



**HAL**  
open science

# Contrôle actif et non-linéarités géométriques: le cas du gong xiaoluo.

Marguerite Jossic

► **To cite this version:**

Marguerite Jossic. Contrôle actif et non-linéarités géométriques: le cas du gong xiaoluo.. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2017. Français. NNT: . tel-01713349

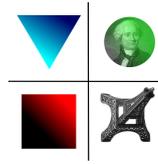
**HAL Id: tel-01713349**

**<https://hal.sorbonne-universite.fr/tel-01713349v1>**

Submitted on 20 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT  
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

ECOLE DOCTORALE DE SCIENCES MECANIQUES, ACOUSTIQUE,  
ELECTRONIQUE ET ROBOTIQUE

Spécialité

**Mécanique - Acoustique**

présentée par **Marguerite JOSSIC**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie.

---

CONTRÔLE ACTIF  
ET NON-LINÉARITÉS GÉOMÉTRIQUES :  
LE CAS DU GONG XIAOLUO.

---

sous la direction de

Adrien MAMOU-MANI, Baptiste CHOMETTE, David ROZE et Christophe JOSSERAND

Institut d'Alembert - IRCAM

Thèse soutenue publiquement à l'UPMC le 8 novembre 2017 devant le jury composé de :

Isabelle BRUANT	Rapporteur	- Maître de Conférences, LEME
Charles PÉZERAT	Rapporteur	- Professeur, LAUM, ENSIM
Cyril TOUZÉ	Examineur	- Professeur, ENSTA ParisTech
Christophe VERGEZ	Examineur	- Directeur de Recherche CNRS, LMA
Sébastien NEUKIRCH	Examineur	- Directeur de Recherche CNRS, d'Alembert
Christophe JOSSERAND	Directeur de thèse	- Directeur de Recherche CNRS, d'Alembert
Adrien MAMOU-MANI	Co-directeur de thèse	- CEO de HyVibe
Baptiste CHOMETTE	Co-directeur de thèse	- Maître de Conférences, d'Alembert



"[...]  
*Grosses tempêtes qui m'avez secouru,  
Beau soleil qui m'a contrecarré,  
Il y a haine en moi, forte et de date ancienne,  
Et pour la beauté on verra plus tard.  
Je ne suis, en effet, devenu dur que par lamelles ;  
Si l'on savait comme je suis resté moelleux au fond.  
Je suis gong et ouate et chant neigeux,  
Je le dis et j'en suis sûr."*

Extrait de *Je suis Gong*, H. Michaux (1899-1984).



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mes encadrants : Adrien Mamou-Mani, Baptiste Chomette et David Roze pour m'avoir confié ce sujet de thèse, ainsi que Christophe Josserand pour avoir accepté de diriger ce travail. La diversité des compétences apportée par ce quadruple (!) encadrement fut très enrichissante et est, me semble-t-il, à l'image des domaines transverses abordés dans cette étude! Je remercie l'Institut  $\partial$ 'Alembert et l'IRCAM ainsi que leurs directeurs scientifiques respectifs, Stéphane Zaleski et Hugues Vinet, pour m'avoir accueillie pendant ces trois années. Je remercie de la même manière les tutelles qui leur sont rattachées : l'IRCAM, l'Université Pierre et Marie Curie, et le Centre National de la Recherche Scientifique. Les financements de ces laboratoires et de ces tutelles m'ont permis d'effectuer ma thèse dans des conditions financières optimales, ce dont je leur suis reconnaissante.

Mes remerciements vont également à Isabelle Bruant, Charles Pézerat, Cyril Touzé, Christophe Vergez et Sébastien Neukirch qui ont accepté d'être dans mon jury de thèse et d'évaluer ce travail.

Cette thèse repose par ailleurs sur de précieuses collaborations institutionnelles et personnelles, tant au sein de  $\partial$ 'Alembert et de l'IRCAM que dans d'autres structures. Ainsi, une part importante de ce travail n'aurait pas vu le jour sans la collaboration avec le professeur Olivier Thomas, des Arts et Métiers de Lille. Je le remercie sincèrement de m'avoir ouvert la porte de son laboratoire. Son enthousiasme scientifique manifeste ont fait de mes séjours lillois au LSIS une vraie bouffée d'air frais (et humide!) dans cette thèse. Je remercie par ailleurs Vivien Denis, grâce auquel le développement de la boucle à verrouillage de phase s'est effectuée en un temps record ; à l'efficacité et la patience de Vivien s'est ajoutée la joie de pouvoir manipuler à deux à quelques reprises, ce qui est assez précieux pour être mentionné! En passant, merci à Arthur, Camille et au frerot de m'avoir si bien accueillie pendant mes courts séjours.

Par ailleurs, l'utilisation de l'accélérateur AGLAE a été concrétisée par la collaboration efficace entre René Caussé de l'IRCAM et Benoit Mille du C2RMF. Je les remercie pour leur disponibilité et leur intérêt.

Au sein de l'Institut  $\partial$ 'Alembert, je remercie François Ollivier pour m'avoir introduite au système d'analyse modale du campus de Saint Cyr. Je remercie aussi Thibaut Meurisse, avec lequel les prémisses de l'analyse modale par holographie temps-réel sur le gong ont été enthousiasmantes!

A l'IRCAM, je remercie chaleureusement Thomas Hélie, le nouveau directeur de l'équipe S3AM, pour son intéressant point de vue énergétique sur les systèmes physiques, qui a grandement contribué à établir des perspectives intéressantes à ce travail. Merci également à David Roze, avec lequel ça a été un plaisir de travailler à l'aube des échéances d'une certaine conférence écossaise... Merci enfin à toutes les personnes de l'équipe S3AM, en particulier Robert pour l'aide sur COALA.

Les thèses expérimentales ne seraient rien sans les techniciens et ingénieurs qui les rendent possibles : merci au méticuleux Alain Terrier pour la mise en place du dispositif de frappe

reproductible. Merci à Arnaud Recher, Camille Dianoux (enfin une femme !) pour leur gentillesse et leur (très) grande disponibilité et efficacité dans les manips les plus improvisées en chambre anéchoïque... ou en fin de thèse. Merci aussi à Dominique Busquet et à tout le personnel technique de Saint-Cyr.

Un grand merci également à toutes les personnes ayant apporté une pierre à cette thèse, par l'intermédiaire de discussions ou de véritables échanges : Bertrand David pour le traitement du signal, Sébastien Neukirch, Brian Katz pour la relecture d'article, Stéphane Vaiedelich, Joel Bensoam, Hervé Guillon, et Nicolas Obin. Merci à toutes les personnes avec lesquelles j'ai pu échanger scientifiquement pendant ces trois années. Merci enfin aux administrateur-trice-s des deux laboratoires qui m'ont accueillie : Olivier, Simona Violette, Carole et Sylvie, à l'efficacité redoutable.

L'une des expériences les plus enrichissantes qui m'a été offerte dans cette thèse est sans nul doute l'enseignement des travaux pratiques et travaux dirigés de mécanique et d'acoustique. Merci à Tony Valier-Brasier, Régis Wunenburger, Régis Marchiano, de m'avoir accordé leur confiance pour ces enseignements. Un petit salut aux collègues du Montparnasse 7h54 qui pique les yeux : Raph, Asma et Mehdi.

Il est difficile de poursuivre ces remerciements sans passer par les collègues de l'IRCAM et de *∂*Alembert. Qui dit cotutelle dit deux fois plus de collègues, mais aussi parfois une intégration plus complexe, étant donné mes incessants aller-retours. Côté *∂*Alembert, merci aux co-bureaux du 317B : Paul, Gauthier, Arthur et Bruno. J'ai l'impression de vous avoir véritablement découvert en troisième année, certains par un tardif bain de minuit, mais il n'est jamais trop tard hé ! Une pensée également pour les co-bureaux envolés "trop tôt" : Etienne, Vincent et Alessio. Merci à Raphaël, l'attaché comm'-presse-technique du labo, merci à Nicolas pour avoir enfilé avec moi la casquette de réalisateur-éclairagiste-cameraman le temps d'une après midi avec la caméra ultra-rapide (efficacité au top !). Merci aux collègues buveurs indéfectibles : Thomas, Barend, Hugo, et toute l'équipe de d'Alembière. Même avec mon taux de présence de 2% aux réunions d'alembièretiennes et une consommation de 100% en cocktails, d'Alembière va me manquer. Côté IRCAM, merci à mon unique co-bureau du sous-marin A27, Tristan, pour avoir enduré la solitude du sous-sol avec moi : vole vers la lumière désormais, elle t'attend. Merci aux nombreux-ses stagiaires qui sont passé-e-s par l'équipe : le jovial Hugo, la souriante Aude, et Marc, le fier descendant du A27. Merci également à tous les collègues thésards-croisés-à-la-pause : Clément, Pierre, Mattia, Lise, Marine, Luc et j'en oublie ; une pensée particulière pour Camille et nos féministeries communes.

Une thèse ne serait rien sans la présence des copains-copines qui rendent la vie en dehors du labo si chouette. Merci à la team de l'ENS, qui a été d'un soutien indéfectible jusqu'à la fin : mes fantastiques Mathilde, Aicha, Jessica et Charlotte. La Touffe Transatlantique a de beaux jours devant elle : je vous aime. Merci à ma Touffe Gauchiste et Féministe de Toujours : Dilan, Véra, Anh Dao, Guillemette et Myriam ; nos retrouvailles mensuelles ont été un anti-dépresseur radical dans les moments difficiles. J'ai hâte de passer au rythme bi-mensuel ! Une spéciale dédicasse à Jojo, mon coloc de toujours, toujours enclin à cuisiner des pâtisseries géantes et légères (non) pour mes nuits les plus studieuses : Montrouge style fever forever. Merci aussi à tou-te-s celles et ceux que je connais depuis si longtemps, que j'ai vu moins souvent dans les derniers mois, mais que je n'oublie pas et espère voir plus souvent : Daphné (bientôt la com' !), toute la team du KB pourvoyeuse de bonne bouffe, Maxou, Richard, Alexis, Baptiste, Fiofio, Mylène, Anna et Vinz, Vincent, Axelle, Benjamin et Anne-Cécile. Merci aussi aux copains-copines de Solidaires Etudiant-e-s de Jussieu : même si je n'étais pas tout le temps là, vous rencontrer a été décisif, et les gazages en manif presque doux à vos côtés !

Enfin, merci à ma famille, pour le soutien continu qu'elle m'a apporté durant ces trois années, et même auparavant. Merci à mes parents pour la relecture attentive de cette thèse, dans des délais exemplaires. Merci à ma mère pour ses corrections importantes mais salvatrices de dernière minute, et à mon père pour les conseils philosophiques de vie. Merci à mes beaux parents, Laurent et Nathalie, pour leur soutien, et à mes frères et sœurs que j'aime : Alfred mon geek lillois, Félicie ma sœur si intelligente, Martin mon autodidacte perspicace préféré et Antoine, mon nouveau champion de ping-pong mondial.

Pour finir, cette thèse n'aurait pas été la même sans Hervé, koala pêcheur d'hippocampes dans la tempête et relecteur officiel incroyable, dont le soutien totalement inconditionnel et les maximes de coaching resteront gravés en moi encore pour longtemps. Ma reconnaissance pour ces trois années traversées si vite n'a pas de limites.

---



## Résumé

A l'interface de l'automatique, de la mécanique et de l'acoustique musicale, le contrôle des instruments de musique s'emploie à développer des méthodes permettant de contrôler, en temps réel, leur son acoustique. Les contrôleurs utilisés dans ce domaine s'appuient sur des modèles linéaires ne prenant pas en compte les non-linéarités présentes dans le comportement de certains instruments. Les gongs d'opéra chinois présentent ainsi plusieurs phénomènes induits par des non-linéarités géométriques, dont un très caractéristique glissement fréquentiel qui impacte plusieurs de leurs modes de vibration. Le présent travail propose d'initier la mise en place d'un contrôle de ces instruments par le biais de trois étapes consécutives.

Dans un premier temps, les performances et limites du contrôle modal moderne vis-à-vis des phénomènes non linéaires présents dans le comportement de l'instrument (distorsion harmonique, glissement fréquentiel, résonances internes) sont étudiées et quantifiées.

Les limitations mises en évidence précédemment motivent, dans un second temps, le développement d'un modèle d'ordre réduit décrivant le mode fondamental de l'instrument. Ce mode fondamental est caractérisé et identifié expérimentalement par une méthode récente utilisant une boucle à verrouillage de phase.

Enfin, les limites de l'approximation uni-modale pour la description du mode fondamental de l'instrument en situation de jeu sont étudiées. L'interaction entre les résonances internes et le phénomène de glissement fréquentiel est démontrée en régime libre, ouvrant la voie vers le développement d'un modèle réduit pour décrire le comportement du mode fondamental du gong.

**Mots-clés** : contrôle actif modal, non-linéarités géométriques, percussions, résonances internes, asservissement en phase, gong.



## Abstract

At a crossroads between automatics, mechanics and musical acoustics, active control of musical instruments aims at finding methods which would allow to control their acoustic sound in real time. Previous instrumental control studies never acknowledged nonlinear behaviours in musical instruments. However, Chinese opera gongs show various phenomena due to geometrical nonlinearities, among which a specific pitch glide, impacting several of its vibration modes. We propose to address the control of these instruments by reaching three consecutive steps.

First, the performances and the limits of modern modal control regarding nonlinear phenomena in the behavior of the gong (harmonic distortion, internal resonances, pitch glide) are highlighted and quantified.

The limitations of modal control suggests the development of a reduced order model describing the fundamental mode of the instrument. The nonlinear mode associated with the fundamental mode is characterized and identified experimentally by a method resorting to a Phase Locked Loop (PLL).

Finally, the limits of the unimodal approximation describing the fundamental mode in playing condition are highlighted. The interaction between internal resonances and pitch glide phenomena is demonstrated experimentally in free vibration, allowing for the developing of a reduced order model to describe the fundamental mode of the instrument.

**Keywords** : Modal active control, geometrical nonlinearities, percussions, internal resonances, phase-locked loop, gong.



## Publications

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont reliés aux publications suivantes :

### Revue internationale avec comité de lecture

- [R1] **M. Jossic**, A. Mamou-Mani, B. Chomette, D. Roze, F. Ollivier, C. Josserand, "*Modal active control of chinese gongs*", Journal of the Acoustical Society of America, 141 (6), 4567-4578, 2017 (**Publié**).
- [R2] **M. Jossic**, V. Denis, B. Chomette, O. Thomas, A. Mamou-Mani, D. Roze, "*Effects of internal resonances in the pitch glide of chinese gongs*", Journal of the Acoustical Society of America (**en préparation**).
- [R3] V. Denis, **M. Jossic**, C. Giraud-Audine, B. Chomette, A. Renault, O. Thomas, "*Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation*", Mechanical Systems and Signal Processing (**in review**).

### Conférences nationales et internationales avec comité de lecture

- [C1] **M. Jossic**, D. Roze, T. Hélie, B. Chomette, A. Mamou-Mani, "*Energy shaping of a softening Duffing oscillator using the formalism of Port-Hamiltonian Systems*", 20th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-17), Sep 2017, Edinburgh, United Kingdom.
- [C2] **M. Jossic**, V. Denis, O. Thomas, A. Mamou-Mani, B. Chomette, D. Roze, "*Active control of Chinese gongs*", Acoustics '17, Jun 2017, Boston, United States, 141 (5), 3619-3620.
- [C3] V. Denis, **M. Jossic**, A. Renault, C. Giraud-Audine, O. Thomas, "*Robust measurement of backbone curves of a nonlinear piezoelectric beam*", ENOC 2017, June 25-30, 2017, Budapest, Hungary.
- [C4] **M. Jossic**, B. Chomette, A. Mamou-Mani, D. Roze, "*Application du contrôle actif sur un gong d'opéra chinois*", 13e Congrès Français d'Acoustique (CFA 2016), Apr 2016, Le Mans, France. Actes du 13e Congrès Français d'Acoustique, 1042-1047.

Les publications [R3] et [C1] sont reproduites en Annexes [D](#) et [E](#) de ce manuscrit.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>xv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xxv</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte scientifique et musical	2
1.1.1 Innovation technologique et création musicale	2
1.1.2 Contrôle actif d'instruments de musique : un exemple d'innovation en lutherie contemporaine	3
1.2 Cadre de l'étude	5
1.3 État de l'art : gongs, non-linéarités et méthodes d'identification	6
1.3.1 Gongs : organologie et non-linéarités géométriques	6
1.3.2 Dynamique non linéaire des gongs	9
1.3.3 Identification de systèmes non linéaires	12
1.4 Objectifs de l'étude	15
1.5 Plan du manuscrit	16
<b>2 Le gong d'opéra chinois <i>xiaoluo</i></b>	<b>19</b>
2.1 Caractérisation géométrique et mécanique du gong <i>xiaoluo</i>	20
2.1.1 Caractéristiques géométriques	20
2.1.2 Caractéristiques mécaniques	22
2.2 Analyse modale	22
2.3 Non-linéarités géométriques dans les structures minces	32
2.3.1 Équations du mouvement	32
2.3.2 Adimensionnement	34
2.3.3 Projection modale	35
2.3.4 Phénomènes non linéaires	35
2.3.4.1 Régime uni-modal libre : distorsion harmonique et glissement fréquentiel	36
2.3.4.2 Régime uni-modal forcé	38
2.3.4.3 Résonances internes	39
2.4 Expériences en régime de jeu	40
2.4.1 Dispositif expérimental	40
2.4.2 Influence de la force d'impact sur les non-linéarités géométriques	41
2.4.3 Influence de la localisation de l'excitation sur les non-linéarités géométriques	45
2.5 Conclusion	47

<b>3</b>	<b>Contrôle modal et non-linéarités géométriques</b>	<b>49</b>
3.1	Cadre théorique du contrôle actif modal . . . . .	50
3.1.1	Contrôle par rétroaction . . . . .	50
3.1.1.1	Contrôle par retour d'état dans la base physique . . . . .	51
3.1.1.2	Contrôle par retour d'état dans la base modale . . . . .	51
3.1.2	Formulation modale . . . . .	53
3.1.2.1	Problème conservatif et base modale . . . . .	53
3.1.2.2	Ajout de l'amortissement . . . . .	55
3.1.3	Formulation dans l'espace d'état : système en boucle ouverte . . . . .	55
3.1.4	Ajout du système de contrôle : système en boucle fermée . . . . .	57
3.1.4.1	Contrôleur et observateur . . . . .	57
3.1.4.2	Calcul des gains de contrôle et d'observation . . . . .	58
3.1.5	Identification du système : Méthode Rational Fraction Polynomial (RFP) . . . . .	59
3.1.5.1	Identification sous la forme de polynômes orthogonaux . . . . .	59
3.1.5.2	Détermination des paramètres modaux . . . . .	60
3.1.6	Synthèse . . . . .	62
3.2	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	62
3.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	63
3.2.1.1	Instrumentation . . . . .	63
3.2.1.2	Contrôleur COALA . . . . .	64
3.2.1.3	Éléments du dispositif . . . . .	65
3.2.2	Identification modale . . . . .	66
3.2.3	Protocole de l'étude . . . . .	70
3.3	Résultats . . . . .	70
3.3.1	Performances du contrôle actif modal . . . . .	71
3.3.1.1	Résultats expérimentaux . . . . .	71
3.3.1.2	Comparaison avec la simulation . . . . .	73
3.3.2	Effets du contrôle modal sur la distorsion harmonique et les résonances internes . . . . .	74
3.3.3	Effets du contrôle modal sur le glissement fréquentiel . . . . .	77
3.3.3.1	Étude qualitative des performances . . . . .	77
3.3.3.2	Étude quantitative des performances . . . . .	77
3.4	Discussion des résultats . . . . .	83
3.5	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Identification du mode non linéaire fondamental</b>	<b>87</b>
4.1	Modes non linéaires (MNL) . . . . .	88
4.1.1	Concept et définitions historiques . . . . .	89
4.1.2	Méthodes analytiques pour le calcul des MNL . . . . .	90
4.1.2.1	Mise sous forme normale . . . . .	91
4.1.2.2	Réduction au mode non linéaire fondamental . . . . .	92
4.1.2.3	Remarques importantes . . . . .	93
4.1.3	Méthodes numériques pour le calcul des MNL . . . . .	93
4.1.4	Méthodes d'identification des MNL . . . . .	94
4.2	Identification expérimentale du MNL fondamental . . . . .	96
4.2.1	Caractérisation théorique du MNL fondamental . . . . .	96
4.2.1.1	Équation dynamique . . . . .	96
4.2.1.2	Relation amplitude-fréquence ( <i>backbone curve</i> ) . . . . .	96
4.2.1.3	Caractérisation par un oscillateur de Duffing équivalent . . . . .	97

