suppose connue la T.F. (ou la T.L.) d'une loi de probabilité m. On cherche à calculer numériquement la fonction de répartition F de m. Trouver un développement asymptotique de F(x) pour x tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Vu (7, c), ce problème contient comme cas particulier le suivant.

b) Soient $X_1, \ldots X_N$ des variables aléatoires indépendantes (v.a.i.) dont les lois sont notées $m_1, \ldots m_N$. On suppose que ces lois admettant des transformées de Laplace $M_1(p) \ldots M_N(p)$, définies au voisinage de l'axe imaginaire. Evaluer la fonction de répartition F(x) de la loi m de $X = X_1 + \ldots + X_N$. Trouver un développement asymptotique de F(x) pour x très grand.

c) On peut aussi considérer le problème plus général où l'on cherche la F.R. d'une somme infinie de variables aléatoires.

2 - EXPRESSIONS DE F(x)

(11) *Théorème*

Soit m une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de T.L. M(p) définie pour $0 \leqslant Rep \leqslant u_i$. Soit F la fonction de répartition de m. Alors pour tout réel x on a :

(12) $$F(x) = + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\epsilon)} G(p) \frac{e^{px}}{p} dp$$

où $\Gamma(\epsilon)$ est la verticale ascendante du plan complexe où $Rep = \epsilon$ (avec $0 < \epsilon \leqslant u_i$)

Démonstration

Introduisons la fonction $Y_{\epsilon,x}$ et la mesure m_ϵ telles que

$$Y_{\epsilon,x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > x \\ e^{\epsilon t} & \text{si } t < x \end{cases}$$

$$dm_\epsilon(t) = e^{-\epsilon t} dm(t)$$

On a $\hat{Y}_{\epsilon, x}(v) = -\dfrac{1}{iv-\epsilon}\, e^{-x(iv-\epsilon)}$

tandis que $\hat{m}_{\epsilon}(v) = \int e^{-\epsilon t - ivt}\, dm(t) = M(iv+\epsilon)$.

On note que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} dm(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{\epsilon x}(t)\, dm_{\epsilon}(t)$

Pour calculer cette intégrale, on utilise la relation de Plancherel

$$F(\epsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Y}_{\epsilon x}(-v)\, \hat{m}_{\epsilon}(+v)\, dv$$

Finalement

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iv+\epsilon}\, e^{x(iv+\epsilon)}\, M(iv+\epsilon)\, d(iv+\epsilon)$$

Nous avons donc prouvé (11)

Voici une variante du théorème (11) qui sera utile pour calculer les fonctions de répartition de lois nulles pour $t \leqslant 0$

(13) *Théorème*

Soit m une loi de probabilité telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u_o t}\, dm(t) \leqslant \infty \text{ pour } u_o < 0$$

Soit F la fonction de répartition de m. Alors on a pour tout x

(14) $$1 - F(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(-\epsilon)} M(p)\, \frac{e^{px}}{p}\, dp \text{ avec } u_o < -\epsilon < 0$$

où $\Gamma(-\epsilon)$ *est la verticale ascendante du plan complexe où* $Re\, p = -\epsilon$; *M(p) étant la transformée de Laplace de la loi m*

Démonstration

$$1 - F(x) = \int_x^{\infty} e^{-\epsilon t}\, dm(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\epsilon x}(t)\, dm_{-\epsilon}(t)$$

avec $Z_{\epsilon x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ e^{-\epsilon t} & \text{si } t > x \end{cases}$

On a $\hat{Z}_{\epsilon x}(v) = \dfrac{1}{\epsilon + iv} \quad e^{-x(iv+\epsilon)}$

D'où $1 - F(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Z}_{\epsilon, x}(-v)\, \hat{m}_{-\epsilon}(v)\, dv$

$$1 - F(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x(iv-\epsilon)}}{iv - \epsilon}\, M(iv - \epsilon)\, d(iv)$$

(15) **Mise en œuvre des formules (12) et (14)**

a) Les formules (12) et (14) peuvent être appliquées directement pour calculer F(x). Il suffit d'utiliser des formules de quadrature aux intégrales intervenant dans ces formules. Naturellement, on choisira la formule qui donne une bonne décroissance à l'infini pour la fonction à intégrer. De la même façon on prendra ϵ de façon à simplifier les calculs.

b) On peut aussi chercher à déformer la courbe $\Gamma(\epsilon)$ ou $\Gamma(-\epsilon)$, soit en faisant tendre ϵ vers zéro. Par exemple, supposons M définie à droite de l'axe imaginaire. Appliquons le théorème de Cauchy au contour ABCDEFA de la figure 1. On suppose que M(p) est telle que

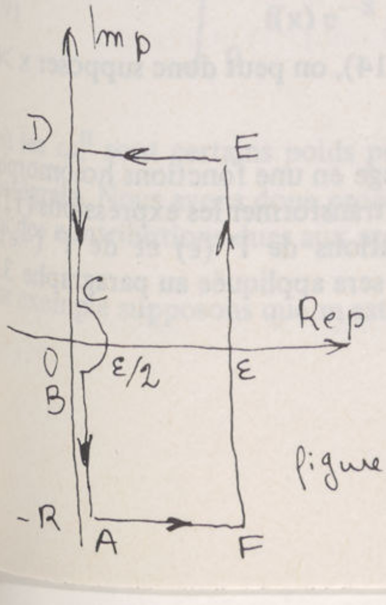

figure 1

(15')

$$\left(\int_{DE} + \int_{AF}\right) \left(M(p)\, \frac{e^{px}}{p}\, dp\right) \to 0$$

Si R tend vers $+\infty$. Le résidu de la fonction $M(p)\,\dfrac{e^{px}}{p}$, au pole $p = 0$, est égal à M(0).

Par conséquent il vient

$$F(x) = \frac{1}{2} + \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{R} \right) \frac{\hat{m}(v)\, e^{ivx}}{2\pi i}\, dv$$

Si dans l'intégrale $\int_{-R}^{-\epsilon}$, on fait le changement de variable $v = -v'$,

il vient

$$(16) \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\epsilon}^{R} \frac{\hat{m}(v)\, e^{ivx} - \hat{m}(-v) e^{-ivx}}{2\pi iv}\, dv$$

Dans le cas plus particulier ou m est une fonction paire, il vient

$$(17) \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} \hat{m}(v)\, \frac{\sin vx}{\pi v}\, dv$$

Ces formules vont être utilisées au paragraphe suivant.

Notons que m paire si et seulement si m est une fonction paire. Dans ce cas, on a

$$(18) \qquad F(+x) = 1 - F(x) \quad \text{pour } x > 0$$

Dans l'application des formules (12) et (14), on peut donc supposer $x > 0$ ou $x < 0$

c) Dans le cas où la fonction M se prolonge en une fonctions holomorphe définie dans un plus grand domaine, on pourra transformer les expressions (12) et (14) de F(x) en utilisant d'autres déformations de $\Gamma(\epsilon)$ et de $\Gamma(-\epsilon)$, par exemple celles de la figure 2. Cette méthode sera appliquée au paragraphe 3.