4.2.2	Principe de la boucle à verrouillage de phase (BVP)	98
4.2.2.1	Fonctionnement général	98
4.2.2.2	Résonance de phase	100
4.2.3	Mise en oeuvre de la BVP	101
4.2.4	Deux applications de la BVP	105
4.2.4.1	Mesure de <i>backbone curve</i> ( $\Phi_{ref}$ constante, $F$ variable)	105
4.2.4.2	Mesure de courbes de résonances ( $\Phi_{ref}$ variable, $F$ constante)	105
4.2.5	Évaluation de la BVP par une méthode de mesure alternative	106
4.2.6	Résultats	108
4.2.6.1	Identification du coefficient $\Gamma_0$	109
4.2.6.2	Évaluation de la BVP	110
4.2.7	Discussion	112
4.2.7.1	Identification de $\Gamma_0$	112
4.2.7.2	Influence de la position de l'aimant	112
4.2.7.3	Effets thermiques	112
4.2.7.4	Ordre de grandeur du déplacement	114
4.3	Conclusion	116
<b>5</b>	<b>Influence des résonances internes sur le glissement fréquentiel en situation de jeu</b>	<b>119</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>137</b>
6.1	Contributions et résultats obtenus	137
6.2	Perspectives	139
	<b>Annexe A Quelques détails d'analyse modale</b>	<b>147</b>
A.1	Déformées opérationnelles non identifiées	147
A.2	Influence de l'instrumentation du gong sur les déformées opérationnelles	147
	<b>Annexe B Contrôle optimal</b>	<b>151</b>
	<b>Annexe C Schéma SIMULINK de la boucle à verrouillage de phase</b>	<b>153</b>
	<b>Annexe D Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation</b>	<b>157</b>
	<b>Annexe E Energy shaping of a softening Duffing oscillator</b>	<b>185</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>



# Table des figures

1.1	Principe général du contrôle actif d'une structure soumise à une perturbation. . .	3
1.2	Exemples de profils de gongs. (a) Gong bulbé (bonang et kenong) (b) Gongs d'opéra chinois (c) Tam-tam chinois (d'après [Thomas 2001]). Les dimensions sont indicatives et peuvent varier d'un instrument à l'autre. . . . .	7
1.3	Exemple de gong bulbé et d'ensembles musicaux le faisant intervenir. (a) Gong bulbé <i>kenong</i> (b) Ensemble <i>kulintang</i> (c) Ensemble <i>piphat</i> (d) Ensemble du <i>gamelan javanais</i> . . . . .	8
1.4	Gongs d'opéra chinois. (a) Situation de jeu (b) Gongs <i>daluo</i> (gauche) et <i>xiaoluo</i> (droite) . . . . .	9
1.5	Tam-tam chinois . . . . .	9
1.6	Spectrogrammes du son des trois catégories de gongs, obtenus en régime libre, et tirés de la littérature. Plusieurs degrés de non-linéarités apparaissent. (a) Son de gong balinais d'un gamelan (d'après [Krueger et al. 2010]) : battements fréquentiels dus à la présence de distorsion harmonique (b) Son de gong chinois <i>xiaoluo</i> (d'après [Jossic et al. 2017]) : présence de glissement fréquentiel (dépendance de la fréquence vis-à-vis du temps) (c) Son de tam-tam (d'après [Thomas 2001]) : comportement chaotique avec cascade des basses fréquences vers les hautes fréquences. . . . .	11
1.7	Exemple d'un système à 2 degrés de liberté (DDL), dont la dynamique est représentée dans l'espace des phases (d'après [Touzé 2014], où on peut trouver la valeur des paramètres du problème). (a) Système à 2 DDL. (b) Trajectoire du système pour un mouvement initié sur le premier mode <i>linéaire</i> (l'autre mode a une condition initiale nulle). Aux grandes amplitudes de vibration, la trajectoire se détache du plan de phase correspondant au premier mode propre, ce qui illustre la perte d'invariance des modes propres dans le cas non linéaire. . . . .	12
1.8	Trajectoire du système de la Figure 1.7 pour un mouvement initié sur le premier mode <i>non linéaire</i> (d'après [Touzé 2014]). La trajectoire reste confinée sur le mode non linéaire (propriété d'invariance), qui présente une surface incurvée tangente à l'origine au sous-espace du premier mode propre. . . . .	13
2.1	Spectrogrammes de deux enregistrements sonores du gong <i>xiaoluo</i> obtenus en frappant l'instrument avec une mailloche en feutre. (a) Son du gong après une frappe faible. (b) Son du gong après une frappe forte. . . . .	20
2.2	Géométrie du gong <i>xiaoluo</i> . (a) Dimensions du gong et numérotation des différentes parties. (b) Photographie de l'instrument vu de face. (c) Photographie de l'instrument vu de derrière. (d) Photographie de l'instrument vu de la tranche. . .	21

2.3	Accélérateur Grand Louvre d'Analyses Élémentaires (AGLAE) pour l'analyse chimique par émission de rayons X induite par particules chargées (PIXE) du gong <i>xiaoluo</i> . (a) Vue globale du système. Le gong analysé est situé dans la moitié inférieure de l'image, tout à gauche. (b) Zoom sur le gong analysé. . . . .	22
2.4	Dispositif pour l'analyse modale du gong <i>xiaoluo</i> . . . . .	23
2.5	Photo du montage d'excitation pour l'analyse modale. . . . .	24
2.6	Quadrillage spatial balayé par le vibromètre laser pour l'analyse modale du gong <i>xiaoluo</i> . La position du marteau d'impact est indiquée en rouge. . . . .	24
2.7	Moyennes spatiales $H_{moy}$ des fonctions de transfert entre le vibromètre et le marteau obtenues avec la DSP et la TFD. Ces deux fonctions de transfert sont moyennées sur les 429 points de la Figure 2.6. . . . .	26
2.8	Déformées opérationnelles expérimentales, et déformées modales par éléments finis obtenues avec CASTEM. Les fréquences sont notées $f_{(k,n)}$ où $k$ est le nombre de diamètres nodaux et $n$ le nombre de cercles nodaux. Une seule déformée CASTEM est représentée pour les modes asymétriques. . . . .	27
2.9	Suite de la Figure 2.8 . . . . .	28
2.10	Suite des Figures 2.8 et 2.9 . . . . .	29
2.11	Moyenne spatiale $H_{moy}$ des fonctions de transfert entre le vibromètre et le marteau, obtenues avec la DSP. Chaque pic correspond à une déformée modale $(k, n)$ . Les pics non identifiés sont marqués d'un point d'interrogation. . . . .	31
2.12	Schéma et dimensions du gong vue de profil ainsi que de la coque de révolution équivalente considérée dans cette étude pour le modéliser. . . . .	33
2.13	Courbes de résonances non linéaires, obtenues en traçant l'amplitude $a$ en fonction du désaccord $\sigma$ liés par la relation (2.22). Paramètres de l'oscillateur : $\xi = 3 \cdot 10^{-3}$ , $\omega_0 = 2\pi \cdot 451$ , $Q = [1000 \ 6000 \ 11000 \ 17000 \ 21000]$ . (a) $(\beta, \Gamma) = (0, 0)$ . (b) $(\beta, \Gamma) = (0, -6 \cdot 10^6)$ . (c) Courbes de résonances du système défini en (b) et <i>backbone curve</i> correspondante (en rouge). (d) Phénomènes de saut et d'hystérésis expérimentaux lors de la mesure de courbes de résonances non linéaires. Les courbes en traits pleins représentent les solutions stables, et la courbe en pointillés la solution instable. La courbe bleue correspond à la solution du régime permanent quand la fréquence de forçage est diminuée pas à pas, tandis que la courbe rouge correspond à cette même solution quand la fréquence de forçage est incrémentée pas à pas. . . . .	39
2.14	Dispositif expérimental. . . . .	41
2.15	Système de frappe reproductible monté à l'IRCAM. . . . .	42
2.16	Localisation de l'excitation et de la mesure de l'accélération du gong. (a) Position de l'accéléromètre, à l'arrière de l'instrument. (b) Positions numérotées de l'impact de la mailloche pour la deuxième expérience (section 2.4.3). . . . .	42
2.17	Spectrogrammes du signal de l'accéléromètre collé au gong (gauche) et de l'enregistrement sonore correspondant (droite) pour des forces croissantes de frappe $f$ . Dans (a), les astérisques rouge, orange et jaune indiquent respectivement le mode fondamental (450 Hz), sa distorsion harmonique d'ordre 2 (900 Hz) et d'ordre 3 (1350 Hz). . . . .	43
2.18	Suite de la Figure 2.17. . . . .	44
2.19	Spectrogrammes du signal de l'accéléromètre collé au gong pour différentes localisations de frappe avec la mailloche en feutre (voir Figure 2.16b), et un même angle de frappe correspondant à une force d'impact $f \simeq 6.2$ N. . . . .	46
3.1	Schéma général d'un contrôle par rétroaction. . . . .	51
3.2	Schéma général d'un contrôle modal. . . . .	52

3.3	Schéma du système en boucle fermée. . . . .	58
3.4	Synthèse des étapes pour l'élaboration d'un contrôle modal. . . . .	62
3.5	Position (a) du capteur et (b) de l'actionneur utilisés pour le dispositif de contrôle expérimental. . . . .	63
3.6	Système COALA. (a) Intérieur du boîtier avec la carte BeagleBoard et la chaîne d'acquisition (b) Boîtier extérieur. . . . .	64
3.7	Dispositif expérimental et étapes du contrôle modal expérimental. . . . .	65
3.8	Fonction de transfert expérimentale obtenue avec le capteur et l'actionneur positionnés comme indiqué sur la Figure 3.5. (a) Module de la fonction de transfert. (b) Phase de la fonction de transfert. . . . .	67
3.9	Fonction de transfert expérimentale et fonctions de transfert en boucle ouverte $H_{BO}$ pour différentes valeurs du nombre de modes identifiés dans l'algorithme RFP. (a) Amplitude de la fonction de transfert. (b) Phase de la fonction de transfert. Les légendes sont identiques en (a) et en (b). . . . .	68
3.10	Fonction de transfert expérimentale et fonction de transfert issue de l'identification pour le protocole de contrôle. Quinze modes ont été pris en compte. (a) Amplitude des fonctions de transfert. (b) Phase des fonctions de transfert. . . . .	69
3.11	Amplitude des fonctions de transfert expérimentales pour les différentes configurations de contrôle. (a) Fonctions de transferts sur toute la bande d'excitation. (b) Zoom autour du mode fondamental. . . . .	72
3.12	Enveloppes des signaux capteurs enregistrés après une frappe mailloche (angle : $20^\circ$ ) pour les 11 configurations de contrôle. (a) Enveloppes en volts. (b) Enveloppes en dB à partir desquelles est déterminé l'amortissement du système. Les légendes sont les mêmes que sur la Figure 3.11. . . . .	73
3.13	Amplitude des fonctions de transfert issues de la simulation Simulink avec excitation en balayage sinus (80-2000 Hz). La légende est la même que sur la Figure 3.8. . . . .	74
3.14	FFT du signal enregistré au capteur avec une excitation mailloche en faible amplitude (angle : $20^\circ$ ), pour les configurations de contrôle répertoriées dans la Table 3.3. (a) FFT sur toute la bande de fréquences 0-2000 Hz. Les zones grisées indiquent les zones d'intérêt représentées en (b), (c) et (d). (b) FFT du pic à 449 Hz. (c) FFT du pic à 898 Hz. (d) FFT des pics à 1261 Hz et 1272 Hz. . . . .	75
3.15	Identification des modes impliqués dans des résonances internes 1:1:1 avec le mode fondamental contrôlé. Les modes présentant une relation de résonance interne sont désignés par leur déformée modale et entourés d'un cercle de même couleur (rose ou vert) - le mode fondamental participe ainsi à deux résonances internes différentes. Les zones grisées correspondent aux bandes fréquentielles impactées par le contrôle. . . . .	76
3.16	Décroissance de l'amplitude du pic du fondamental (noir) et celle des pics fréquentiels contrôlés observés Figure 3.14 (b), (c) et (d) (gris), en fonction de la configuration de contrôle. (a) Pic à 898 Hz. (b) Pic à 1261 Hz. (c) Pic à 1272 Hz. . . . .	76
3.17	Spectrogramme du son émis par l'instrument pour un angle de frappe de $63^\circ$ , dans la cas d'une configuration (a) sans contrôle (b) de contrôle de +200% en amortissement. . . . .	78
3.18	Evolution de la fréquence instantanée en fonction du temps du mode fondamental, extraite à partir des enregistrements du son de l'instrument pour les 11 configurations de contrôle et un même angle de frappe de $63^\circ$ . Les légendes sont identiques à la Fig. 3.11. . . . .	79

3.19	Enveloppes de l'amplitude du signal du capteur filtré autour du mode fondamental pour les 11 configurations de contrôle, et pour deux angles de frappe : (a) Angle de frappe de $40^\circ$ . (b) Angle de frappe de $27^\circ$ . Les légendes sont identiques à celles de la Figure 3.11. . . . .	80
3.20	Signaux temporels filtrés du capteur, commande envoyée par l'actionneur, et fréquence instantanée du mode fondamental pour différents angle d'impact et configurations de contrôle. La configuration sans contrôle ( $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ) et contrôlée ( $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ ) sont indiquées respectivement en noir et en gris. Une ligne verticale en tirets rouges indique le moment où la commande est maximale et où le contrôle se déclenche véritablement. (a) Angle de frappe : $46^\circ$ , configuration de contrôle : +50%. (b) Angle de frappe : $46^\circ$ , configuration de contrôle : +150%. (c) Angle de frappe : $63^\circ$ , configuration de contrôle : +50%. (d) Angle de frappe : $63^\circ$ , configuration de contrôle : +150%. . . . .	81
3.21	Fréquence instantanée du signal au capteur au moment où le contrôle est effectif (voir ligne rouge sur la Figure 3.20), pour différents angles d'impacts (en rouge). La fréquence du mode contrôlé est représentée en pointillés noir en haut de la figure. . . . .	82
4.1	Relation amplitude-phase-fréquence pour un oscillateur de Duffing assouplissant (rouge)-, linéaire (noir)-, et raidissant (bleu). Le facteur d'amortissement n'est pas le même pour les trois oscillateurs. Les zones instables sont indiquées en pointillés (d'après [Mojrzisch and Twiefel 2015]). . . . .	95
4.2	Courbes de résonances non linéaires : amplitude $a_1$ de la première harmonique du MNL (4.5) en fonction de la fréquence de forçage $\Omega$ définie dans un forçage $Q(t) = F \cos(\Omega t)$ . Dix valeurs différentes du couple $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ vérifiant $\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 \omega_0^2}{3} = \Gamma_0 = 1$ sont étudiées. Les valeurs des paramètres sont : $\xi = 0.013$ , $\omega_0 = 2\pi \cdot 450$ . Les courbes sont calculées avec la méthode HBM/ANM de MANLAB. . . . .	99
4.3	Schéma des différents composants de la boucle à verrouillage de phase. Les paramètres de contrôle choisis par l'utilisateur (force d'excitation $F$ et déphasage imposé $\phi_{ref}$ ) sont indiqués en bleu. . . . .	100
4.4	Principe de la démodulation synchrone d'un signal $v = A \cos(\omega t + \Phi)$ . . . . .	100
4.5	Schéma du dispositif expérimental pour la boucle à verrouillage de phase (BVP). . . . .	102
4.6	Schéma du système d'excitation constitué de la bobine et de l'aimant. Les dimensions sont en millimètres. La position optimale pour l'aimant correspond à $d \sim 0$ . Gauche : vue de profil. Droite : vue de face. Figure modifiée d'après [Thomas 2001]. . . . .	103
4.7	Photo du gong et de l'aimant, placé décentré sur la partie centrale. . . . .	103
4.8	Photos du dispositif décrit Figure 4.5. (a) Dispositif global. (b) Système d'excitation bobine-aimant. . . . .	104
4.9	Exemple de mesure de <i>backbone curve</i> du mode non linéaire fondamental avec le système de la boucle à verrouillage de phase. (a) Amplitude de forçage en fonction du temps. (b) Fréquence de forçage en fonction du temps. (c) Amplitude de la première harmonique du mode non- linéaire fondamental en fonction de la fréquence de forçage. . . . .	106
4.10	Courbes de résonances non linéaires mesurées avec la boucle à verrouillage de phase, en modifiant pas à pas la commande $\phi_{ref}$ entre 0 et $\pi$ . (a) Amplitude de la première harmonique du mode non linéaire fondamental en fonction de la fréquence de forçage. (b) Phase de la première harmonique du mode non linéaire fondamental en fonction de la fréquence. (c) Amplitude de la première harmonique du mode non linéaire fondamental en fonction de sa phase. . . . .	107

4.11	Schéma du dispositif expérimental pour la mesure des courbes de résonance non linéaires. . . . .	108
4.12	<i>Backbone curves</i> du mode fondamental obtenues pour 4 mesures avec la boucle à verrouillage de phase. Les données expérimentales sont indiquées en traits pleins. Pour chacune d'elles, l'ajustement avec le polynôme d'ordre 2 est représenté en tirets. . . . .	109
4.13	Exemple de <i>backbone curve</i> du mode fondamental (en rouge) obtenue à partir du maximum de 11 courbes de résonances à différentes amplitudes (en nuances de bleu). . . . .	110
4.14	<i>Backbone curves</i> du mode fondamental obtenues à partir de 3 mesures de ses courbes de résonances à différentes amplitudes. Les mesures sont montrées en traits pleins. Pour chacune d'elles, l'ajustement avec le polynôme d'ordre 2 est représenté en tirets. . . . .	111
4.15	<i>Backbone curves</i> obtenues avec la boucle à verrouillage de phase (en rouge, voir aussi Figure 4.12), et avec la méthode des courbes de résonance (en rose, voir aussi Figure 4.14). . . . .	111
4.17	Différentes positions de l'aimant testées pour les expérimentations. (a) aimant au centre (b) aimant décentré (c) aimant sur la couronne. . . . .	113
4.19	Courbes de résonances non linéaires obtenues en faisant diminuer progressivement la fréquence de forçage (courbes bleues) ou en la faisant augmenter (courbes rouges). De gauche à droite et de haut en bas, l'amplitude de forçage augmente. . . . .	115
6.1	Énergie potentielle $H_{pot}$ associée à l'équation (6.1). Les points bleus désignent les points d'équilibre instables du système et les zones en rouge les zones non physiques qui leur sont associées. . . . .	140
6.2	Énergie $H_{pot2}$ associée au système (6.2). Le plan horizontal rouge représente le plan $H_{pot2} = 0$ . . . . .	141
6.3	Fréquence redimensionnée, en régime libre, en fonction de l'amplitude $R$ . Les points bleus désignent les points d'équilibre instables du système et les zones en rouge les zones non physiques qui leur sont associées. La courbe rouge correspond à la zone dynamique du mode non linéaire fondamental du gong <i>xiaohuo</i> . . . . .	142
6.4	Énergie potentielle $H_{pot}^*$ (vert) comparée à l'énergie potentielle $H_{pot}$ non inférieurement bornée (noir) et au régime de vibration du gong (rouge). . . . .	142
6.5	Méthodes employées, objectifs atteints et perspectives de ce travail. . . . .	144
A.1	Déformées opérationnelles ne correspondant à aucune déformée issue du calcul éléments finis. . . . .	147
A.2	Déformées opérationnelles du gong <i>xiaohuo</i> sans capteur ni actionneur (gong non instrumenté), et avec capteur et actionneur (gong instrumenté). . . . .	148
A.3	Suite de la Figure A.2. . . . .	149
C.1	Schéma SIMULINK global pour la boucle à verrouillage de phase. . . . .	154
C.2	Détail des blocs simulink Desync de la Figure C.1. . . . .	155



# Liste des tableaux

2.1	Récapitulatif des dénominations accordées aux déformées opérationnelles, et de la notation $(k, n)$ correspondante. . . . .	30
2.2	Références des éléments du dispositif expérimental de la Figure 2.14. . . . .	41
3.1	Références des différents éléments de la chaîne de mesure. . . . .	66
3.2	Fréquences et taux d'amortissement identifiés par l'algorithme RFP pour les premiers modes de vibration. . . . .	70
3.3	Amortissements cibles et amortissements expérimentaux atteints par le système en boucle fermée pour les 11 configurations de contrôle. L'écart-type correspond à celui de la régression linéaire. . . . .	71
3.4	Amortissements cibles et amortissements atteints par le système en boucle fermée simulé pour les 11 configurations de contrôle. . . . .	74
4.1	Références pour les différents éléments du dispositif expérimental de la Figure 4.5. . . . .	105
4.2	Valeurs de la fréquence propre et du paramètre non linéaire $\Gamma_0$ identifiés sur les <i>backbone curves</i> représentées Figure 4.12. . . . .	109
4.3	Valeurs de la fréquence propre et du paramètre non linéaire $\Gamma_0$ identifiés sur les <i>backbone curves</i> de la Figure 4.14. . . . .	110
4.4	Valeurs de la fréquence propre et du paramètre non linéaire $\Gamma_0$ identifiés sur les <i>backbone curves</i> de la Figure 4.16. . . . .	112