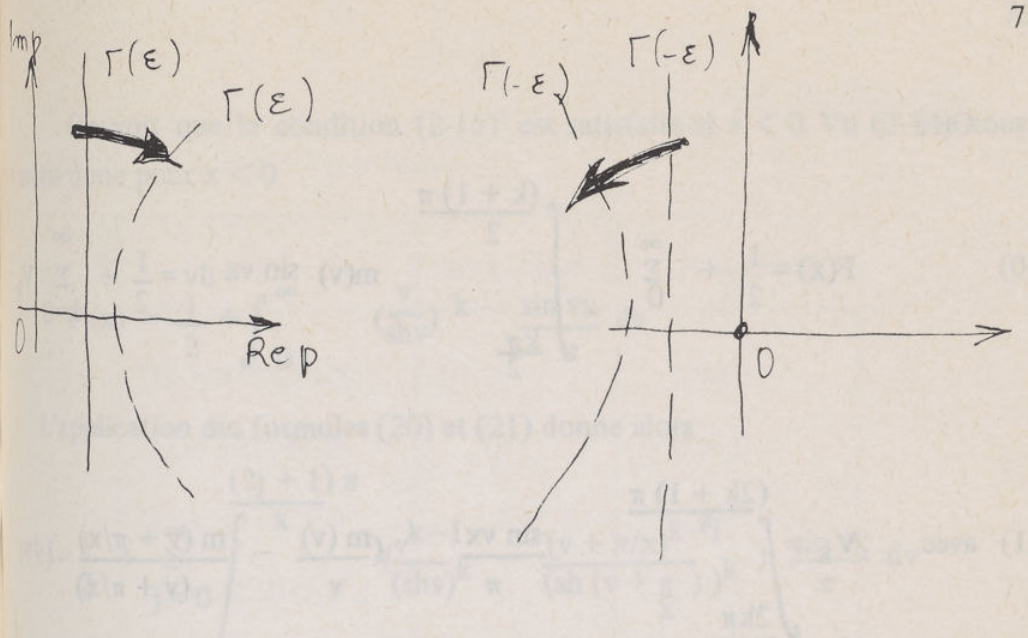

Figure 2

montrant les déformations possibles de la courbe vers la droite ou vers la gauche

3 – CALCUL NUMERIQUE DE F(x) PAR INTEGRATION SUR L'AXE IMAGINAIRE.

a) Généralités

On donne ci-après des exemples concrets montrant comme les formules obtenues au paragraphe précédent, permettent le calcul de certaines fonctions de répartition. Le calcul de F(x) en évaluant les intégrales figurant aux deuxieme membres de (15), (16), (17) en utilisant une formule de quadrature du type Gauss Laguerre, ou du type Gauss Hermite (voir [2]) s'est révélé en pratique très imprécis. Nous pensons que cette imprécision est due au fait que la fonction à intégrer est oscillante (terme en e^{px}). En effet si $x_1^n \dots x_n^n$ sont les n zéros du polynome de Laguerre de degré n, la formule de quadrature de Gauss Laguerre

(19) $$\int_0^\infty f(x)\, e^{-x}\, dx \sim \sum_{j=1}^{n} f(x_j^n)\ \omega_j^n$$

(où les ω_j^n sont certains poids positifs), donne une mauvaise approximation de l'intégrale. Nous avons donc procédé autrement, en effectuant séparément le calcul des contributions dues aux arches successives de la fonction à intégrer.

Par exemple supposons que m est paire et évaluons en utilisant la formule (17).

On a

$$(20)\qquad F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{0}^{\infty} \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} m(v)\ \sin vx\ dv = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} V_k$$

$$(21)\ \text{avec}\qquad V_k = \int_{\frac{2k\pi}{x}}^{\frac{(2k+1)\pi}{x}} \frac{\sin vx}{\pi} \left(\frac{m(v)}{v} - \frac{m(v+\pi/x)}{(v+\pi/x)}\right) dv$$

Donc, Vk est calculable par une formule de quadrature. En ce qui concerne le programme on est ramené à appliquer de façon répétitive un programme de calcul d'intégration par la méthode de Gauss Legendre. Un programme réalisé en Fortran IV et adapté au système IBM 360 a été réalisé : voir [6]. L'efficacité du programme diminue pour les faibles valeurs de x. On a vérifié d'abord la précision de ce programme en l'appliquant à $m(v) = (1 + v^2)^{-1}$, car alors F est connu :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}\ \exp(-x) \qquad \text{si } x > 0$$

On a pu ainsi vérifier que pour x variant de 0,5 à 5, le mode de calcul ci-dessus donne au moins cinq décimales exactes.

B – APPLICATION à $\quad m(v) = \left(\frac{v}{\text{sh}v}\right)^k$

Cette loi intervient dans le test de Smirnov voir [3]. Comme on a :

$$m(p) = M(iv) = \left(\frac{v}{-i \sin iv}\right)^k = \left(\frac{iv}{\sin iv}\right)^k$$

D'où

$$M(p) = \left(\frac{p}{\sin p}\right)^k$$

On voit que la condition (2-15)' est satisfaite si $\pi < 0$. Vu (2-14) nous avons donc pour $x < 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{shv}\right)^k \frac{\sin vx}{v}\, dv$$

L'application des formules (20) et (21) donne alors

$$F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{2j\pi}{x}}^{\frac{(2j+1)\pi}{x}} \left(\frac{v^{k-1}}{(shv)^k} - \frac{(v+\pi/x)^{k-1}}{(sh\,(v+\frac{\pi}{x}))^k}\right) \frac{\sin vx}{\pi}\, dv$$

Prenons l'exemple de k = I

c) **APPLICATION** à $m(v) = \left(\frac{1}{Chv}\right)^k$

Il résulte de (17) que l'on a pour $x < 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{Chv}\right)^k \frac{\sin vx}{v}\, dv$$

Vues les formules (20) et (21) on a donc :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{2j\pi}{x}}^{\frac{(2j+1)\pi}{x}} \frac{\sin v\,x}{\pi} \left(\frac{1}{v\,ch^k v} - \frac{1}{(v+\frac{\pi}{x})\, Ch^k\, (v+\frac{\pi}{x})}\right) dv$$

L'application de la méthode indiquée donne les résultats du tableau suivant :

Loi m telle que $m(v) = \dfrac{1}{\text{Chv}}$

Variable X	Nom. 1 ter	F(x)
– 4,000	8	0.99881E + 00
– 3,000	6	0.99428E + 00
– 2,000	4	0.97251E + 00
– 1,000	2	0.85952E + 00
– 0,750	2	0.80987E + 00
– 0,500	1	0.72767E + 00

d) Calcul numérique de F par intégration en dehors de l'axe imaginaire

Au lieu d'utiliser la variante (15 b) des formules (12) et (14), nous allons à présent utiliser la variante évoquée au point (15-c). L'intérêt de cette méthode est que les formules obtenues peuvent être appliquées pour x quelconque (pour x très grand positif et pour x très grand négatif en particulier) ; les formules obtenues donnent un développement asymtotique F(x) pour x tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

(22) **Cas où m(v) = 1/(chv)**

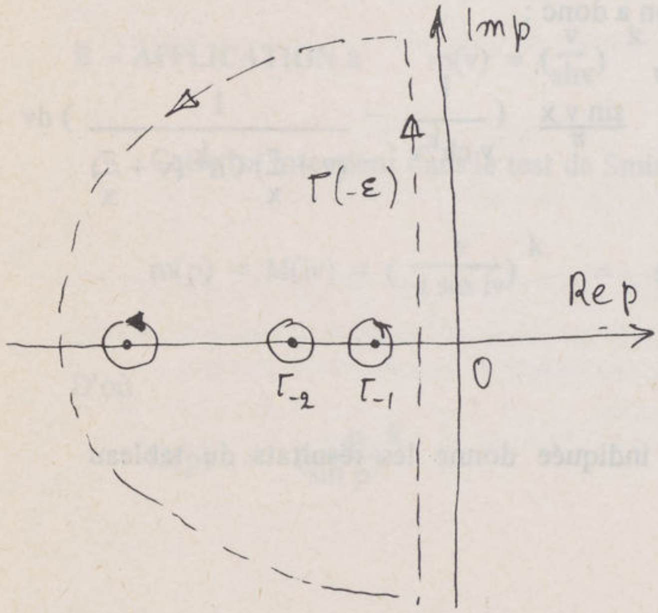

figure 3

On a $M(p) = (\cos p)^{-1}$ et les poles sont points $p_k - \frac{\pi}{2} + k\pi$ étant un entier relatif. Pour $x > 0$ on a (voir figure)

$$1 - F(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(-\epsilon)} \frac{e^{px}}{p\cos p}\, dp$$

$$= \sum_{j=-1}^{\infty} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{e^{px}}{p\cos p}\, dp = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{xp_k}}{p_k}$$

Cette série convergente permet de calculer numériquement $F(x)$. De plus si x tend vers $-\infty$, on a une très bonne approximation de $F(x)$ en remplaçant la série par son premier terme, c'est-à-dire par $\frac{2}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$.

Le calcul sur ordinateur montre un accord parfait (à cinq décimales) entre des nombres déduits de cette dernière formule, et ceux déduits des méthodes décrites au paragraphe précédent.