# Liste des abréviations

AGLAE	Accélérateur Grand Louvre d'Analyses Elémentaires
ARMAX	AutoRegressive-Moving-Average model with eXogenous inputs
C2RMF	Centre de Recherche et de Restauration des Musées de France
DDL	Degré(s) de liberté
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DKT	<i>Discrete Kirchhoff Triangular</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRF	Fonction de Réponse en Fréquence
HBM	<i>Harmonic Balance Method</i>
IRCAM	Institut de Recherche Coordination Acoustique/Musique
LSCE	<i>Least Square Complex Exponentials</i>
LSCF	<i>Least Square Complex Frequencies</i>
MAN	Méthode Asymptotique Numérique
MFC	MicroFiber Composite
MNL	Modes Normaux non Linéaires
MIMO	<i>Multiple-Inputs-Multiple-Outputs</i>
NLRDM	<i>NonLinear Resonant Decay Method</i>
PIXE	<i>Particle-Induced X-ray Emission</i>
PID	Proportionnel-Intégral-Dérivé
RFP	Rational Fraction Polynomial
SISO	<i>Single-Input-Single-Output</i>
TFD	Transformée de Fourier Discrète



# Liste des symboles

## Chapitre 2

$d$	Distance du vibromètre au gong
$f_e$	Fréquence d'échantillonnage
$\Delta T$	Période d'échantillonnage
$m_i$	Signal du marteau précédant la mesure de la vitesse au point $i$ du maillage
$v_i$	Vitesse mesurée par le vibromètre au point $i$ du maillage
$H_i$	Fonction de transfert entre le signal du vibromètre $v_i$ et le signal du marteau $m_i$
$H_{moy}$	Fonction de transfert entre le vibromètre et le marteau moyennée sur tous les points du maillage spatial
$f_{(k,n)}$	Fréquence de la déformée opérationnelle présentant $k$ diamètres nodaux et $n$ cercles nodaux
$\rho$	Masse volumique
$E$	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$h$	Épaisseur de la coque sphérique
$R$	Rayon de courbure de la coque sphérique
$a_0$	Rayon de la coque sphérique
$w(r, \theta)$	Déplacement transverse de la coque sphérique aux coordonnées cylindriques $(r, \theta)$
$\ddot{w}$	Dérivée seconde par rapport au temps de $w(r, \theta)$
$t$	Variable temps
$\theta$	Angle de rotation de la normale par rapport au plan moyen de la coque
$D$	Rigidité en flexion
$\Delta$	Laplacien
$c$	Coefficient d'amortissement visqueux
$P$	Pression extérieure normale
$F$	Efforts de membrane
$w_0$	Coefficient d'adimensionnement pour le déplacement transverse $w$
$T_0$	Coefficient d'adimensionnement pour le temps $t$
$F_0$	Coefficient d'adimensionnement pour les efforts $F$
$p_0$	Coefficient d'adimensionnement pour la pression $P$
$c_0$	Coefficient d'adimensionnement pour l'amortissement $c$
$\epsilon_q$	Paramètre de non-linéarité quadratique
$\epsilon_c$	Paramètre de non-linéarité cubique

$(\Phi_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$	Modes propres transversaux
$(\Psi_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$	Modes propres longitudinaux
$(q_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$	Coordonnées temporelles (déplacements modaux) associées aux modes transverses $(\Phi_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$
$\omega_p$	Pulsation modale associée au mode $p$
$\xi_p$	Taux d'amortissement visqueux modal associé au mode $p$
$Q_p(t)$	Projection du forçage sur le mode propre $p$
$\beta_{ij}^p$	Coefficient de couplage quadratique entre les modes propres $i$ et $j$ dans l'équation du mode propre $p$
$\Gamma_{ijk}^p$	Coefficient de couplage cubique entre les modes propres $i, j$ et $k$ dans l'équation du mode propre $p$
$\omega_0$	Pulsation propre du mode $p = 1$
$\xi$	Taux d'amortissement du mode $p = 1$
$\beta$	Coefficient non linéaire quadratique du mode $p = 1$
$\Gamma$	Coefficient non linéaire cubique du mode $p = 1$
$q$	Déplacement temporel du mode $p = 1$
$\epsilon$	Petit paramètre de perturbation ( $\epsilon \ll 1$ )
$T_n = \epsilon^n t$	Échelle de temps à l'ordre $n$ en $\epsilon$
$D_n$	Dérivée partielle par rapport à $T_n$
$X$	Déplacement de l'oscillateur (échelles multiples)
$\dot{X}, \ddot{X}$	Dérivées première et seconde de $X$
$X_n$	Déplacement à l'ordre $n$ en $\epsilon$
$A$	Amplitude complexe du déplacement $X_0$
$a$	Module de $A$
$\Omega$	Pulsation de forçage
$Q$	Amplitude de forçage
$\sigma$	Désaccord fréquentiel entre $\Omega$ et $\omega_0$
$f$	Force d'impact de la mailloche

### Chapitre 3

$n$	Dimension du système (nombre de modes)
$(z_i)_{1 \leq i \leq n}$	Coordonnées généralisées
$z$	Vecteur des coordonnées généralisées
$\mathbf{K}$	Matrice de raideur
$\mathbf{M}$	Matrice de masse
$\mathbf{F}$	Vecteur des efforts généralisés
$(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$	Vecteur propre $i$
$\omega_i$	Pulsation propre associée au mode $i$
$\Phi$	Matrice de changement de base permettant de passer de l'espace physique à l'espace modal
$\mathbf{M}_m$	Matrice de masse modale
$\mathbf{K}_m$	Matrice de raideur modale
$w$	Perturbation temporelle appliquée au système
$\mathbf{\Pi}^w$	Matrice de perturbation
$\mathbf{\Omega}$	Matrice de pulsation
$\mathbf{C}$	Matrice d'amortissement
$\mathbf{\Xi}$	Matrice des taux d'amortissement

$\xi_i$	Taux d'amortissement associé au mode $i$
$\mathbf{q}$	Vecteur des déplacements modaux
$\dot{\mathbf{q}}$	Vecteur des vitesses modales
$\mathbf{0}_{k,n}$	Matrice nulle de taille $k \times n$
$\mathbb{I}_{n,n}$	Matrice identité de taille $n$
$\mathbf{x}$	Vecteur d'état
$\dot{\mathbf{x}}$	Vecteur d'état dérivé
$\mathbf{A}$	Matrice dynamique du système
$\mathbf{G}$	Matrice de perturbation du système
$y$	Réponse du système (SISO)
$\mathbf{B}$	Matrice capteur
$\mathbf{C}$	Matrice actionneur
$g_a$	Gain d'amplification de l'actionneur
$g_c$	Gain de conditionnement du capteur
$\mathbf{\Pi}^a$	Vecteur de couplage électromécanique de l'actionneur
$(\pi_i^a)_{1 \leq i \leq n}$	Composantes du vecteur $\mathbf{\Pi}^a$
$\mathbf{\Pi}^c$	Vecteur de couplage électromécanique du capteur
$(\pi_i^c)_{1 \leq i \leq n}$	Composantes du vecteur $\mathbf{\Pi}^c$
$u$	Commande (SISO)
$s$	Variable de Laplace
$\mathbf{X}$	Transformée de Laplace de $\mathbf{x}$
$Y$	Transformée de Laplace de $y$
$U$	Transformée de Laplace de $u$
$H_{BO}$	Fonction de transfert en boucle ouverte théorique
$H_{BF}$	Fonction de transfert en boucle fermée théorique
$a_i$	Amplitude modale associé au mode $i$
$\mathbf{K}$	Matrice de gain de contrôle
$\mathbf{L}$	Matrice de gain de l'observateur
$\hat{\mathbf{x}}$	Vecteur d'état estimé par l'observateur
$\hat{y}$	Réponse du système estimée par l'observateur
$\mathbf{A}_m$	Matrice dynamique identifiée pour l'observateur
$\mathbf{B}_m$	Matrice actionneur identifiée pour l'observateur
$\mathbf{C}_m$	Matrice capteur identifiée pour l'observateur
$h$	Erreur d'estimation de l'observateur
$P_c$	Polynôme caractéristique du système en boucle fermée
$H_{exp}$	Fonction de transfert expérimentale
$H_0$	Fonction de transfert rationnelle ajustée à $H_{exp}$
$\mathbf{E}$	Vecteur erreur de l'algorithme RFP
$N$	Ordre de l'identification
$(r_i)_{1 \leq i \leq N}$	Résidus de $H_0$
$(p_i)_{1 \leq i \leq N}$	Pôles de $H_0$
$(b_i)_{1 \leq i \leq N}$	Coefficients de $\mathbf{B}_m$
$(c_i)_{1 \leq i \leq N}$	Coefficients de $\mathbf{C}_m$

## Chapitre 4

$q_p$	Déplacement modal associé au mode $p$
$Q_p$	Excitation du système projetée sur le mode $p$
$\beta_{ij}^p$	Coefficient de couplage quadratique entre les modes propres $i$ et $j$ dans l'équation du mode propre $p$
$\Gamma_{ijk}^p$	Coefficient de couplage cubique entre les modes propres $i$ , $j$ et $k$ dans l'équation du mode propre $p$
$\epsilon_q$	Paramètre de non-linéarité quadratique
$\epsilon_c$	Paramètre de non-linéarité cubique
$(R_p, S_p)$	Coordonnées normales : (amplitude, vitesse) du mode non linéaire associé au mode $p$
$N_0$	Nombre de modes retenus dans la modélisation
$\omega_p$	Pulsation propre associée au mode $p$
$\xi_p$	Taux d'amortissement associé au mode $p$
$A_{ppp}^p, B_{ppp}^p$	Coefficients non linéaires cubiques du mode non linéaire $p$ prenant en compte les contributions des modes $j \neq p$
$C_{ppp}^p$	Coefficient d'amortissement non linéaire du mode non linéaire $p$ prenant en compte les contributions de l'amortissement des modes $j \neq p$
$\omega_0$	Pulsation propre du mode fondamental
$\xi$	Taux d'amortissement du mode fondamental
$\Gamma_1, \Gamma_2$	Coefficients non linéaires cubiques du mode non linéaire fondamental
$R$	Amplitude du mode non linéaire fondamental
$\dot{R}$	Dérivée temporelle de $R$
$Q$	Forçage appliqué au mode non linéaire fondamental
$\Omega$	Pulsation de forçage
$a_1$	Amplitude de la première composante harmonique de $R$
$a_3$	Amplitude de la composante de $R$ à la pulsation triple de la composante de $a_1$
$\omega_{NL}$	Pulsation de la première amplitude de $R$ en régime libre
$T_{p1}$	Coefficient non linéaire de la <i>backbone curve</i> du mode non linéaire fondamental
$\Gamma_0$	Coefficient cubique de l'oscillateur de Duffing caractérisant au premier ordre le mode non linéaire fondamental
$T_{duff}$	Coefficient non linéaire de la <i>backbone curve</i> de l'oscillateur de Duffing caractérisant au premier ordre le mode non linéaire fondamental
$\phi_{ref}$	Déphasage imposé par la boucle à verrouillage de phase
$\epsilon$	Petit paramètre de perturbation ( $\epsilon \ll 1$ )
$F_k$	Amplitude de l'harmonique $k$ du forçage $Q$
$F$	Amplitude de forçage mono-harmonique de la boucle à verrouillage de phase
$X$	Réponse du système contrôlé par la boucle à verrouillage (vitesse ou déplacement)
$\phi$	Déphasage entre forçage et réponse du système
$h$	Épaisseur de la coque
$a_0$	Rayon de la coque

## Chapitre 5

$w(\mathbf{x}, t)$	Déplacement transverse à la position $\mathbf{x}$ et au temps $t$
$K$	Dimension du problème (nombre de modes)
$(\Phi_p)_{1 \leq i \leq K}$	Déformées modales
$(\omega_p)_{1 \leq i \leq K}$	Pulsations propres
$(q_p, \dot{q}_p)_{1 \leq i \leq K}$	Déplacements et vitesse modales (coordonnées physiques)
$\beta_{ij}^p$	Coefficient de couplage quadratique entre les modes propres $i$ et $j$ dans l'équation du mode propre $p$
$\gamma_{ijk}^p$	Coefficient de couplage cubique entre les modes propres $i, j$ et $k$ dans l'équation du mode propre $p$
$(u_p, \dot{u}_p)$	Coordonnées normales associées au mode non linéaire $p$
$\mathcal{P}_p^{(k)}$	Polynôme ne contenant que des monômes d'ordre $k$ permettant de passer des coordonnées $(q_p, \dot{q}_p)$ aux coordonnées $(u_p, \dot{u}_p)$
$\Gamma_1, \Gamma_2$	Coefficients non linéaires cubiques du mode non linéaire fondamental
$a$	Amplitude de la première composante harmonique du mode non linéaire fondamental
$\omega_{nl}$	Pulsation de la première composante harmonique du mode non linéaire en régime libre
$T$	Coefficient non linéaire de la <i>backbone curve</i> du mode non linéaire
$\Gamma_0$	Coefficient cubique de l'oscillateur de Duffing caractérisant au premier ordre le mode non linéaire
$\phi_{ref}$	Déphasage imposé par la boucle à verrouillage de phase
$F_m$	Forçage mono-harmonique de la boucle à verrouillage de phase
$F$	Amplitude de forçage mono-harmonique de la boucle à verrouillage de phase
$x_m$	Réponse du système contrôlé par la boucle à verrouillage (vitesse ou déplacement)
$\phi$	Déphasage entre forçage et réponse du système
$\omega_0$	Pulsation initiale de forçage pour la boucle à verrouillage de phase
$e$	Erreur entre $\phi$ et $\phi_{ref}$
$h$	Épaisseur de la coque en éléments finis
$D$	Diamètre de la coque en éléments finis
$\psi$	Angle de contact de la coque
$\rho$	Masse volumique
$E$	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\delta$	Coefficient de dilatation thermique
$K$	Conductivité thermique
$T_e$	Température aux bords de la coque éléments finis
$T_c$	Température au centre de la coque éléments finis
$f_1$	Fréquence du mode fondamental
$\omega_1, \omega_2$	Pulsations propres des deux oscillateurs couplés
$\xi_1, \xi_2$	Taux d'amortissement des deux oscillateurs couplés
$\alpha, \beta$	Coefficients de couplage quadratiques entre les deux oscillateurs



# Chapitre 1

## Introduction générale

Le contrôle actif de vibrations, qui s'emploie à contrôler des structures par l'intermédiaire de source(s) secondaire(s) et de boucle(s) d'asservissement(s), est aujourd'hui présent dans de multiples domaines : en industrie, où il permet de réduire le niveau de vibrations indésirables dans des structures complexes, mais aussi dans les transports, le secteur médical, et plus récemment, en création musicale afin de modifier le son acoustique d'instruments de musique. Un préliminaire important au contrôle de ces systèmes consiste en une phase de modélisation. Dans un grand nombre de cas, une hypothèse linéaire sur le comportement de la structure conduit à négliger certains comportements vibratoires dans un domaine dynamique réduit, permettant l'utilisation d'outils globaux et éprouvés pour l'analyse vibratoire. En revanche, en dehors de ce cadre dynamique, il apparaît nécessaire de prendre en compte dans la modélisation certains phénomènes non linéaires. Ces non-linéarités peuvent être de différente nature : matérielles (loi de comportement non linéaire), géométriques (dus à des grands déplacements ou de grandes déformations), ou encore de contact (frottements aux interfaces). Dans le cadre musical mentionné ci-dessus, le contrôle actif a été appliqué avec succès à plusieurs instruments, par l'intermédiaire d'outils variés. Cependant, en dépit de non-linéarités inhérentes à certains comportements instrumentaux (comme dans le cas des percussions), l'application du contrôle actif aux instruments non linéaires n'a jamais été abordée dans une perspective musicale.

Ce travail aborde la question du contrôle des non-linéarités géométriques à partir d'un instrument de musique présentant des particularités sonores : l'étude se restreint au cas du gong d'opéra chinois, qui présente en situation de jeu plusieurs comportements non linéaires dont un très caractéristique glissement fréquentiel de plusieurs de ses modes de vibration. L'introduction de l'étude ci-après fournit les éléments contextuels des questionnements transversaux soulevés au cours de cette thèse. En premier lieu, le contexte scientifique et musical de ce travail est présenté. Le positionnement de l'étude et l'état de l'art qui lui est associé sont ensuite exposés. Enfin, les objectifs de la thèse ainsi que le plan du manuscrit sont décrits dans une dernière partie. Cette introduction générale est complétée dans les chapitres suivants par des introductions plus spécifiques aux domaines qui y sont abordés.

## 1.1 Contexte scientifique et musical

Les contextes musical et scientifique de ce travail sont intimement liés par des thématiques art-science qui constituent l'un de ses fondements. Les enjeux rattachés à ces deux domaines sont présentés ci-après.

### 1.1.1 Innovation technologique et création musicale

L'innovation technologique en matière de lutherie instrumentale opère un lien continu avec la création musicale. Comme l'écrit Alexis Kossenko (1977- ), chef d'orchestre, flûtiste et musicologue, elle participe d'abord à la révélation de l'œuvre musicale : "*Bien sûr, les instruments du début du XIXe siècle ont des caractéristiques très prononcées : une vivacité d'articulation, un franc-parler des attaques, un mélange fruité des bois, l'éclat vif argent des cuivres. Ils peuvent relever d'un choix esthétique. Mais ils sont moins une fin qu'un moyen : à leur lumière, les tempos (redoutables) [de Beethoven] prennent un sens, les ruptures musicales sont exacerbées, l'héroïsme de l'écriture procure un sentiment d'aventure qui tient l'auditeur en haleine.*". L'innovation en lutherie est ensuite productrice d'œuvres : l'Onde Martenot, premier instrument électronique avec le thérémine, a ainsi grandement inspiré des compositeurs tels que Darius Milhaud<sup>1</sup>, André Jolivet<sup>2</sup>, ou encore Olivier Messiaen [Messiaen and Loriod 2001]. Cette évolution technologique des instruments s'accompagne souvent de révolutions esthétiques ou théoriques ; tour à tour et ensemble, ces deux éléments participent à l'évolution de l'art musical.

Le XIX<sup>ème</sup> et le XX<sup>ème</sup> siècles ont ainsi vu se développer une grande quantité de nouveaux instruments ; certains, tels que le cristal Baschet, le marimba ou le vibraphone, restent entièrement acoustiques et se sont forgés un véritable répertoire<sup>3</sup>. Cependant, la plupart des instruments produits au cours des cent dernières années sont issus des innovations technologiques de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (électronique, enregistrement, amplification) et sont qualifiés d'*électro-acoustiques* : parmi les plus connus se trouvent le thérémine, qui apparaît dans les années 1910, les Ondes Martenot, qui naissent dans les années 1920, puis les synthétiseurs qui se développent dans les années 1960.

La fabrication des premiers synthétiseurs ainsi que le développement de l'informatique modifient profondément les processus de création et de pratique musicale : l'ordinateur devient tour à tour compositeur et instrument, notamment avec les premiers essais de synthèse sonore dans les années 1980. Le bouleversement de ces pratiques amène trois conséquences majeures. La première concerne l'interaction entre le musicien et l'instrument : celui-ci, en tant qu'outil spécifique, est remplacé par l'outil générique de l'ordinateur. Le geste musical laisse ainsi place à la simulation du geste instrumental : faire de la musique, au sens de *performance*, ne requiert plus une situation instrumentale, physique, entre le musicien et l'instrument. Deuxièmement, le musicien accède à des palettes sonores nouvelles. Le visionnaire Edgar Varèse (1883-1965) déclarait ainsi en 1939 : "*Une machine semblable nous libérerait du système arbitraire et paralysant de l'octave ; elle permettrait l'obtention d'un nombre illimité de fréquences, [...] une étendue insoupçonnée de registres, de nouvelles splendeurs harmoniques [...] ; des sons combinés, des différenciations de timbre, des intensités inhabituelles au-delà de tout ce que peuvent accomplir nos orchestres ; une projection du son dans l'espace par son émission dans l'une ou l'autre partie d'une salle de concert, selon les besoins de l'œuvre ; des rythmes qui s'entrecroiseraient indépendamment les uns des autres, [...] cette invention pourrait jouer toutes les notes voulues [...] tel qu'il est maintenant humainement impossible de le faire.*" Enfin, le troisième bouleversement concerne

1. voir *Suite pour Ondes musicales Martenot et piano* (1933).

2. voir *Concerto pour Ondes Martenot et orchestre* (1947).

3. voir par exemple les travaux de Milhaud pour les percussions et ceux de Thomas Bloch et Michel Deneuve pour le cristal Baschet.

la diffusion du son ; en effet, avec l'informatique musicale le "radiateur sonore" de l'instrument-ordinateur est décorrélé du mécanisme de production sonore : là où le diffuseur sonore d'une guitare, la table, est lié physiquement à l'instrument-guitare, le haut-parleur servant à diffuser le son provenant d'une synthèse sonore peut être entièrement décorrélé des éléments électroniques numériques qui constituent cette synthèse sonore.

### 1.1.2 Contrôle actif d'instruments de musique : un exemple d'innovation en lutherie contemporaine

Dans la prolongation des innovations précédentes, le contrôle actif des instruments de musique s'est développé à partir des années 1990. Les méthodes du contrôle actif ainsi que ses outils de caractérisation sont empruntés au domaine de l'automatique, notamment du contrôle commande. Bien que très diversifiées, elles reposent toutes sur un même principe général : l'introduction de capteur(s) et d'actionneur(s) à la structure, reliés entre eux par un système de contrôle. Le fonctionnement de cette boucle de contrôle est décrit ci-après : une perturbation appliquée à un système met celui-ci en vibration ; cette vibration est ensuite mesurée par une série de capteur(s), et transmise à un système de contrôle qui détermine une *commande* à envoyer au système par le biais d'actionneur(s). L'ensemble du système structure - capteur(s) - système de contrôle - actionneur(s) forme un *système en boucle fermée* (Figure 1.1).

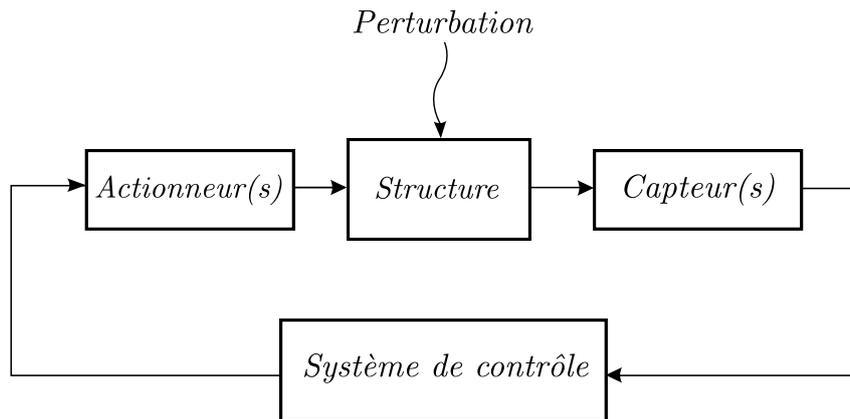


FIGURE 1.1 – Principe général du contrôle actif d'une structure soumise à une perturbation.

Le premier brevet concernant le contrôle actif est attribué à Paul Lueg [1934]. Celui-ci propose d'annuler une onde plane monochromatique longitudinale dans un tuyau en mesurant celle-ci avec un microphone, puis en la réinjectant en opposition de phase dans le tuyau à l'aide d'un haut-parleur localisé au niveau d'un ventre de l'onde originale. L'onde initiale et l'onde déphasée s'annulent alors au sein même du tuyau. Il s'agit là d'un exemple de *contrôle actif acoustique* ou *contrôle de bruit*. Le même principe général peut s'étendre aux structures solides : il s'agit alors de *contrôle actif de vibration* ou *contrôle de structures*. Dans ce cas, le microphone est remplacé par un capteur, le haut-parleur par un actionneur, et tous deux sont collés à la structure à contrôler. Notons que les méthodes de contrôle sont souvent classées en deux catégories : les méthodes par anticipation<sup>4</sup> et les méthodes par rétroaction<sup>5</sup> ; la première catégorie de méthodes détermine la commande à partir de la mesure de la perturbation et de l'erreur entre la sortie du système et une cible souhaitée ; la seconde méthode détermine la commande uniquement à partir de la

4. *Feedforward control* en anglais.

5. *Feedback control* en anglais.

mesure de la sortie du système. Cette seconde catégorie de méthodes, plus répandue, est celle utilisée dans ce travail.

Les applications du contrôle actif par rétroaction sont variées : (i) éviter les endommagements de structures amenés par des niveaux de vibration trop importants [Chomette 2008; Chomette et al. 2010]; (ii) réduire la gêne de certain-e-s utilisateur-trice-s face au bruit ambiant; (iii) réduire le bruit afin d'améliorer les performances de certains systèmes tels que les systèmes d'observation astronomique [Collette et al. 2015]. De manière générale, la visée de ces applications reste identique : réduire le niveau de vibrations de structures dynamiques.

Appliqué aux instruments de musique, le contrôle actif se différencie de ses objectifs industriels : il vise alors à *modifier* la dynamique du système-instrument au lieu de *l'atténuer*. Partant du résultat que les caractéristiques sonores d'un instrument sont intimement liées aux caractéristiques vibratoires de sa partie résonante [Richardson and Roberts 1983; Woodhouse 2004a,b] (table d'harmonie, corps des instruments à vent), le principe est de venir modifier les caractéristiques vibratoires de celle-ci par l'intermédiaire de capteurs et d'actionneurs, reliés entre eux par une boucle de rétroaction [Besnainou 1999]. Pour cela, l'accent est en général mis sur la modification des caractéristiques modales du résonateur par le biais de sa fonction de transfert, dans le but de modifier le son *acoustique* de l'instrument. Ainsi, le contrôle actif d'instruments de musique s'inscrit d'une part dans la mouvance de la révolution sonore introduite précédemment, et d'autre part garantit deux des caractéristiques permises par la lutherie traditionnelle, et mises à l'écart par le développement de l'informatique musicale : (i) la diffusion acoustique du son et (ii) l'interaction physique entre le musicien et son instrument. La richesse de l'expérience musicale liée à ces deux aspects est ainsi préservée.

Les applications du contrôle actif sur instruments de musique sont diverses; l'application initiale plébiscitée par les premiers travaux concernait l'augmentation de la palette [Besnainou 1995, 1999; Chollet et al. 2000] ou de la qualité [Hanagud and Griffin 1998; Pinte et al. 2005] sonore *acoustique* des instruments de musique traditionnels. Néanmoins, le contrôle actif a été utilisé plus récemment pour caractériser et annuler des défauts dans les instruments de musique : effet Larsen dans la guitare [Griffin et al. 2003], note du loup dans le violoncelle [Benacchio 2014], pic fréquentiel induit par la sourdine du trombone [Meurisse et al. 2015b].

Les premières applications de contrôle actif sur des instruments de musique utilisent des techniques de contrôle dites *classiques*, c'est-à-dire reposant sur la modification de la fonction de transfert d'un système Single Input Single Output (SISO, un seul actionneur et un seul capteur). Ces études se basent sur l'utilisation de contrôleurs Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) ou de filtres passe-bas d'ordre 2 permettant d'isoler les modes à contrôler. Les deux premières études sont dues à Besnainou [1995] et Griffin [1995]. Besnainou a appliqué des techniques de contrôle actif à différents instruments, dont le xylophone et la guitare. Le système de contrôle était alors constitué d'un contrôleur analogique modifiant l'amortissement et la fréquence d'un mode de vibration, mais sans rendre la modification de ces deux paramètres indépendante l'une de l'autre. Griffin [1995] et Hanagud [1998] ont utilisé le contrôle actif pour modifier l'amortissement de la résonance de Helmholtz, du premier et du deuxième mode de vibration d'une guitare acoustique, afin d'en modifier les propriétés sonores. Le contrôle par PID a été plébiscité pour le contrôle d'un chevalet du violon [Boutin and Besnainou 2008], la modification de l'amortissement des mouvements transverses et longitudinaux d'une corde de guitare [Berdahl and Smith III 2006] ou encore la modification, à l'aide de haut-parleurs, du timbre d'une peau de percussion tendue sur un fût [Rollow et al. 1997; Rollow 2003]. Le contrôle par PID est bien adapté à des systèmes à un seul degré de liberté, mais apparaît plus compliqué à mettre en œuvre dans le cas de systèmes multi-modaux. Dans ce cas, la réponse fréquentielle du contrôleur PID doit être filtrée afin de ne pas perturber les caractéristiques des modes non contrôlés [Boutin 2011]. Par ailleurs, d'autres

études appliquant le contrôle actif aux instruments s'appuient sur l'utilisation de filtres du second ordre permettant d'agir sur un [Griffin et al. 2003] ou plusieurs [Boutin 2011] modes de vibration sans modifier les caractéristiques modales des autres résonances. Malheureusement, dans le cas d'un contrôle simultané de plusieurs modes de vibration, il faut envisager des systèmes Multi-Input-Multi-Output (MIMO, plusieurs capteurs et/ou plusieurs actionneurs); une solution qui peut s'avérer invasive dans le cas d'instruments de musique.

Cette dernière limite est résolue par le développement de techniques de contrôle basées sur une représentation d'état des systèmes. Ces méthodes, dites *modernes*, offrent le principal avantage de contrôler plusieurs modes simultanément avec un nombre réduit de capteur(s) et d'actionneur(s). La première application de ces méthodes sur un instrument de musique est la thèse de Griffin [1995], dans laquelle un contrôle moderne est appliqué à une guitare. Il parvient ainsi à contrôler l'amortissement de plusieurs modes de vibration de la table d'harmonie. Ses travaux ont été considérablement étendus avec les thèses de Benacchio [2014] et Meurisse [2014] qui ont tous deux appliqué le contrôle actif modal [Preumont 2012] aux instruments à cordes [Benacchio et al. 2015] et à vent [Meurisse et al. 2014, 2015a]. Le contrôle actif modal est une méthode de contrôle moderne par rétroaction permettant de modifier indépendamment - et simultanément - les paramètres modaux des résonances d'une structure vibratoire. La méthode est basée sur une décomposition modale [Meirovitch 1985; Gavronski 1998] de la vibration de la structure, définissant une commande qui cible chacun des modes à contrôler. Si le nombre de modes est faible, la méthode permet de contrôler plusieurs modes avec un seul capteur et un seul actionneur [Chomette 2008; Benacchio 2014]. La majeure partie du travail mené dans le cadre des thèses de Benacchio et de Meurisse a été le développement d'un contrôleur numérique temps-réel respectant les contraintes de rapidité et de déterminisme liées à la boucle de contrôle [Piéchaud 2014; Benacchio et al. 2013].

## 1.2 Cadre de l'étude

Les thèses de Benacchio et Meurisse sur le contrôle actif des cordes et des vents représentent le point de départ du travail présenté dans ce manuscrit. En effet, l'application du contrôle actif modal aux instruments de musique reste pertinente lorsque l'ordre de grandeur des vibrations du résonateur instrumental considéré inscrit le comportement de ce dernier dans un cadre linéaire. L'hypothèse linéaire est couramment admise dans le cas des cordes et des vents pour des nuances modérées de jeu [Fletcher and Rossing 2005]. En revanche, dans le cas de certains idiophones comme les gongs<sup>6</sup>, l'hypothèse de linéarité est mise en défaut en situation normale de jeu; en effet, des non-linéarités dites *géométriques* apparaissent du fait de grands déplacements transverses au sein de la structure. Les non-linéarités géométriques sont typiques de structures minces soumises à des déplacements importants de l'ordre de leur épaisseur [Nayfeh and Mook 1995; Wiggins 2003]. Elles se rencontrent dans de nombreux systèmes industriels : ailes d'avion [Londono and Cooper 2014; Fuellekrug and Goerge 2012], hauts-parleurs [Quaegebeur and Chaigne 2008; Falaize and Hélie 2014], capteurs de reconnaissance biomoléculaire [Thomas et al. 2008]. Dans ce contexte particulier, et celui, plus général, de la création musicale, la question scientifique suivante reste ouverte :

**Quelles sont, dans une perspective musicale, les modalités de contrôle d'instruments présentant des non-linéarités géométriques ?**

La présente thèse s'attache à répondre à cette question, à travers une démarche exploratoire

---

6. ainsi que d'autres idiophones comme les cymbales, mais celles-ci ne sont pas traitées dans ce travail.

des différentes problématiques rencontrées dans l'élaboration d'un contrôle des instruments de la famille des gongs. Le contrôle d'instruments de musique non linéaires est un domaine difficile à appréhender par les connaissances pluri-disciplinaires (automatique, mécanique, musicale) et donc transversales qu'il requiert. Dans cette perspective, les étapes intermédiaires permettant de répondre à la problématique posée sont les suivantes :

- (i) Etudier expérimentalement les performances et limites du contrôle actif modal appliqué à des instruments présentant des non-linéarités géométriques ;
- (ii) En cas de limites attestées du contrôle actif modal, élaborer une stratégie de contrôle des phénomènes non linéaires de l'instrument.

Le point (i) trouve sa motivation d'une part dans les travaux sur le contrôle modal hérités des deux thèses préalablement réalisées à l'IRCAM<sup>7</sup> [Meurisse 2014; Benacchio 2014], d'autre part dans l'approche couramment adoptée dans le domaine industriel du contrôle de structures non linéaires. En effet, le contrôle des non-linéarités en industrie se résume essentiellement à maîtriser les non-linéarités ou à les supprimer. La modélisation des non-linéarités, fastidieuse, est parfois évitée en appliquant à des structures faiblement non linéaires des méthodes de contrôle basées sur des modèles *linéaires* [Schweickhardt and Allgöwer 2007]. Dans ce cas, les phénomènes non linéaires sont interprétés comme une erreur de modélisation non linéaire d'un système sous-jacent linéaire. En s'inspirant de cette approche, sans toutefois utiliser les méthodes qui y sont rattachées, la première partie de ce travail consiste à quantifier les performances et les limites du contrôle actif modal vis-à-vis de non-linéarités géométriques.

Le point (ii) se déduit des limites observées au point (i). En particulier, la détermination d'une loi de commande pour une structure dynamique non linéaire nécessite une compréhension préliminaire de son comportement physique. Cela nécessite la mise en place d'un *modèle*, et de méthodes pour *identifier* les paramètres associés à ce modèle. Ces aspects constituent le cœur de ce travail. Le contrôle à proprement parler ne sera abordé dans cette thèse qu'à titre exploratoire, à travers un exemple simple de contrôle par remodelage d'énergie évoqué dans les perspectives.

### 1.3 État de l'art : gongs, non-linéarités et méthodes d'identification

La section suivante présente un état de l'art de l'organologie des instruments de la famille des gongs ainsi que de leurs caractéristiques dynamiques générales. Elle décrit ensuite le cadre de modélisation pouvant être employé pour la description de la dynamique de ces instruments, ainsi que les méthodes d'identification non linéaires associées - la notion d'identification est introduite en section 1.3.3. Cet état de l'art explique et justifie différents choix : choix de l'objet d'étude (le gong *xiaoluo*), modélisation de sa dynamique et choix de la méthode d'identification associée au modèle.

#### 1.3.1 Gongs : organologie et non-linéarités géométriques

Les gongs font partie de la famille des idiophones<sup>8</sup>. À l'intérieur même de la famille des gongs, plusieurs classifications co-existent. Celle exposée ci-après est établie en fonction des caractéristiques sonores et vibratoires de ces instruments, classés en fonction de leur degré de non-linéarité.

7. Institut de Recherche Coordination Acoustique/Musique, Paris, France.

8. On utilise ici la classification de Hornbostel/Sachs.

De manière générale, tous les gongs sont de forme circulaire ; ils présentent néanmoins des profils variés (Figure 1.2).

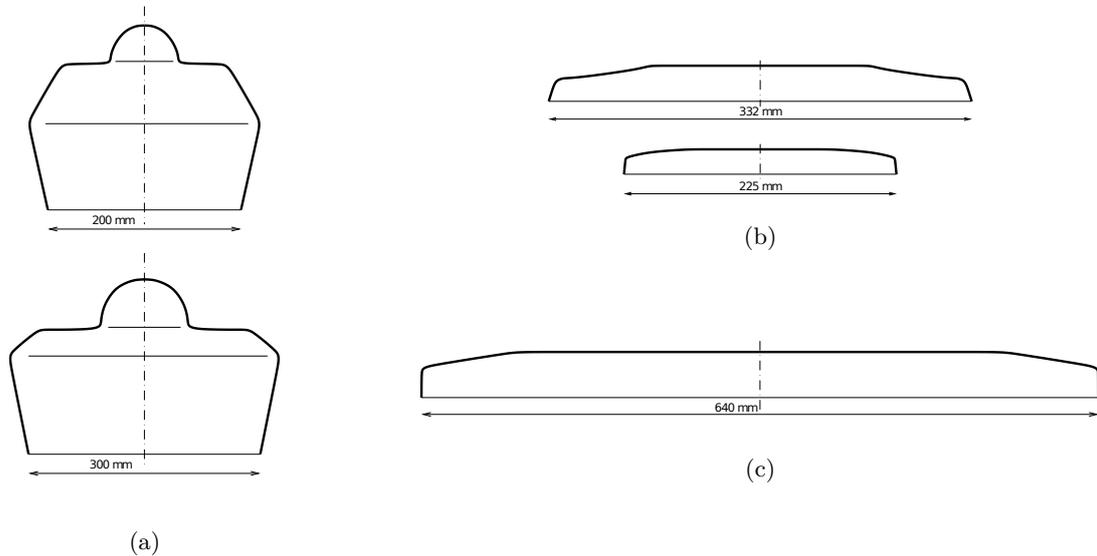


FIGURE 1.2 – Exemples de profils de gongs. (a) Gong bulbé (bonang et kenong) (b) Gongs d’opéra chinois (c) Tam-tam chinois (d’après [Thomas 2001]). Les dimensions sont indicatives et peuvent varier d’un instrument à l’autre.

La première catégorie de gong est constituée des gongs bulbés, dont le nom provient du dôme présent en leur centre (Figure 1.3a), et dont le comportement peut être qualifié de *quasi-linéaire*. Les gongs bulbés se jouent à l’aide d’une mailloche en feutre, en frappant l’instrument au niveau du dôme central. Ce dernier, ainsi que la grande épaisseur de ces instruments, leur confèrent un son *tonal* invariant, c’est-à-dire relié à une fréquence ne variant pas au cours du temps. La hauteur tonale de l’instrument, ou la valeur de la fréquence associée, est liée aux proportions entre le dôme central et le diamètre de l’instrument [Rossing and Shepherd 1982]. Par ailleurs, les phénomènes non linéaires observés dans ces instruments sont *très faibles*, dans le sens où ils ne sont constitués que de distorsion harmonique<sup>9</sup>. Les modes, accordés en octave, présentent un léger désaccord qui, combiné à la composante de distorsion harmonique d’ordre 2, crée un battement caractéristique dans le son [Krueger et al. 2010]. En Asie du Sud-Est, les gongs bulbés peuvent être de diamètres variés et accordés pour former un clavier mélodique et rythmique de gongs, comme le *kulintang* (Figure 1.3b), le *piphat* (Figure 1.3c) ou encore le *gamelan javanais* (Figure 1.3d), ce dernier offrant le plus grand nombre et la plus grande variété de gongs.

La deuxième catégorie de gongs correspond aux gongs d’opéra chinois. Ceux-ci possèdent des bords moins larges que les gongs bulbés, et n’ont pas de dôme central (Figure 1.2b). Frappés en leur centre à l’aide d’une mailloche en feutre (Figure 1.4a), leur hauteur sonore apparaît tonale, mais varie au cours du temps avec un glissement fréquentiel caractéristique. Cette dépendance de la fréquence vis-à-vis de l’amplitude de vibration, due à leur rigidité moindre en flexion, les classe à un niveau de non-linéarités dites *faibles*. Elle permet par ailleurs de classer les gongs d’opéra chinois en deux types : le grand gong *daluo* (diamètre  $\sim 314$  mm et épaisseur  $\sim 1.5$  mm) qui présente un glissement fréquentiel descendant de son mode fondamental, et le *xiaolu*, plus petit (diamètre  $\sim 227$  mm et épaisseur  $\sim 1$  mm), dont le glissement fréquentiel fondamental est

9. Cette notion sera introduite au Chapitre 2.



FIGURE 1.3 – Exemple de gong bulbé et d’ensembles musicaux le faisant intervenir. (a) Gong bulbé *kenong* (b) Ensemble *kulintang* (c) Ensemble *piphat* (d) Ensemble du *gamelan javanais*.

ascendant (Figure 1.4b). Le caractère ascendant ou descendant du glissement fréquentiel dépend de la géométrie de la partie centrale de l’instrument, plus ou moins galbée [Fletcher 1985]. Au niveau de la pratique musicale, les gongs d’opéra chinois sont joués dans des ensembles liés à la danse (opéra de Pékin, danse du lion) et aux processions. Leur apport musical y est cependant plus rythmique que mélodique. Ils sont également présents dans des compositions occidentales, comme par exemple la pièce *Relay* (1995) de Martin Butler (1960 - ), *Steal the Thunder* (1984) de Jean Piché (1951 - ), ou encore *H’un (Lacerations)* (1988) de Bright Sheng (1955 - ).