(24) Cas où $m(v) = (v/\operatorname{sh} v)^l$ (avec l entier $\geqslant 0$)

On a vu que $M(p) = (p/\sin p)^l$; et les poles de cette fonction sont les points $p = k\pi$ avec $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ Pour $x > 0$ nous avons pour

$$1 - F(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(-2)} H_2(p)\, dp \text{ avec } H_2(p) = \frac{p^{l-1}}{\sin^l p}\, e^{px}$$

Le résidu $R(k, l)$ de la fonction $H_2(p)$ au point $p = -k\pi$ (avec $k > 0$) est le terme en $(\Delta p)^{-2+1}$ du développement limité de H en ce point, c'est-à-dire de l'expresion

$$H_1(p) = \frac{e^{-k\pi x}\, e^{x\Delta p}\, (\Delta p - k\pi)^{l-1}}{(-1)^{kl}\, \sin^l \Delta p}$$

D'après le théorème des résidus, on a donc pour $x > 0$

(25) $$1 - F(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} R(k, l)$$

Par exemple, si $l = 1$, on a

$$(26)\quad 1 - F(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-k\pi x} = \frac{e^{-\pi x}}{1 + e^{-\pi x}} = -\frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2}}$$

Si $l > 1$, l'expression de F(x) est un peu plus compliquée (mais elle peut être obtenue par la méthode ci-dessus).

Le tableau suivant montre que les méthodes présentées aux points C et D sont très précises (puisqu'elles donnent les mêmes résultats, avec cinq décimales).

Loi m dont la T.F. est $m(v) = \dfrac{v}{\operatorname{Shv}}$

	FONCTION DE REPARTITION F(x)	
	Méthode axe imaginaire	Méthode axe réel
Variable x	Expression (20)	Expression (26)
– 0,500	0,82790E + 00	0,82790E + 00
– 0,750	0,91343E + 00	0,91343E + 00
– 1,000	0,95858E + 00	0,95858E + 00
– 2,000	0,99814E + 00	0,99814E + 00
– 3,000	0,99992E + 00	0,99992E + 00
– 4,000	0,10000E + 01	0,10000E + 01

(27) Cas de $m = p * q$ avec $p \sim N(O, \sigma^2)$ et $q = VE(a, \beta)$

La transformée de Laplace de $p = N(O, \sigma^2)$, de moyenne 0 et de variance σ^2 a pour T.L. :

$$P(p) = \exp\left(\frac{1}{2}\ \sigma^2\ p^2\right)$$

La loi de valeurs extrêmes $q = VE(a, \beta)$ a pour transformée de Laplace

$$Q(p) = \exp(-ap)\ \Gamma(1 + p\beta) \text{ avec } \Gamma(1 + p\beta) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{1 + p\beta}\, \frac{dt}{t}$$

Cette T.L. est définie pour $\mathrm{Re}\,p > -1/\beta$

Donc $m = p * q$ a pour fonction de répartition $F(x)$ avec :

$$* \quad F(x) = \frac{I}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\,p = \epsilon} H(p)\, dp \quad \text{pour tout } x$$

$$** \quad \text{et } 1 - F(x) = -\frac{I}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\,p = -\epsilon'} H(p)\, dp \quad \text{pour } x > 0$$

$$\text{avec } H(p) = \frac{e^{(x-a)p}}{p}\ \Gamma(1 + p\beta)\ \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 p^2\right)$$

On peut prendre par exemple $\epsilon' = (2\nu)^{-1}$ (la verticale étant équidistante de l'axe imaginaire et du premier pole de $M_2(p)$. Le nombre positif ϵ est quelconque. Pour appliquer la formule de Gauss-Laguerre, on a intérêt à utiliser (2 – *) si $x - a > 0$ et (2 – **) si $x - a > 0$. Le terme $\Gamma(1 + p\beta)$ doit être aussi calculé par une méthode de quadrature. Mais ici, les formules (12) et (14) ne se prêtent pas mieux au calcul numérique que la formule originale (1). Il ne semble pas (à cause du facteur $\exp(ap^2)$) que l'on puisse faire subir aux contours $\Gamma(\epsilon)$ et $\Gamma(-\epsilon)$ des déformations ramenant ces contours sur l'axe réel. Cependant le théorème de Cauchy montre que l'on a pour $x > 0$ (voir figure 4)

$$I - F(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ldots$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \ldots$$

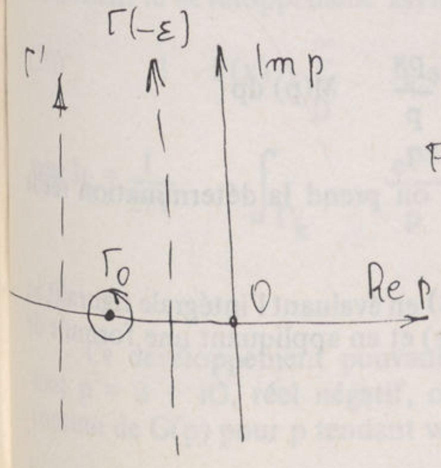

Figure 4

La seconde intégrale est négligeable par rapport à la première si x tend vers $+\infty$. On obtient donc un équivalent (pour x très grand) pour $F(x)$:

$$F(x) \sim 1 - C\, e^{\frac{-x}{\beta}}$$

APPLICATION AUX FORMES QUADRATIQUES DE PROCESSUS GAUSSIENS

Nous considérons ici une suite infinie de variables aléatoires indépendantes $X_1 \dots X_N \dots$ suivant toutes une loi normale réduite ; et l'on considère une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres réels tels que $\sum_0^\infty |\lambda_n| < \infty$

On cherche la fonction de répartition de la loi m de la v.a. $X = \sum_0^\infty \lambda_n X_n^2$

(la suite converge presque surement d'après le théorème des trois séries). Il s'agit donc d'une généralisation des lois du Khi carré (prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{nn} = 1$ et $\lambda_i = 0$ pour $i > n$) et de la loi de la forme quadratique canonique du mouvement brownien. Les résultats obtenus peuvent donc être utilisés en traitement du signal, pour des calculs de probabilité de détection, ou d'identification.

Comme la T.F. de la loi de $\lambda_n X_n^2$ est $v \leftrightarrow (1 + 2\,i\,\lambda_n\, v)^{-1/2}$, nous avons.

$$(28) \qquad m(v) = \prod_0^\infty (1 + 2\,i\,\lambda_k\, v)^{-1/2}$$

$$\text{et} \qquad M(p) = \prod_0^\infty (1 + 2\,\lambda_k\, p)^{-1/2}$$

Cette T.L. est définie si $\mathrm{Re}\,p > -(2\lambda_0)^{-1}$ (on suppose que $\lambda_n \geqslant 0$ et $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \dots$ Comme X est positive on a $F(x) = 0$ si $x < 0$. Pour $x > 0$ on a

$$(29) \qquad 1 - F(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(-\epsilon)} \frac{e^{px}}{p}\, M(p)\, dp$$

avec $0 < \epsilon < (2\lambda_0)^{-1}$ (pour chaque radical, on prend la détermination réelle positive pour p réel positif).

Naturellement, on pourrait calculer F(x) en évaluant l'intégrale figurant au 2ème membre de (2.29) en paramètrant $\Gamma(-\epsilon)$ et en appliquant une formule de quadrature (ou en procédant comme point C)