La troisième catégorie de gongs correspond aux tam-tams chinois<sup>10</sup>, dont un exemple est représenté Figure 1.5. Leur profil est similaire à celui des gongs d’opéra chinois mais leur diamètre, beaucoup plus grand, peut se situer entre 450 mm et 1.5 m. Ils sont suspendus verticalement et sont joués à l’aide d’une mailloche en feutre. Leur rigidité est encore inférieure à celle des

10. à ne pas confondre avec les instruments africains du même nom.

### 1.3. ÉTAT DE L'ART : GONGS, NON-LINÉARITÉS ET MÉTHODES D'IDENTIFICATION 9

gongs d'opéra chinois, ce qui leur confère une hauteur sonore imprécise, caractérisée par une cascade sonore progressive des basses fréquences vers les hautes fréquences et un spectre final très large bande caractéristique de comportements non linéaires chaotiques [Legge and Fletcher 1989; Fletcher and Rossing 2005; Chaigne et al. 2005; Touzé and Chaigne 2000]. Ces instruments sont présents dans de nombreux orchestres occidentaux, comme par exemple dans le *Sacre du Printemps* de Stravinsky (1882 - 1971).



FIGURE 1.4 – Gongs d'opéra chinois. (a) Situation de jeu (b) Gongs *daluo* (gauche) et *xiaohuo* (droite) .



FIGURE 1.5 – Tam-tam chinois

#### 1.3.2 Dynamique non linéaire des gongs

Les premières études sur les gongs ont été initiées par Fletcher [1989; 2005] et Rossing [1982] dans les années 80. Depuis, certains travaux se sont intéressés de manière distincte aux trois catégories de gongs évoquées précédemment.

Les gongs bulbés présents dans les gamelans (Figure 1.3d) ont fait l'objet de quelques études, essentiellement cantonnées à des analyses modales [Rossing and Shepherd 1982; Herington et al. 2010; Perrin et al. 2013] et à l'influence de l'accord des modes sur les battements observés

dans la réponse libre de l'instrument [Krueger et al. 2010] (Figure 1.6a). Par ailleurs, les caractéristiques vibratoires des gongs d'opéra chinois ont été abordées dans quelques publications, dont le nombre reste néanmoins faible. Rossing et Fletcher [1983] ont étudié expérimentalement l'influence d'une tension ou compression radiale sur le caractère raidissant ou assouplissant du glissement fréquentiel<sup>11</sup>. Fletcher [1985] a montré que le phénomène de glissement fréquentiel (Figure 1.6b) dépend du ratio entre l'épaisseur du gong et la hauteur de sa partie centrale. Tsai et al. [2005] ont réalisé une analyse modale expérimentale et en éléments finis d'un gong *xiaoluo*. En dernier lieu, Thomas [2001] a effectué une analogie entre le glissement fréquentiel des gongs chinois et le comportement de systèmes de poutres 1D. De ces études, il ressort que le phénomène de glissement fréquentiel est compris de manière générale, à l'aide de modèles simples rigoureux, mais qu'aucune confrontation expérimentale à ces modèles n'a été abordée dans la littérature. Les comportements chaotiques des tam-tams chinois (Figure 1.6c), ont quant à eux fait l'objet d'études expérimentales et théoriques plus nombreuses (voir par exemple [Rossing and Fletcher 1982; Legge and Fletcher 1989; Fletcher and Rossing 2005; Chaigne et al. 2005; Touzé and Chaigne 2000]).

Un travail important dans la compréhension des mécanismes non linéaires mis en jeu dans la production du son des gongs a été réalisé durant les thèses de Thomas [2001] et Touzé [2000]. Ses travaux ont permis d'aborder de manière analytique et globale le comportement des gongs, en les assimilant à des plaques et/ou à des coques minces soumises à des non-linéarités géométriques - comme suggéré auparavant [Fletcher and Rossing 2005]. En dérivant les équations du modèle de plaque mince de Von Kármán, le modèle obtenu permet de décrire une grande variété de phénomènes non linéaires, parmi lesquels : dépendance de la fréquence vis-à-vis de l'amplitude, comportement périodique, quasi-périodique, combinaisons de résonances, résonances internes. Ces résultats, qui peuvent être étendus au cas des coques minces [Yasuda and Kushida 1984], sont rappelés dans le Chapitre 2 de ce manuscrit.

Une des difficultés principales de la modélisation des vibrations non linéaires est la nécessité de garder un nombre important de degrés de liberté afin de correctement prévoir le comportement des structures concernées. La résolution de ce problème s'effectue en général par la recherche de modèles d'ordre réduit. Ces modèles possèdent un nombre de degrés de liberté inférieur au nombre de degrés de liberté du système initial, mais permettent néanmoins de modéliser correctement la dynamique de celui-ci. Une première approche utilise la base des modes propres associée au problème linéaire sous-jacent : en projetant le problème sur cette base, un système d'équations portant sur les coordonnées modales de la structure est obtenu. Cependant, la base des modes propres perd sa propriété d'invariance dans le cas non linéaire (Figure 1.7) : le système d'équations gouvernant les coordonnées modales possède alors une partie linéaire découplée mais également des termes de couplages non linéaires entre les équations. La méthode de la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres<sup>12</sup> [Zahorian and Rothenberg 1981][Azeez and Vakakis 2001][Amabili et al. 2003][Kerschen and Golinval 2002] remédie en partie à ce problème en proposant des bases orthogonales dont les vecteurs sont déterminés en optimisant la variance entre la base et un nuage expérimental ou numérique de points. Cette méthode permet alors d'extraire une certaine cohérence ou organisation, caractérisant le signal dans un espace de dimension réduit. Malgré ses avantages certains - notamment le fait que la méthode est facile d'implémentation et s'applique à une grande variété de systèmes, linéaires ou non linéaires -, la méthode POD reste conditionnée à la disponibilité de données expérimentales (ou numériques) ; par ailleurs, la base POD doit être renouvelée si la nature de la dynamique du système change - la méthode, en soi, reste donc linéaire.

11. Les termes *raidissant* et *assouplissant* expriment le fait que le glissement fréquentiel est respectivement descendant ou ascendant (voir Chapitre 2).

12. *Proper Orthogonal Decomposition* en anglais.

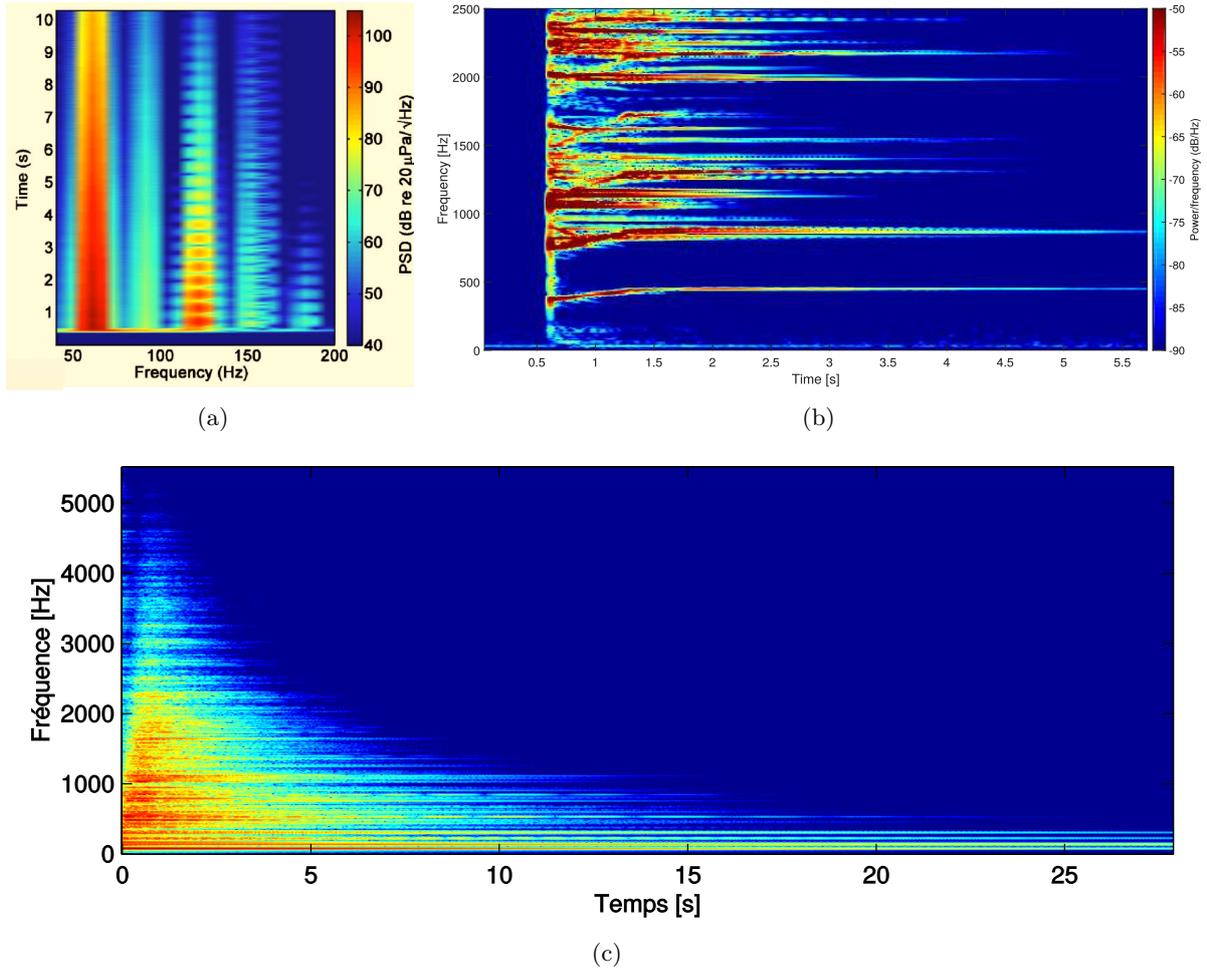


FIGURE 1.6 – Spectrogrammes du son des trois catégories de gongs, obtenus en régime libre, et tirés de la littérature. Plusieurs degrés de non-linéarités apparaissent. (a) Son de gong balinaise d'un gamelan (d'après [Krueger et al. 2010]) : battements fréquentiels dus à la présence de distorsion harmonique (b) Son de gong chinois *xiaohuo* (d'après [Jossic et al. 2017]) : présence de glissement fréquentiel (dépendance de la fréquence vis-à-vis du temps) (c) Son de tam-tam (d'après [Thomas 2001]) : comportement chaotique avec cascade des basses fréquences vers les hautes fréquences.

La méthode des modes non linéaires<sup>13</sup> s'affranchit des limites de la méthode POD en proposant un formalisme entièrement non linéaire pour trouver une base réduite au problème non linéaire. La méthode, développée dans les années 1960 par Rosenberg [1962] pour les systèmes conservatifs et élargie par les travaux de Rand [1974], Shaw et Pierre [1992] et Vakakis [1997], exploite les variétés invariantes de l'espace des phases des systèmes, tangentes à l'origine aux sous-espaces propres (Figure 1.8). Elle permet de traiter la réduction d'ordre de systèmes conservatifs ou amortis. Dans les années 2000, Jézéquel, Lamarque [1991] et Touzé [2009] ont proposé une méthode de calcul asymptotique et analytique de ces variétés, appelées *modes non linéaires*. La méthode repose sur la mise sous forme normale du système dynamique, en s'appuyant sur les travaux de Poincaré [1899] et Dulac [1912]. Ces calculs ont été appliqués à des modèles de poutres [Touzé et al. 2004b], à une clarinette [Noreland et al. 2009], mais surtout à des modèles de Von Kármán de plaques [Touzé et al. 2004a] et de coques [Touzé and Thomas 2006], Ainsi, le lien entre les modèles de Von Kármán développés en détail par Thomas [2001] pour décrire

13. *Nonlinear normal modes* (NNM) en anglais.

le comportement des gongs, et les modes non linéaires calculés par Touzé fournissent un cadre de modélisation unifié et idéal pour cette étude.

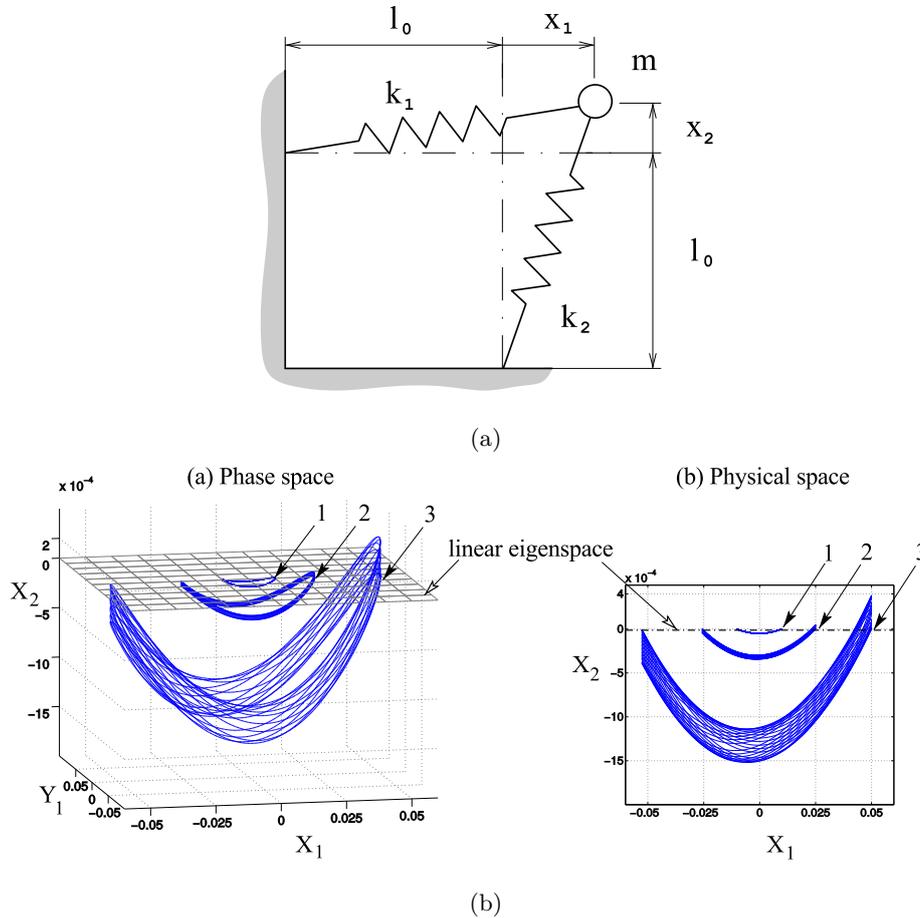


FIGURE 1.7 – Exemple d’un système à 2 degrés de liberté (DDL), dont la dynamique est représentée dans l’espace des phases (d’après [Touzé 2014], où on peut trouver la valeur des paramètres du problème). (a) Système à 2 DDL. (b) Trajectoire du système pour un mouvement initié sur le premier mode *linéaire* (l’autre mode a une condition initiale nulle). Aux grandes amplitudes de vibration, la trajectoire se détache du plan de phase correspondant au premier mode propre, ce qui illustre la perte d’invariance des modes propres dans le cas non linéaire.

### 1.3.3 Identification de systèmes non linéaires

L’identification des systèmes, qui se réfère aux développements (ou à l’amélioration) de modèles de structures à partir de données expérimentales vibratoires (excitation/réponse) mesurées sur une structure donnée, est un domaine en pleine expansion en ce qui concerne les structures non linéaires. Ainsi, en dix ans d’intervalle, deux revues très fournies récapitulant les différentes méthodes d’approche sur le sujet ont été publiées [Kerschen et al. 2006; Noel and Kerschen 2017]. Le processus d’identification des systèmes non linéaires est constitué de trois étapes :

- (a) Détection de la non-linéarité
- (b) Caractérisation de la non-linéarité : locale/globale, type de non-linéarité (géométrique, de contact, matérielle...), modélisation mathématique
- (c) Estimation des paramètres du modèle établi en (b).

Dans le cas des gongs, les étapes (a) et (b) sont bien connues par les travaux de modélisation présentés précédemment. L’étape (c), ou l’estimation des paramètres du modèle, peut être réa-

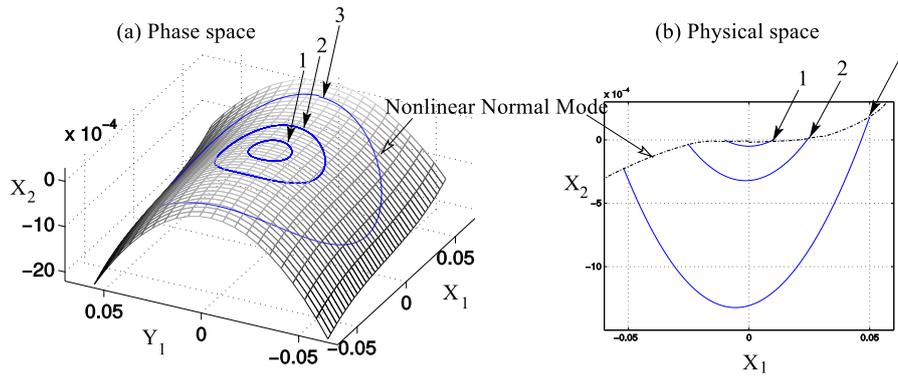


FIGURE 1.8 – Trajectoire du système de la Figure 1.7 pour un mouvement initié sur le premier mode *non linéaire* (d'après [Touzé 2014]). La trajectoire reste confinée sur le mode non linéaire (propriété d'invariance), qui présente une surface incurvée tangente à l'origine au sous-espace du premier mode propre.

lisée par différentes méthodes d'estimation de paramètres. Par abus de langage, ces méthodes d'estimation sont souvent appelées "méthodes d'identification". Celles-ci sont très nombreuses et sont regroupées en plusieurs catégories, dont les principales sont les méthodes temporelles, les méthodes fréquentielles, les méthodes temps-fréquences et les méthodes modales [Kerschen et al. 2006]. Les avantages et inconvénients de ces différentes catégories de méthode sont présentées succinctement ci-après.

### Méthodes temporelles

Une bonne partie des méthodes d'identification temporelle des systèmes non linéaires utilise des modélisations entrée-sortie de type "boîte noire" ; c'est le cas de la méthode Non linéaire Auto-Régressif à Moyenne Ajustée avec entrée eXogène (NARMAX) [Leontaritis and Billings 1985a,b], des réseaux de neurones [Chu et al. 1990], ou encore de méthodes combinant les deux [Rouss et al. 2009]. Ces méthodes offrent l'avantage de ne pas nécessiter de modélisation préalable du système et reposent uniquement sur des données entrée/sortie expérimentales. Bien que les réseaux de neurones restent l'une des méthodes temporelles les plus populaires [Witters and Swevers 2010; Metered et al. 2010], ils sont, tout comme la méthode NARMAX, difficilement applicables à des structures complexes pour lesquelles le nombre de paramètres à estimer est élevé. L'outil de type "boîte noire" rend également difficile l'interprétation physique de la dynamique du système identifié ; dans le cas où la physique du système est connue - c'est le cas de notre étude - l'utilisation de ces méthodes se révèle donc peu appropriée.

D'autres méthodes temporelles utilisent une modélisation préalable du système à identifier. La méthode RFS (*Restoring Force Surface*) [Masri and Caughey 1979] est une des méthodes à la fois les plus anciennes et les plus utilisées aujourd'hui. Initialement développée pour les systèmes à un degré de liberté (ou *Single-Degree-of-Freedom (SDOF) systems*), son principe consiste à écrire la seconde loi de Newton et à exprimer les termes non linéaires par une fonction  $f$ , polynomiale [Worden and Tomlinson 1989; Al-Hadid and Wright 1989] du déplacement  $y$  et de la vitesse  $\dot{y}$  du système. La fonction  $f$  correspond à la différence du terme d'inertie  $m\ddot{y}$  ( $m$  est la masse et  $\ddot{y}$  l'accélération) et de l'excitation  $x$  du système, tous deux connus par la mesure. La connaissance de l'excitation du système et de sa masse, et la mesure de son accélération permettent de connaître le terme d'inertie et, par intégration simple et double, la vitesse  $\dot{y}$  et le déplacement  $y$  du système. Les coefficients de la fonction  $f$  sont ensuite extraits par un algorithme minimisant l'erreur quadratique moyenne normalisée [Allen 1971]. La méthode RFS, appliquée à de

nombreux systèmes SDOF a été étendue aux systèmes à plusieurs degrés de liberté (ou *Multi-Degree-Of-Freedom (MDOF) systems*) [Al-Hadid and Wright 1990, 1992]; la méthode ne permet pas d'identifier des systèmes avec de nombreux degrés de liberté, mais elle peut néanmoins être employée pour évaluer qualitativement la forme de la fonction non linéaire de systèmes complexes [Dossogne et al. 2015]. Enfin, la méthode *Time-domain Nonlinear Subspace Identification* (TNSI) [Lacy and Bernstein 2005] est une méthode prometteuse, consistant à généraliser la méthode des sous espaces développée dans le cas linéaire [Van Overschee and De Moor 1996b], en considérant les termes non linéaires comme un terme supplémentaire de forces appliqué au système linéaire sous-jacent. Des applications expérimentales sur des structures académiques réelles [Marchesiello and Garibaldi 2008b,a] ont donné des résultats encourageants pour l'application à des structures complexes.