Cas où $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 \dots$

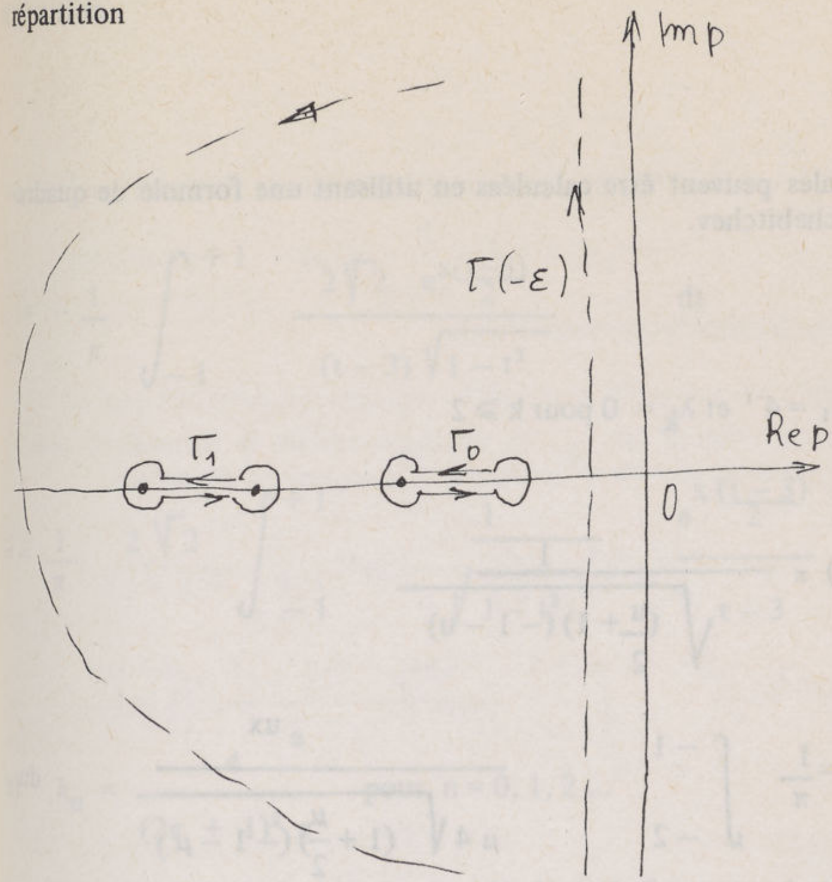

Figure 5

On pose $G(p) = p^{-1}\ e^{px}\ M(p)$. On considère la détermination holomorphe de G(p) qui est réelle positive si p est réel positif, qui est définie en dehors de la réunion des segments

$$[-(2\lambda_{2j+1})^{-1}, -(2\lambda_{2j})^{-1}]$$

j variant de 0 à $+\infty$: voir figure 5

En appliquant le théorème de Cauchy de C et aux circuits $\Gamma(-2), \Gamma_0, \Gamma_1$ ..

on obtient le développement asymptotique suivant :

(30) $$1 - F(x) \sim \sum_0^\infty I_k \quad \text{si } x \to +\infty$$

avec $I_k = \dfrac{I}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_k} \frac{e^{px}}{p}\ M(p)\, dp$

Ce développement pouvant converger dans certains cas particuliers. Pour tout $p = u + iO$, réel négatif, on définit G(u) comme étant le prolongement continu de G(p) pour p tendant vers u avec $Imp > 0$. On voit alors que

$$I_k = \frac{I}{i\pi} \int_{-(2\lambda_{2k+1})}^{-(2\lambda_{2k})^{-1}} \frac{e^{ux}}{u}\ M(u)\, du$$

Ces intégrales peuvent être calculées en utilisant une formule de quadrature de Gauss-Tchebitchev.

(31) Exemples

a) $\lambda_0 = 2^{-1}$, $\lambda_1 = 4^{-1}$ et $\lambda_k = 0$ pour $k \geqslant 2$

On a alors

$$M(u) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{2}+1\right)(-1-u)}}$$

$$*\text{et } 1 - F(x) = I_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{-1} \frac{e^{ux}}{\mu\, 4 \sqrt{\left(1+\frac{\mu}{2}\right)(-1-\mu)}}\, du$$

Noter que l'utilisation de l'expression de la densité de la loi du X^2 donnerait

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \iint (2yz)^{-1/2}\, e^{-y-2z}\, dy\, dz$$

L'intégrale étant entendue au triangle où $y > 0$, $z > 0$ et $y + z < 1$

Cette dernière expression semble moins adaptée au calcul numérique.

Pour le calcul effectif de *, en utilisant les formules de Gauss-Tchebitchev on fait dans l'intégrale * le changement de variable $u = \frac{t-3}{2}$. D'où

$$A = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{x\frac{t-3}{2}}}{\frac{(t-3)}{2}\sqrt{\frac{1+t}{4}\;\frac{1-t}{2}}}\, \frac{dt}{2}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{2\sqrt{2}\; e^{x\frac{(t-3)}{2}}}{(t-3)\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\; 2\sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\; \frac{e^{x\frac{(t-3)}{2}}}{t-3}\, dt$$

b) $\lambda_n = \dfrac{4}{(2\pi + 1)^2\, \pi^2}$ pour $n = 0, 1, 2 \ldots$

Alors (voir P. Levy [5] chapitre 5), X est la forme quadratique canonique du mouvement brownien sur (0, 1) et la transformée de Laplace de la loi m de X est

$$M(p) = \frac{1}{\sqrt{\cos \sqrt{-2p}}} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{8p}{(2n+1)^2\, \pi^2}\right)^{-1/2}$$

Les singularités de M sont les points $p_n = -\dfrac{(2n + 1)^2\ \pi^2}{8}$, $n = 0,1 \ldots$