### Méthodes fréquentielles

Une des premières méthodes d'identification fréquentielles développée est basée sur les séries fonctionnelles de Volterra [Schetzen 1980]. Les séries de Volterra s'expriment à l'aide de noyaux multi-dimensionnels qui correspondent à la généralisation aux ordres plus élevés de la réponse impulsionnelle traditionnellement utilisée dans le cas linéaire. Les transformées de Fourier de ces noyaux sont appelées *Fonction de Réponse en Fréquence Généralisées* (ou *Generalized Frequency Response Function* (GFRF)). La première application des séries de Volterra à l'extraction de paramètres est développée dans la thèse de Gifford [1989], dans laquelle l'auteur propose d'ajuster des surfaces ou hypersurfaces aux GFRFs. Malheureusement, l'inconvénient principal des modèles de Volterra est leur complexité paramétrique due au très grand nombre de coefficients qui caractérisent leurs noyaux. Un autre inconvénient, majeur dans le cas de notre étude, est qu'elles ne permettent pas toujours de prendre en compte la dépendance de la fréquence vis-à-vis de l'amplitude. Boyd et Chua [1985] ont en effet montré que l'existence d'une représentation en série de Volterra pour un système donné est soumise à l'indépendance de l'état stationnaire de ce système vis-à-vis des conditions initiales. Cela exclut de fait de cette représentation les systèmes comportant plus d'une solution d'équilibre stable, c'est-à-dire par exemple les systèmes avec hystérésis.

Par ailleurs, la méthode *Nonlinear Identification Through Feedback of the Output* (NIFO), proposée par Adams et Allemang [2000], consiste à intégrer les termes non linéaires comme des forces de réaction internes au système linéaire sous-jacent [Haroon and Adams 2009]; en outre, la méthode *Frequency-domain Nonlinear Subspace Identification* (FNSI), analogue de le TNSI dans le domaine fréquentiel, a récemment été proposée [Noël and Kerschen 2013]. Cette méthode généralise les méthodes fréquentielles de sous-espaces utilisées pour les systèmes linéaires [Van Overschee and De Moor 1996a] au cas non linéaire.

### Méthodes modales

Les méthodes modales constituent à ce jour les méthodes d'identification les plus récentes et sont en grand essor depuis dix ans [Noël and Kerschen 2017]. Dans le cas de systèmes linéaires, la détermination des caractéristiques modales des structures (fréquences, taux d'amortissement et déformées modales) forme la base de leur étude dynamique. Ce champ d'étude, appelé analyse modale des systèmes, est aujourd'hui un champ d'expérimentation bien maîtrisé [Ewins 2006]. Dans le cas des structures non linéaires, l'analyse modale en est à ses prémices et constitue un domaine de recherche très actif.

Parmi les premières méthodes modales, on trouve la méthode *Nonlinear resonant decay method* (NLRDM), qui identifie plusieurs modes en introduisant des termes de couplages dans le modèle linéaire de la structure étudiée [Wright et al. 2001a]. La méthode a été appliquée à des

structures de complexité variées [Yang et al. 2006; Fuellekrug and Goege 2012], mais l'appropriation du mode non linéaire, réalisée par une excitation *sine burst*<sup>14</sup>, reste approximative. Le formalisme des modes non linéaires a également engendré l'apparition de méthodes modales non linéaires d'identification. Le grand avantage de ces méthodes est qu'elles isolent la dynamique d'un seul mode non linéaire, dont le comportement peut ensuite être mesuré. Par ailleurs, elles reposent directement sur le formalisme des modes non linéaires et sont donc particulièrement adaptées à notre étude. Parmi ces méthodes modales figure la méthode à résonance de phase non linéaire [Peeters et al. 2011a], qui constitue l'extension non linéaire de la méthode à résonance de phase linéaire [Wright et al. 1999], elle-même basée sur l'excitation mono-harmonique et multi-localisée de structures autour de leurs fréquences de résonance. L'appropriation d'un mode non linéaire est réalisée par une excitation multi-harmonique multi-localisée respectant un critère de quadrature de phase ; une fois l'appropriation effectuée, l'excitation est coupée et l'analyse du régime libre permet d'extraire les paramètres non linéaires d'intérêt. Les techniques à séparation de phase linéaires ont également été étendues au cas non linéaire avec une première tentative réussie par Noël *et al.* [2016]. La méthodologie repose premièrement sur l'identification d'un modèle d'état expérimental à l'aide de la méthode FNSI, deuxièmement sur la conversion de ce modèle d'état en un modèle dans l'espace modal à partir duquel les fréquences et amplitudes de vibration sont extraites par des méthodes de continuation. Enfin, le concept de boucle à verrouillage de phase, empruntée à la théorie du contrôle, a été utilisé afin d'identifier des *backbone curves*<sup>15</sup> de modes non linéaires [Peter et al. 2016]. Cette dernière méthode figure parmi l'une des plus récentes en identification de modes non linéaires, et est utilisée dans ce travail. Elle repose sur une boucle d'asservissement en phase *en régime forcé*, verrouillant le système à la résonance non linéaire. Elle présente ainsi l'avantage d'effectuer les mesures de *backbone curves* en régime forcé, évitant ainsi les analyses temps-fréquences habituellement utilisées pour analyser le régime libre issu de la méthode à résonance de phase non linéaire. La description détaillée de cette méthode est reportée au Chapitre 4.

## 1.4 Objectifs de l'étude

La section 1.3.1 met en évidence un premier choix "organologique" à effectuer, à savoir le choix de l'objet d'étude. Les gongs bulbés, qualifiés de *quasi-linéaires*, sont éliminés par manque de phénomènes non linéaires conséquents dans leur dynamique. Les gongs d'opéra chinois sont un bon compromis entre les gongs bulbés et les tam-tam chinois, aux comportements dynamiques très complexes. En effet, le comportement chaotique est absent dans la dynamique des gongs d'opéra, mais divers phénomènes non linéaires sont toutefois présents dans leur comportement : distorsion harmonique (révélée par de simples expériences), résonances internes (mises en évidence dans ce travail), et dépendance de la fréquence vis-à-vis de l'amplitude (évident à l'oreille avec la présence du glissement fréquentiel caractéristique en régime libre). De plus, quand bien même le mécanisme du glissement fréquentiel est compris de manière générale depuis les études de Rossing [1982], Fletcher [1985] et Thomas [2001], le comportement dynamique des gongs d'opéra chinois, et en particulier la modélisation du glissement fréquentiel de son mode fondamental, n'a jamais été abordée de manière précise dans les études antérieures. Notre étude s'intéresse au gong chinois *xiaoluo* (avec glissement fréquentiel ascendant) - les gongs *daluo*, quant à eux, ne sont pas considérés dans ce travail.

Ce premier choix défini, les problématiques de cette étude sont précisées ; en particulier, le glissement fréquentiel étant la caractéristique sonore la plus évidente du gong *xiaoluo*, l'objectif de contrôle, et donc de modélisation, est restreint au mode fondamental de l'instrument. Dans

14. Il n'existe pas de traduction française à la connaissance de l'auteur.

15. relation amplitude-fréquence en régime libre, voir détails au Chapitre 2.

la perspective de pouvoir contrôler ce glissement fréquentiel, notamment modifier le caractère assouplissant, deux objectifs sont établis :

- (O1) Evaluer les performances et limites du contrôle actif modal sur les non-linéarités géométriques présentes dans le comportement du gong.
- (O2) Identifier un modèle d'ordre réduit du mode fondamental de l'instrument.

Ces deux objectifs ont pour but de développer à terme un contrôle du glissement fréquentiel de l'instrument. L'objectif (O1) est atteint au Chapitre 3. L'objectif (O2) est abordé dans les Chapitres 4 et 5. Enfin, la stratégie de contrôle non linéaire sera examinée à titre exploratoire dans les perspectives de ce travail.

## 1.5 Plan du manuscrit

A la suite de la présente introduction, le manuscrit est organisé de la façon suivante :

**Chapitre 2** : Le Chapitre 2 propose une description de l'objet d'étude en présentant les caractéristiques vibratoires du gong *xiaoluo*. En premier lieu, une analyse modale expérimentale et en éléments finis de l'instrument est réalisée afin d'optimiser la localisation du capteur et de l'actionneur qui sont intégrés à la boucle de contrôle modal développée au Chapitre 3. Deuxièmement, la modélisation du gong par un modèle de Von Kármán est proposée, permettant de mettre en évidence plusieurs phénomènes non linéaires caractéristiques. Ces phénomènes sont ensuite illustrés au travers d'expériences simples en situation de jeu.

**Chapitre 3** : Le Chapitre 3 présente les aspects théoriques et la mise en œuvre expérimentale d'un contrôle modal du gong *xiaoluo*. L'étude se focalise sur le contrôle en amortissement du mode fondamental de l'instrument. Les performances et limites du contrôle modal vis-à-vis des différents phénomènes non linéaires introduits au Chapitre 2 sont qualitativement et quantitativement évalués. En particulier, les limites de performances du contrôle en ce qui concerne le phénomène de glissement fréquentiel motive le développement d'un modèle réduit non linéaire du gong et de l'identification de ses paramètres.

**Chapitre 4** : Le Chapitre 4 aborde la question de l'identification d'un modèle d'ordre réduit, à un seul mode, du modèle de Von Kármán introduit au Chapitre 2. Il expose de manière complète et succincte le formalisme des modes non linéaires. La méthode d'identification du mode non linéaire fondamental, une boucle à verrouillage de phase, est présentée. Les résultats de l'identification sont comparés par une seconde méthode d'identification classique, utilisant la mesure de courbes non linéaires<sup>16</sup>.

**Chapitre 5** : Le Chapitre 5 étudie la pertinence et les limites du modèle uni-modal développé au Chapitre 4. Il compare la relation amplitude-fréquence (*backbone curve*) et temps-fréquence (glissement fréquentiel) du mode non linéaire fondamental dans le cas d'une excitation uni-modale, réalisée avec la boucle à verrouillage de phase, et dans le cas d'une excitation mailloche en situation de jeu. Le chapitre met notamment en évidence le rôle des résonances internes dans la dynamique du glissement fréquentiel, ouvrant des perspectives pour la détermination d'un modèle réduit du glissement fréquentiel.

---

16. Cette notion est introduite au Chapitre 2.

Enfin, une conclusion générale (Chapitre 6) clôt ce travail de thèse en en rappelant les apports principaux et en proposant de nouvelles perspectives de recherche.



## Chapitre 2

# Le gong d'opéra chinois *xiaoluo*

---

2.1	Caractérisation géométrique et mécanique du gong <i>xiaoluo</i> . . . . .	20
2.1.1	Caractéristiques géométriques . . . . .	20
2.1.2	Caractéristiques mécaniques . . . . .	22
2.2	Analyse modale . . . . .	22
2.3	Non-linéarités géométriques dans les structures minces . . . . .	32
2.3.1	Équations du mouvement . . . . .	32
2.3.2	Adimensionnement . . . . .	34
2.3.3	Projection modale . . . . .	35
2.3.4	Phénomènes non linéaires . . . . .	35
2.3.4.1	Régime uni-modal libre : distorsion harmonique et glissement fréquentiel . . . . .	36
2.3.4.2	Régime uni-modal forcé . . . . .	38
2.3.4.3	Résonances internes . . . . .	39
2.4	Expériences en régime de jeu . . . . .	40
2.4.1	Dispositif expérimental . . . . .	40
2.4.2	Influence de la force d'impact sur les non-linéarités géométriques . . . . .	41
2.4.3	Influence de la localisation de l'excitation sur les non-linéarités géométriques . . . . .	45
2.5	Conclusion . . . . .	47

---

## Préambule

L'objectif de ce chapitre est de présenter de manière globale les caractéristiques géométriques, mécaniques et vibratoires du gong *xiaoluo*. En premier lieu, les caractéristiques géométriques et mécaniques sont exposées en section 2.1. Celles-ci sont utilisées pour effectuer l'analyse modale par éléments finis du gong, à la suite de l'analyse modale expérimentale, réalisée en section 2.2. L'analyse modale du gong met en évidence la localisation des modes de vibration de l'instrument, dont la connaissance est requise dans le cadre du contrôle actif modal exposé au Chapitre 3. Le cadre théorique de mécanique non linéaire dans lequel s'inscrit cette étude est ensuite introduit à titre de rappel en section 2.3. En s'appuyant sur plusieurs travaux considérés comme classiques en vibrations de plaques non linéaires (modèle de Von Kármán), ces rappels visent à fournir des clés théoriques de compréhension globale afin de mieux appréhender les expériences présentées par la suite. Ils permettront notamment d'introduire de manière théorique les différents phénomènes non linéaires caractéristiques du comportement de l'instrument. Enfin, quelques expériences en régime de jeu seront présentées en section 2.4 pour illustrer expérimentalement les considérations théoriques précédemment introduites.

## 2.1 Caractérisation géométrique et mécanique du gong *xiaoluo*

### 2.1.1 Caractéristiques géométriques

Le gong *xiaoluo* fait partie de la famille des gongs d'opéra chinois. En régime de fortes amplitudes, cet instrument présente un glissement fréquentiel ascendant caractéristique de son mode fondamental (Figure 2.1).

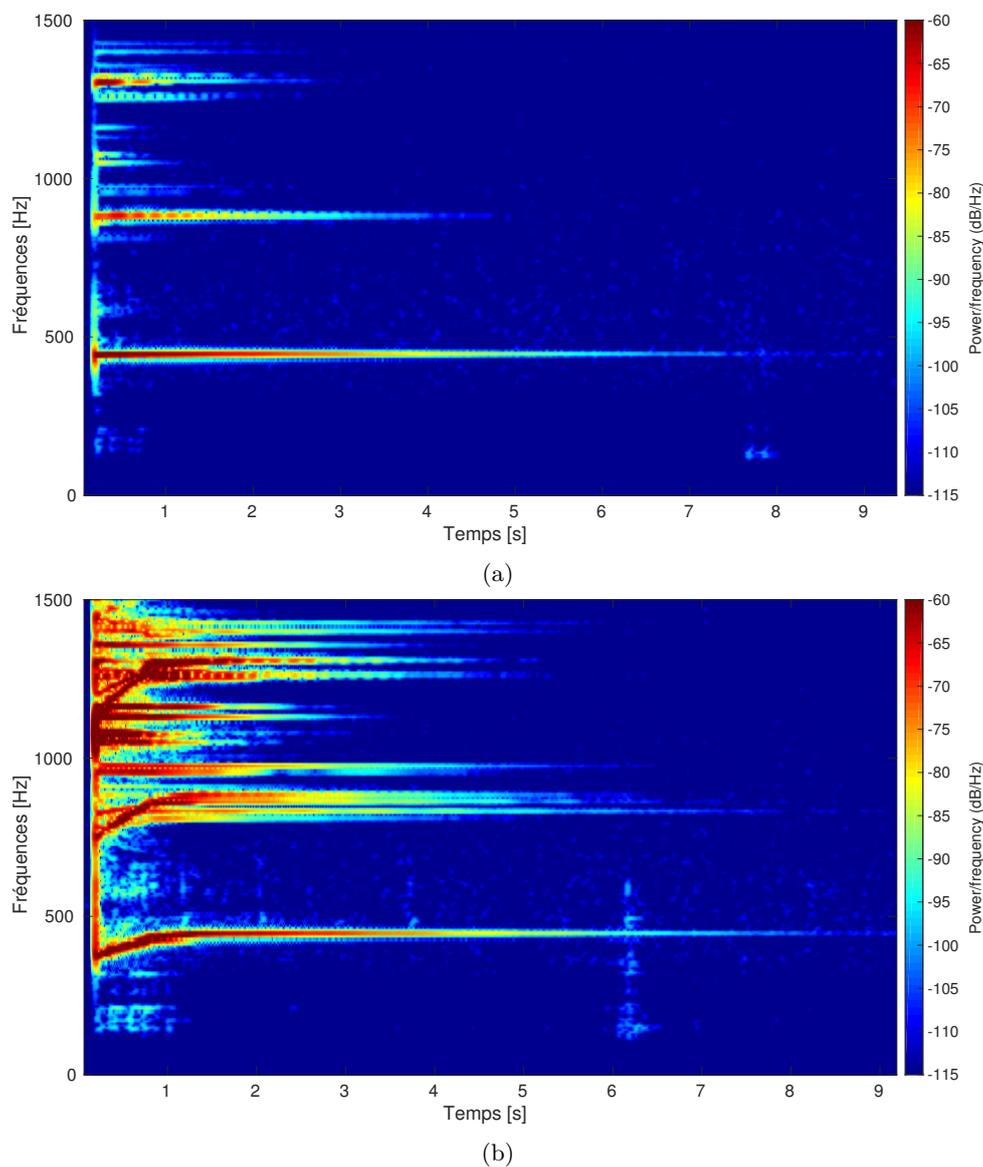


FIGURE 2.1 – Spectrogrammes de deux enregistrements sonores du gong *xiaoluo* obtenus en frappant l'instrument avec une mailloche en feutre. (a) Son du gong après une frappe faible. (b) Son du gong après une frappe forte.

Les dimensions principales du gong *xiaoluo* utilisé dans cette étude<sup>1</sup> sont répertoriées sur la Figure 2.2a. L'instrument est composé de trois parties principales :

- une partie centrale, légèrement galbée de 11.6 cm de diamètre (numéro 1 Figure 2.2a).
- une partie couronne d'environ 5 cm de large, située autour de la partie centrale mais dans un plan différent de celle-ci (numéro 2 Figure 2.2a).
- des bords recourbés de largeur 1.6 cm entourant l'instrument (numéro 3 Figure 2.2a).

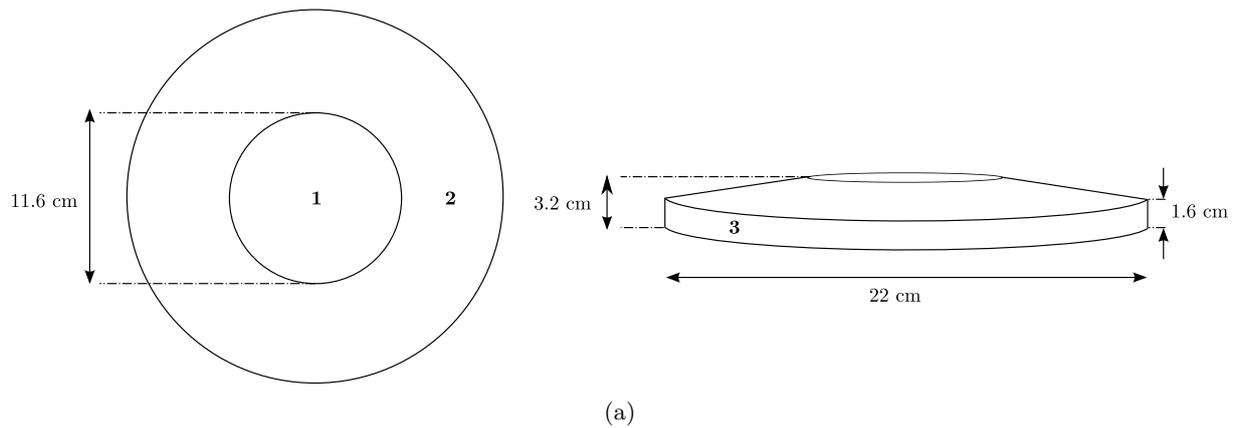


FIGURE 2.2 – Géométrie du gong *xiaoluo*. (a) Dimensions du gong et numérotation des différentes parties. (b) Photographie de l'instrument vu de face. (c) Photographie de l'instrument vu de derrière. (d) Photographie de l'instrument vu de la tranche.

1. L'acquisition de l'instrument s'est effectuée en ligne, chez un vendeur générique d'instruments de musique.

L'excitation de l'instrument se fait sur la partie centrale de la face avant (Figure 2.2b), à l'aide d'une mailloche en feutre. Il est suspendu à la main ou à un portant par l'intermédiaire d'une ficelle et deux trous qui sont percés dans les bords de l'instrument (Figure 2.2b-c). L'aspect général du gong *xiaoluo* suggère une structure fortement travaillée avec des outils variés : en témoignent les traces de martelage sur la partie centrale du gong (Figure 2.2b), ou les traces rectilignes sur le derrière de l'instrument (Figure 2.2c). L'ensemble de ces outils suggère que la micro-structure de l'instrument est fortement anisotrope.

### 2.1.2 Caractéristiques mécaniques

La composition du gong a été déterminée par une analyse chimique par émission de rayons X induite par particules chargées (Particle-Induced X-ray Emission, PIXE), réalisée par l'Accélérateur Grand Louvre d'Analyses Élémentaires (AGLAE<sup>2</sup>) du Centre de Recherche et de Restauration des Musées de France (C2RMF) au Louvre (Paris). La méthode PIXE repose sur l'émission de rayons X provoquée par des particules chargées et accélérées au sein de l'accélérateur (Figure 2.3a), interagissant avec les atomes de la structure située au bout de l'accélérateur (Figure 2.3b). En pénétrant dans l'objet à analyser, une particule du faisceau éjecte un électron proche du noyau. Le réarrangement du cortège électronique suite au retour à l'état stable de l'atome donne lieu à des rayons X, dont le niveau d'énergie est caractéristique du numéro atomique. Le système AGLAE permet de produire des faisceaux d'ions de 4 à 6 MeV. Les ions étant arrêtés au bout de quelques microns de parcours dans la structure, seule la surface de l'échantillon est analysée et la méthode est non destructive. L'analyse PIXE du gong *xiaoluo*, réalisée sur une surface de 1 mm<sup>2</sup>, révèle que l'instrument est composé à 78% de cuivre et 22% d'étain, ce qui correspond à un alliage de bronze.



FIGURE 2.3 – Accélérateur Grand Louvre d'Analyses Élémentaires (AGLAE) pour l'analyse chimique par émission de rayons X induite par particules chargées (PIXE) du gong *xiaoluo*. (a) Vue globale du système. Le gong analysé est situé dans la moitié inférieure de l'image, tout à gauche. (b) Zoom sur le gong analysé.

## 2.2 Analyse modale

Une analyse modale du gong a été effectuée sur le campus de Saint Cyr de l'Institut d'Alembert. Celle-ci a été effectuée en régime libre afin de s'affranchir d'un système d'excitation

2. <http://c2rmf.fr/analyser/un-laboratoire-de-haute-technologie-pour-les-collections-des-musees/aglae>

invasif pour la structure.

Le dispositif de l'expérience est représenté sur la Figure 2.4. Le gong est posé à l'horizontale sur deux blocs de mousse. La surface de l'instrument en contact avec la mousse est minimisée afin de garantir des conditions aux limites libres - la mousse ne vibrant qu'à très basse fréquence ( $< 50$  Hz). Le gong est excité en régime impulsionnel à l'aide d'un marteau électromagnétique posé sur un élévateur dont la hauteur est finement réglable. Le marteau, placé sous le gong, possède une tête en métal et frappe le gong situé au dessus de lui (Figure 2.5). Les paramètres d'excitation (force et durée de l'impact) sont réglés par l'utilisateur-trice.

Dans le cas d'une frappe au centre, le comportement non linéaire ne peut plus être négligé dans la réponse, ce qui pose problème pour l'identification modale. Ces désagréments concernent essentiellement les modes localisés au centre de l'instrument qui, lorsqu'ils sont excités préférentiellement, ont tendance à (i) rapidement évoluer vers un régime non linéaire présentant de la distorsion harmonique (voir section 2.3) et (ii) masquer la réponse des modes localisés sur la couronne, plus faibles en amplitude. Afin de minimiser l'excitation de ces modes centraux, l'excitation impulsionnelle est réalisée sur la couronne du gong.

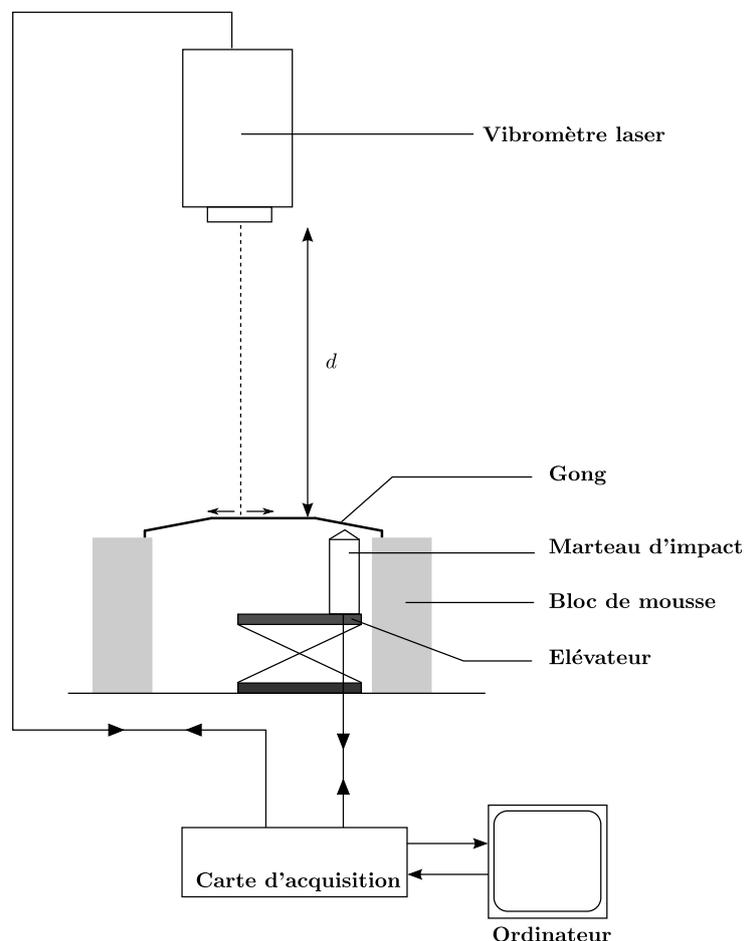


FIGURE 2.4 – Dispositif pour l'analyse modale du gong *xiaoluo*.

La réponse de l'instrument est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser (OMETRON Type V/9100 Série VP2127) situé à la verticale du dispositif d'excitation (Figure 2.4) à une distance  $d = 140$  cm de la surface supérieure du gong. Le vibromètre mesure la vitesse de la structure à une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 51200$  Hz, sur un quadrillage spatial de l'instrument

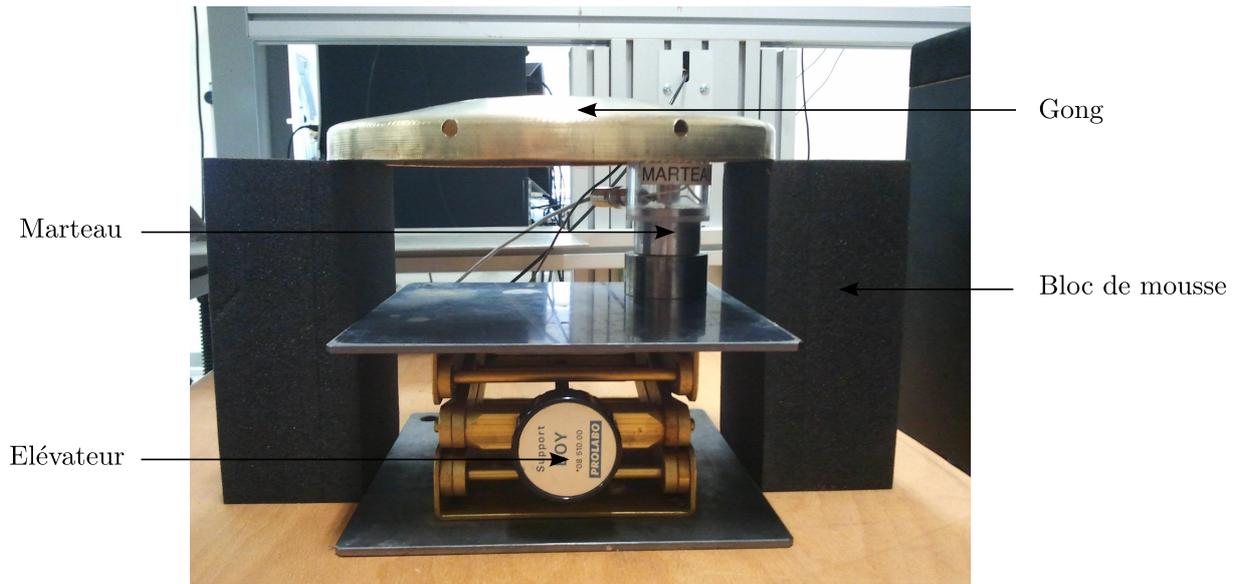
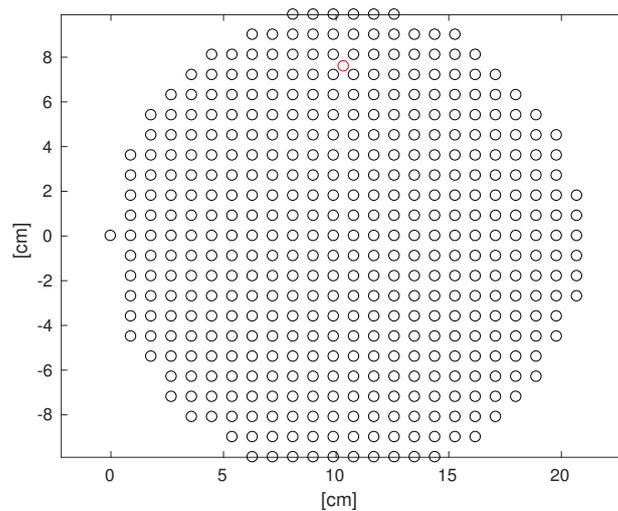


FIGURE 2.5 – Photo du montage d'excitation pour l'analyse modale.

FIGURE 2.6 – Quadrillage spatial balayé par le vibromètre laser pour l'analyse modale du gong *xiaoluo*. La position du marteau d'impact est indiquée en rouge.

constitué d'une surface rectangulaire de 429 points (Figure 2.6). Le fait que la partie centrale et la couronne de l'instrument ne se situent pas dans le même plan est négligé dans l'expérience : le quadrillage est effectué comme dans le cas d'une plaque circulaire, dans le plan de la partie centrale de l'instrument. Par ailleurs, l'angle entre le plan de la partie centrale et celui de la couronne étant faible, on suppose que la vitesse mesurée est égale à la vitesse transverse sur toute la surface du gong - y compris sur la couronne, où la vitesse mesurée réelle correspond en fait à la projection de la vitesse transverse sur l'axe du faisceau laser.

Pour chaque point de mesure  $i$  ( $i \in \llbracket 1, 429 \rrbracket$ ), le marteau d'impact excite le gong avec un impact pré-réglé à l'avance. La vitesse au point considéré  $v_i$  est alors mesurée par le vibromètre pendant 5 secondes, ainsi que le signal du marteau  $m_i$ . Ensuite, une pause de 5 secondes permet

la décroissance totale du régime libre de l'instrument, avant une nouvelle excitation du marteau et la mesure du point suivant. Les 429 signaux de vitesse obtenus à l'issue de l'expérience sont filtrés par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 5 kHz. Le protocole d'analyse des données se déroule ensuite en deux étapes :

- (i) Pour chaque point de mesure, calculer la fonction de transfert  $H_i$  associée aux signaux  $v_i$  et  $m_i$ . On suppose dans cette étape que le comportement du gong se situe dans une gamme de vibration permettant de le considérer comme linéaire.
- (ii) Moyenner spatialement toutes les fonctions de transfert  $H_i$  sur tous les points du maillage, afin d'obtenir une fonction de transfert "moyenne"  $H_{moy}$  ; cette fonction n'a pas vraiment de signification physique, mais rend compte de la dynamique globale de la structure. De cette fonction de transfert moyenne spatiale sont ensuite extraits les maxima locaux correspondant aux modes à identifier.

Pour des analyses modales effectuées en excitation forcée (bruit blanc ou balayage sinus), le contenu fréquentiel des données vibratoires de la structure est estimé en calculant la densité spectrale de puissance (DSP) qui leur est associée. De prime abord, le calcul de la DSP n'apparaît pas idéal pour l'estimation spectrale de données non stationnaires comme celles obtenues dans l'analyse en régime libre ; dans ce cas une analyse en Transformée de Fourier Discrète (TFD) est plus appropriée. Toutefois, la comparaison de la fonction de transfert moyenne obtenue avec calcul de la DSP et de la TFD (Figure 2.7) montre que l'estimation fréquentielle par DSP permet de mieux distinguer certains pics fréquentiels, du moins dans la bande 0 – 2000 Hz. L'utilisation de la DSP est donc privilégiée ici.

La DSP est caractérisée grâce à l'estimateur de Welch [1967], qui estime le spectre du périodogramme (*i.e.* le carré de la transformée de Fourier du signal). Le signal est découpé en segments de  $M$  échantillons se recouvrant entre eux sur un intervalle de  $L$  échantillons ; une fenêtre temporelle est ensuite appliquée à chaque segment de signal. Le carré du module de la TFD est déterminé ensuite pour chaque fenêtre. La moyenne temporelle des périodogrammes obtenus fournit finalement la DSP.

La fonction de transfert  $H_i$  entre le signal du marteau  $m_i$  et le signal du vibromètre  $v_i$  est calculée en chaque point du maillage en effectuant le rapport de la densité spectrale croisée des deux signaux et de la densité spectrale du marteau. La moyenne spatiale  $H_{moy}$  des fonctions de transfert  $H_i$  est ensuite calculée suivant :

$$H_{moy} = \sum_{i=1}^{429} H_i$$

Les déformées opérationnelles obtenues à partir des maxima de  $H_{moy}$  sont représentées Figures 2.8, 2.9 et 2.10.

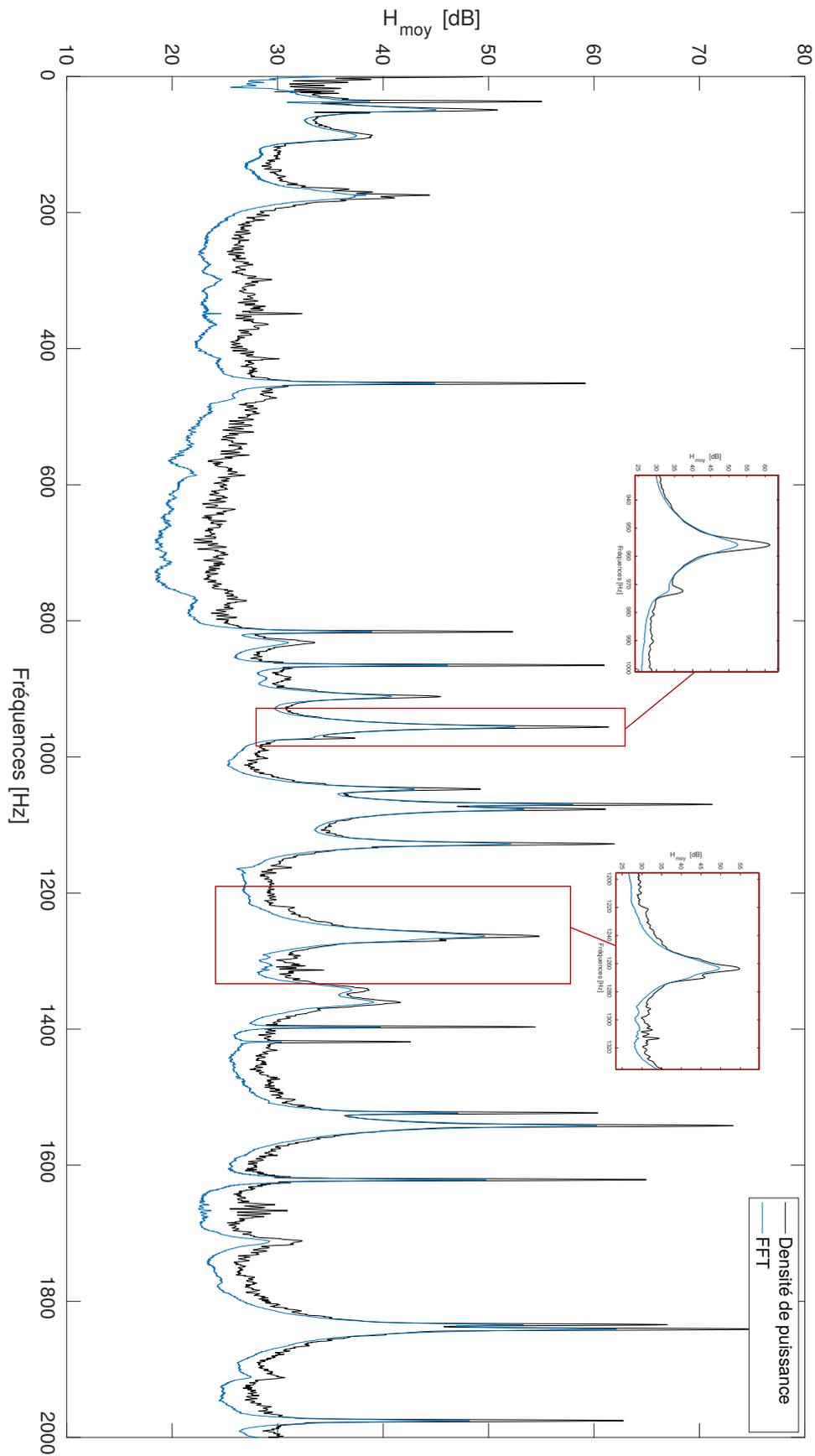


FIGURE 2.7 – Moyennes spatiales  $H_{moy}$  des fonctions de transfert entre le vibromètre et le marteau obtenues avec la DSP et la TFD. Ces deux fonctions de transfert sont moyennées sur les 429 points de la Figure 2.6.

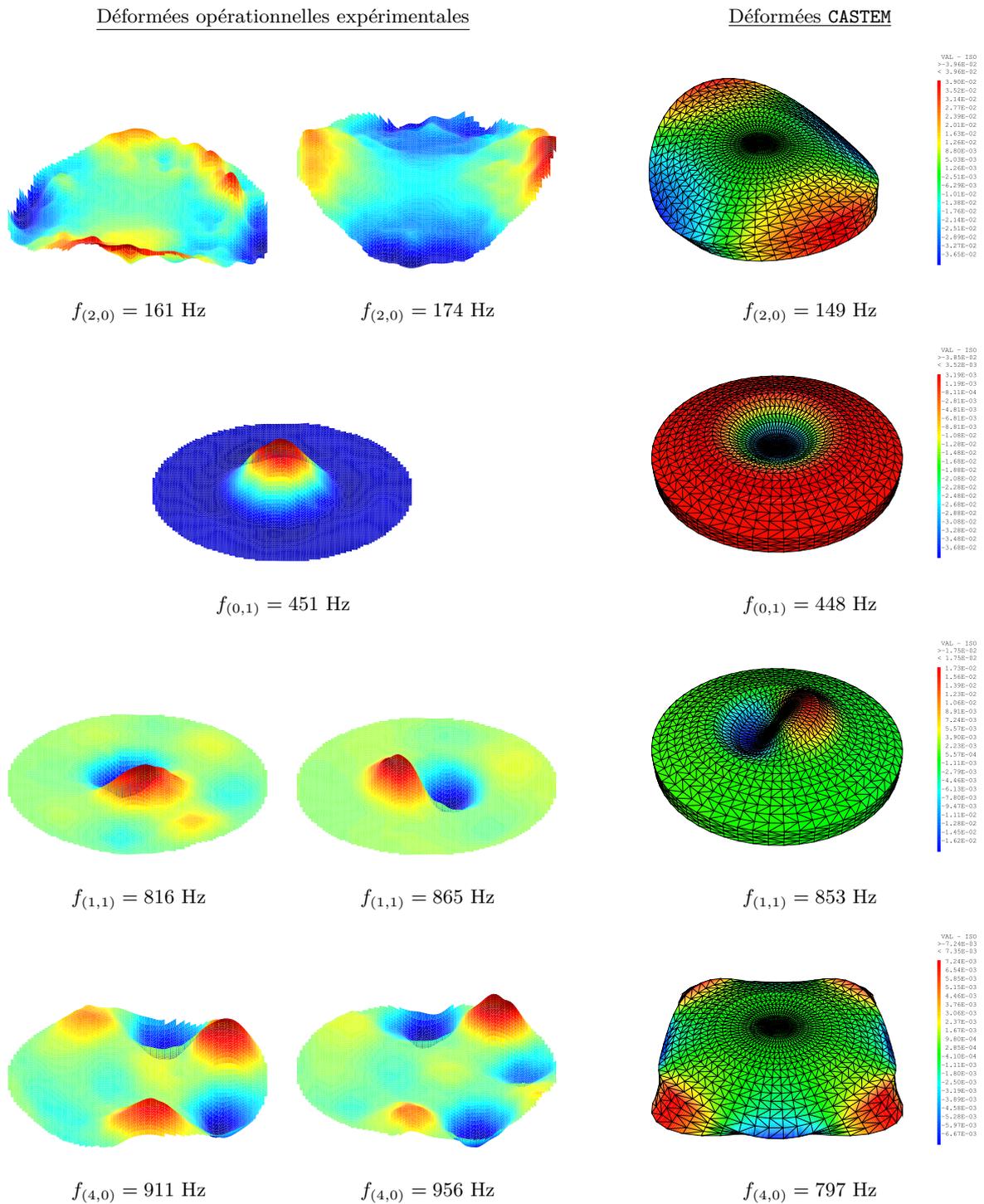


FIGURE 2.8 – Déformées opérationnelles expérimentales, et déformées modales par éléments finis obtenues avec CASTEM. Les fréquences sont notées  $f_{(k,n)}$  où  $k$  est le nombre de diamètres nodaux et  $n$  le nombre de cercles nodaux. Une seule déformée CASTEM est représentée pour les modes asymétriques.