Notons que $\cos \sqrt{-2p}$ est une fonction entière de la variable complexe p qui ne s'annule pas pour $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$ et que la détermination qu'il convient de prendre pour le grand radical est celle qui est égale à 1 pour $p = 0$. Pour u réel négatif, contenu à l'intérieur d'un intervalle (p_{2k+1}, p_{2k}) on a

$$M(u) = \frac{1}{\sqrt{\cos \sqrt{-2u}}} = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{-\cos \sqrt{-2u}}}$$

Par conséquent $F(x) \sim \sum_{0}^{\infty} I_k(x)$ si $x \to \infty$ avec

*avec $I_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{\pi} \displaystyle\int_{p_{2k+1}}^{p_{2k}} \frac{e^{ux}}{\sqrt{-u \sqrt{-\cos \quad -2u}}}\, du$

82.

Ici, la série $\sum_{0}^{\infty} I_k(x)$ converge. Donc on peut utiliser la formule $1 - F(x) = \sum_{0}^{\infty} I_k(x)$ pour calculer numériquement F (x).

Pour le calcul effectif de I_k, on applique encore la formule de Gauss Tchebitchev, après avoir fait dans l'intégrale le changement de variable

$$t = \frac{1}{P_{2k} - P_{2k+1}} \quad (2u - p_{2k} - p_{2k+1})$$

$$\text{D'où } I_k(x) = \frac{(-1)^k}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(p_{2k} - p_{2k+1})}{2} \sqrt{1 - t^2}$$

$$\frac{e^{ux}}{-u\sqrt{-\cos\sqrt{-2u}}} \quad \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Un programme de calcul de $I - F(x) = \sum_{0}^{\infty} I_k(x)$ est indiqué dans [6].

On donne ci-après quelques résultats obtenus par exploitation de ce programme.

Variable aléatoire $X = \int_{0}^{1} B_t^2 (w)\, dt$ ou $(Bt)_t$ est un mouvement brownien sur (0, 1).

FONCTION DE REPARTITION F(x)	
Variable X	
1,00	0,86584E + 00
2,00	0,97134E + 00
3,00	0,99352E + 00
4,00	0,99852E + 00
5,00	0,99966E + 00

(32) Cas où $\lambda_0 = \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \ldots$

On a alors $$M(p) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + 2\lambda_{2k}\, p)^{-1}$$

et M est une fonction méromorphe. D'après le théorème des résidus on a pour $x > 0$

$$1 - F(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{px}}{p} M(p), -(2\lambda_k)^{-1}\right)$$

Posant $p_k = -\dfrac{1}{2\lambda_{2k}}$, il vient

$$1 - F(x) = - \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{xp_k}}{p_k \lambda_{2k}} \prod_{\ell \neq 2k} (1 + 2\lambda_{2\ell}\, p_{2k})^{-1}$$

Cette formule est naturellement valable lorsque les λ_{21} sont nuls à partir d'un certain rang.

(33) Remarque

Supposons que $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{2k-1} = 1$ et $\lambda i = 0$ si $n \geqslant 2k$

Pour $x > 0$, on a

$$1 - F(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} p = -\epsilon} \frac{e^{px}}{p} (1 + 2p)^{\frac{-n}{2}} dp$$

Par application de la méthode des rnsidus on peut retrouver les expressions usuelles :

BIBLIOGRAPHIE

[1] *ABRAMOWITZ (M.) et SEGUN (J.A.)* Handbook of mathematical functions. Diver, 486, 61272, 4.

[2] *BEREZIN (I.S.) et N.P. ZHIDKOV (N.P.)* Computing methods - volume 1 - Pergamon Press 1965 (traduit du russe)

[3] *DUGUE (D.) Traité de statistique théorique et appliquée.* Masson - Paris 1958

[4] *KREE (P.) et (P.N.) MET* Conférence à la CTICM - Paris - Juillet 1972 Conférence (à paraître) au CERMA. Nice septembre 1972.

[5] *LEVY (P.)* Processus stochastique et mouvement brownien 2e édition - Paris, 1965 Gauthier Villars

[6] *MET (P.N.)* Calcul du risque d'avarie des structures élastiques. Thèse d'ingénieur docteur. Université de Nice, octobre 1972

Reçu en Septembre 1972

P. KREE UER de mathématiques
Universtié de Paris 6.
Quai St Bernard Paris 5

P.N. MET Ingénieur STEG
Saint-Raphael