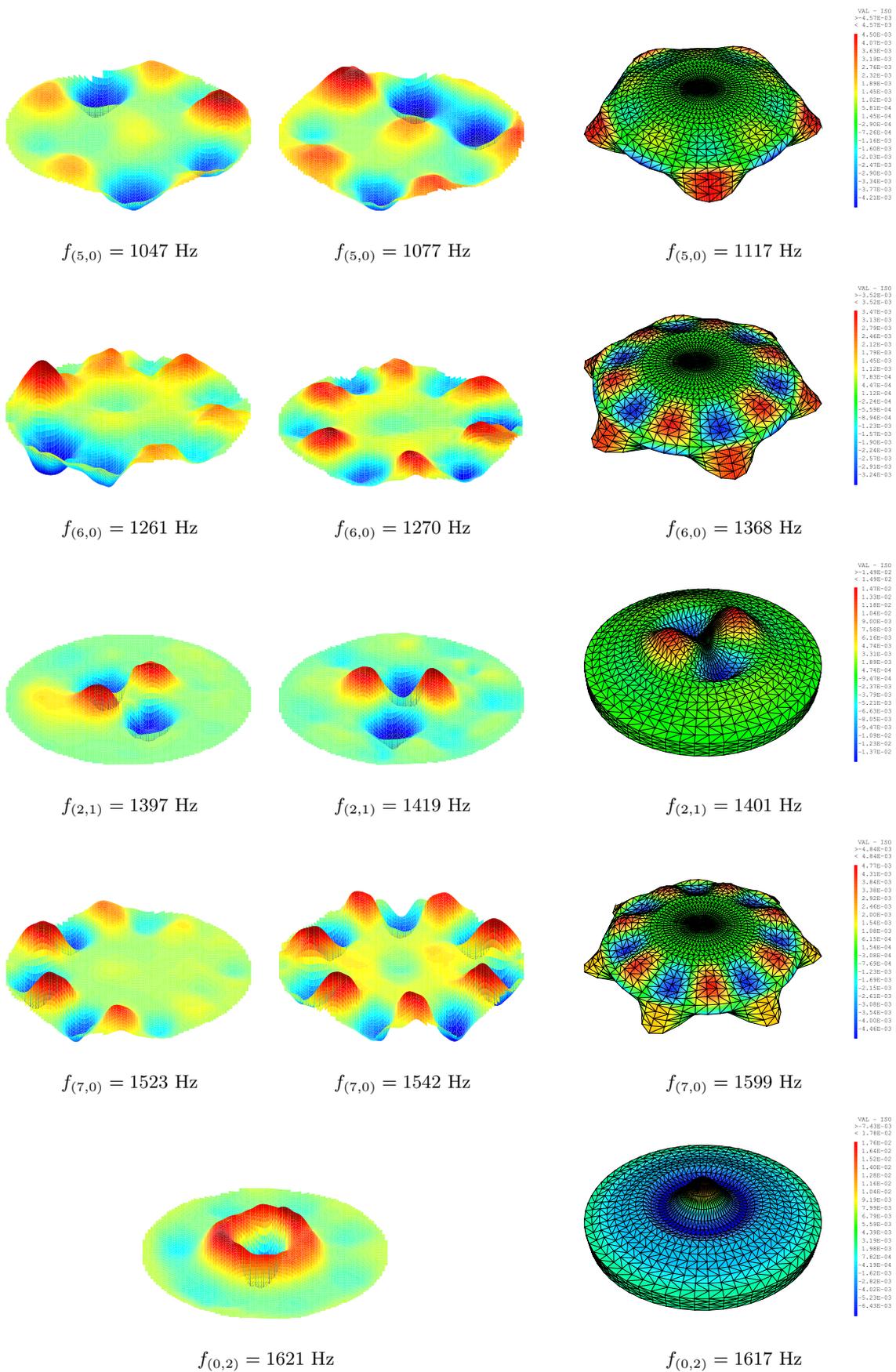


FIGURE 2.9 – Suite de la Figure 2.8

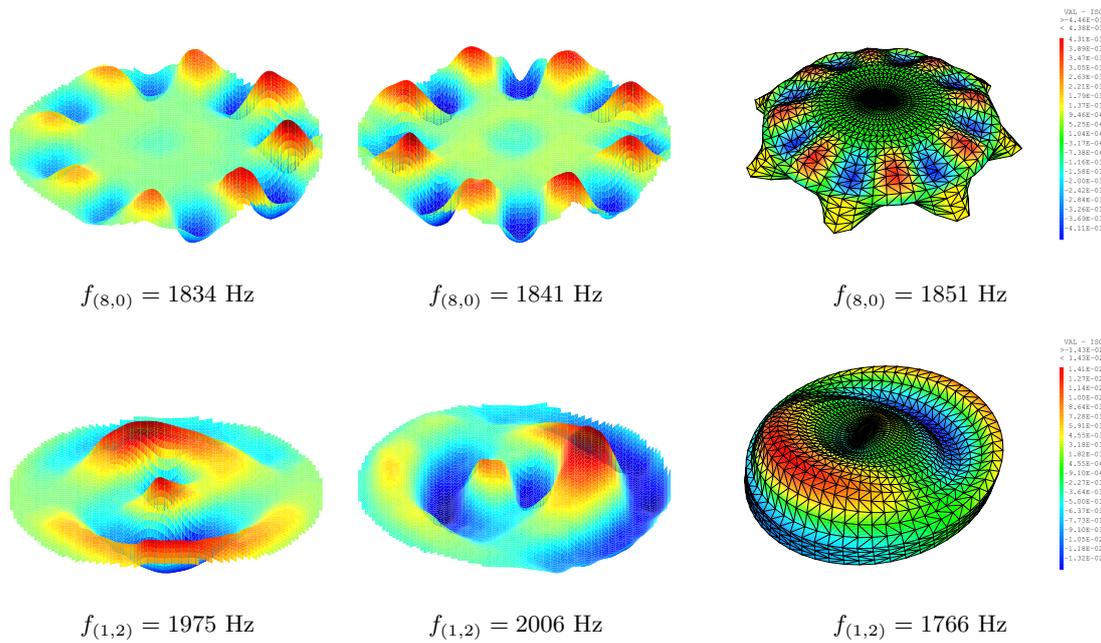


FIGURE 2.10 – Suite des Figures 2.8 et 2.9

Un calcul éléments finis des déformées modales du gong a également été réalisé avec CASTEM [2017] afin d'aider à l'identification des déformées opérationnelles. Le profil utilisé pour la modélisation correspond à une surface symétrique de révolution dont le profil correspond aux dimensions de la Figure 2.2a. En particulier, la partie centrale est supposée plane et le profil est entièrement caractérisé par des segments droits. Les éléments utilisés pour générer la surface du gong sont des éléments triangulaires TRI3 à trois nœuds linéairement interpolés. Ils correspondent à des éléments de coque mince de type DKT (Discrete Kirchhoff Triangular) avec 3 degrés de liberté en translation, et trois degrés de liberté en rotation. Ils respectent par ailleurs les hypothèses de Kirchhoff. Par simplicité la structure modélisée est supposée homogène et isotrope, de masse volumique  $\rho = 8560 \text{ kg.m}^{-3}$ , de module d'Young  $E = 110 \text{ GPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.34$ . La masse volumique  $\rho$  est calculée à partir de la masse volumique du cuivre et de l'étain et du pourcentage de l'alliage de bronze mesuré au C2RMF (section 2.1.2). Le coefficient de Poisson change peu d'un métal à un autre ; quant au module d'Young, sa valeur est choisie dans la gamme de modules d'Young admissibles pour le bronze ( $110 \text{ GPa} \leq E \leq 124 \text{ GPa}$ ) de manière à ajuster aux mieux les fréquences propres expérimentales aux fréquences propres du modèle CASTEM. Les résultats de l'analyse modale éléments finis sont indiqués sur les Figures 2.8, 2.9, et 2.10 à côté des déformées opérationnelles expérimentales correspondantes. Les déformées modales ne correspondant à aucune déformée CASTEM sont reportées en Annexe A. On remarque que la concordance entre les fréquences expérimentales et numériques s'accordent bien, avec néanmoins des décalages fréquentiels attendus étant donné la simplicité du modèle CASTEM. Par ailleurs, ces résultats font apparaître trois catégories de déformées :

- (i) un premier groupe de déformées essentiellement confinées au centre du gong, et correspondant à des modes de plaque encastree (exemples : les déformées associées aux fréquences  $f_{(0,1)} = 451 \text{ Hz}$ ,  $f_{(2,1)} = 1397 \text{ Hz}$ , ou  $f_{(2,1)} = 1419 \text{ Hz}$ ). Ce premier groupe met en évidence le mouvement de solide rigide de la couronne du gong qui correspond à un quasi encastrement pour la partie centrale de l'instrument [Thomas 2001; Fletcher 1985].
- (ii) un deuxième groupe de déformées localisées sur la couronne de l'instrument (exemples : les déformées associées aux fréquences  $f_{(6,0)} = 1261 \text{ Hz}$  et  $f_{(6,0)} = 1270 \text{ Hz}$ ).

- (iii) un troisième groupe de déformées localisées sur le centre *et* la couronne de l'instrument (exemples : les déformées associées aux fréquences  $f_{(1,2)} = 1975$  Hz et  $f_{(1,2)} = 2006$  Hz).

Il est en outre courant pour les plaques et coques à symétrie de révolution de distinguer les déformées *axisymétriques* des déformées *asymétriques*. Les premières présentent un axe de symétrie de révolution (*axisymétrique* pour *axe de symétrie*) et sont caractérisées par un nombre  $n \neq 0$  de cercles nodaux, c'est-à-dire de cercles géométriques constituant un nœud de vibration pour la déformée considérée. Par ailleurs, ces déformées ne présentent pas de diamètre nodal, c'est-à-dire une ligne de diamètre où la vibration de la déformée considérée est nulle. Au contraire, les déformées dites asymétriques ne présentent pas d'axe de symétrie de révolution. Elles peuvent en revanche présenter un ou plusieurs axes de symétrie dans le plan de la structure. En outre, ces déformées ont un nombre  $k \neq 0$  de diamètres nodaux. Lorsqu'elles ne présentent pas de cercle nodaux, ces déformées sont dites purement asymétriques ; dans le cas contraire, elles sont dites asymétriques mixtes. Toutes les déformées asymétriques sont associées par paires, du fait de la dégénérescence double des modes propres associés à leur fréquence propre [Meirovitch 1967]. Ces deux modes sont appelés *configurations préférentielles* ; ils sont associés à la même fréquence si la structure présente une symétrie parfaite, et à des fréquences différentes lorsque des défauts de symétrie apparaissent dans la structure. Ceci est mis en évidence en comparant les déformées opérationnelles des Figures 2.8, 2.9 et 2.10 : les fréquences des modes compagnons asymétriques du modèle CASTEM, qui concerne une structure virtuelle symétrique, sont identiques<sup>3</sup> ; à l'inverse, les fréquences modales des modes compagnons asymétriques de la structure *réelle* du gong, donc non symétrique *a priori*, sont différentes.

Les déformées sont représentées schématiquement par leur couple  $(k, n)$ . A titre d'exemple, les déformées dont la fréquence est notée  $f_{(2,1)}$  possèdent deux diamètres nodaux et un cercle nodal. Un récapitulatif des dénominations axisymétrique et asymétrique est donné dans la Table 2.1. Des exemples de représentation schématique utilisant le couple  $(k, n)$  y sont également donnés. Sur la Figure 2.11, cette représentation schématique est utilisée pour représenter les modes associés aux pics de  $H_{moy}$ . Les points d'interrogation se rapportent aux pics pour lesquels les déformées n'ont pas été identifiées (voir Annexe A).

Dénomination	Conditions sur $(k, n)$	Exemple et représentation
Axisymétrique	$(0, n), n \in \mathbb{N}^*$	$(0, 2)$ 
Asymétrique pur	$(k, 0), k \in \mathbb{N}^*$	$(4, 0)$ 
Asymétrique mixte	$(k, n) \in \mathbb{N}^{*2}$	$(1, 1)$ 

TABLE 2.1 – Récapitulatif des dénominations accordées aux déformées opérationnelles, et de la notation  $(k, n)$  correspondante.

3. Par souci de lisibilité, une seule déformée CASTEM a été exposée pour les modes asymétriques.



## 2.3 Non-linéarités géométriques dans les structures minces

A la suite des caractéristiques mécaniques générales introduites à la section précédente, cette section s'intéresse plus particulièrement à la dynamique non linéaire du gong *xiaoluo*.

Une approche simplifiée pour appréhender la dynamique des instruments de la famille des gongs consiste à assimiler leur géométrie à des structures minces à symétrie de révolution, à savoir des plaques et des coques circulaires [Fletcher and Rossing 2005]. Cette approximation permet d'utiliser l'analogie dynamique [Hermann 1955] des équations de Von Kármán [1910], qui s'attachent au problème statique des structures minces soumises à de "grands" déplacements, c'est-à-dire de l'ordre de leur épaisseur. Les structures de ce type présentent des non-linéarités *géométriques* ; ces non-linéarités se manifestent dans la relation liant la déformation et le déplacement, qui pour de grandes valeurs d'amplitude ne peut plus être considérée comme linéaire ; en revanche, le matériau de la structure étudiée reste supposément dans le domaine élastique linéaire.

Le développement analytique détaillé des équations de Von Kármán dans le cas des plaques et des coques est décrit dans les références [Nayfeh and Mook 1995; Thomas 2001; Touzé et al. 2002], qui fournissent une bibliographie relativement exhaustive sur le sujet. Les équations de Von Kármán sont exposées (section 2.3.1), puis adimensionnées (section 2.3.2). Ensuite, une approche globale de résolution analytique consiste à calculer les modes propres associés au problème linéarisé (partie spatiale de la solution) et à projeter la solution non linéaire recherchée sur cette base modale. Cette étape est réalisée section 2.3.3. Cette projection produit un système d'équations différentielles du second ordre, non linéaires, couplées entre elles, régissant les coordonnées temporelles des modes propres (partie temporelle de la solution). A partir de ce système d'équations, quelques phénomènes typiques des non-linéarités géométriques peuvent être déduits (section 2.3.4).

### 2.3.1 Équations du mouvement

Dans le cadre du modèle dynamique de Von Kármán établi dans cette étude, les hypothèses utilisées sont les suivantes :

1. Le gong *xiaoluo* est assimilé à une coque de révolution d'épaisseur  $h$ , de rayon de courbure  $R$  et de rayon  $a_0$ . Son matériau est considéré comme étant homogène et isotrope, et caractérisé par la densité  $\rho$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et le module d'Young  $E$ . L'hypothèse d'isotropie est forte au regard de l'anisotropie observée de l'instrument. Cependant, cette hypothèse ne change fondamentalement pas les étapes de la modélisation<sup>4</sup>. Par ailleurs, la coque est supposée mince ( $h/a_0 \ll 1$  et  $h/R \ll 1$ ) et peu profonde ( $a_0/R \ll 1$ ). Ces hypothèses sont vérifiées par les dimensions du gong, représentées sur la Figure 2.12<sup>5</sup>.
2. Les hypothèses de Kirchhoff-Love [1888] sont respectées : tout segment droit et normal au plan moyen le reste après déformation, et le cisaillement est négligé.
3. Le comportement du matériau reste élastique linéaire.
4. L'inertie de rotation et l'inertie longitudinale sont négligées.
5. Le déplacement longitudinal est d'un ordre de grandeur inférieur au déplacement transverse  $w$  au plan médian.
6. Le déplacement transverse est de l'ordre de l'épaisseur  $h$  (cette hypothèse sera discutée au Chapitre 4).

---

4. Pour la prise en compte de défauts de forme dans les modèles de Von Kármán, on pourra se référer aux travaux de Camier [2009].

5. Le rayon de courbure  $R$  est calculé à partir de  $a_0$  et  $h$  par un théorème de Pythagore.

7. Les rotations sont supposées modérées : les sinus et cosinus des angles de rotation  $\theta$  de la normale au plan moyen sont linéarisables au premier ordre.

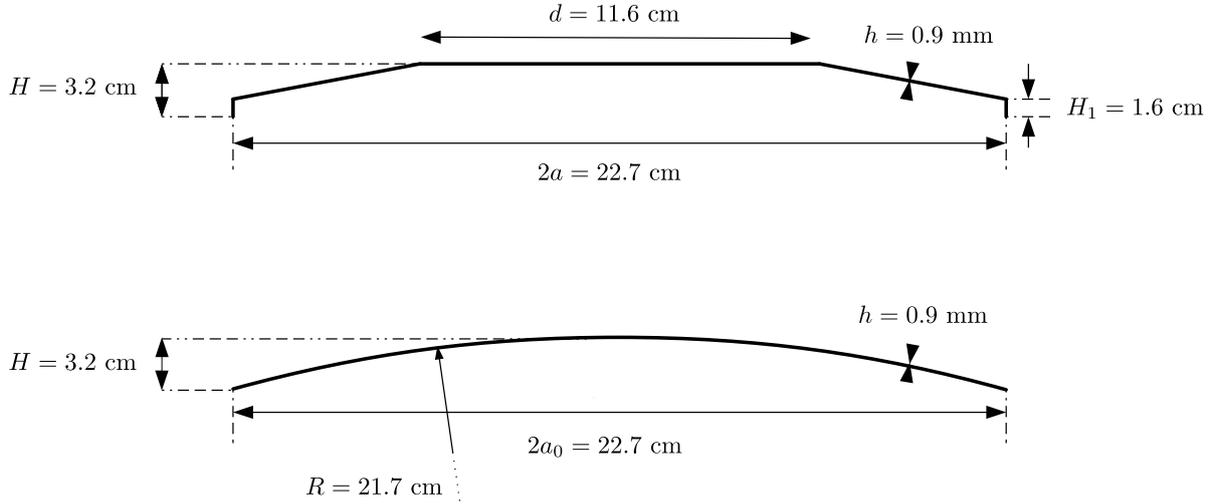


FIGURE 2.12 – Schéma et dimensions du gong vue de profil ainsi que de la coque de révolution équivalente considérée dans cette étude pour le modéliser.

De ces hypothèses il est possible de déduire les équations locales pour le déplacement transverse  $w$  pour une coque sphérique [Thomas et al. 2005] :

$$D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\Delta F + \rho h\ddot{w} = L(w, F) - c\dot{w} + P \quad (2.1)$$

$$\Delta\Delta F - \frac{Eh}{R}\Delta w = -\frac{Eh}{2}L(w, w) \quad (2.2)$$

où  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité en flexion,  $\Delta$  est le Laplacien,  $c$  est le coefficient d'amortissement supposé visqueux,  $P$  la pression extérieure normale et  $\ddot{w}$  la dérivée seconde de  $w$  par rapport au temps. Dans le cas où les coordonnées cylindriques sont adoptées ( $w = w(r, \theta)$  avec  $r \in [0, a]$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ ), l'opérateur bilinéaire  $L$  s'écrit :

$$L(w, F) = w_{,rr} \left( \frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left( \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right)$$

où la notation  $(\cdot)_{,ij} = \partial^2(\cdot)/\partial i \partial j$  est adoptée. La grandeur  $F$  regroupe les efforts de membrane et est détaillée dans [Thomas et al. 2005]. Notons que pour  $R \rightarrow \infty$ , (2.1) et (2.2) correspondent au cas des plaques.

L'équation (2.1) régit le mouvement transversal de la coque, tandis que l'équation (2.2) gouverne le mouvement longitudinal. Le couplage de ces deux mouvements par l'opérateur  $L$  exprime le couplage *membrane-flexion non linéaire*. Ce dernier est illustré par le fait qu'un déplacement transverse important entraîne une variation de la surface moyenne, et donc un chargement de celle-ci par l'intermédiaire du terme  $L(w, w)$ . C'est le même effet qui est observé dans le cas d'une corde dont la tension varie quand on l'écarte de sa position au repos. En plus de ce couplage membrane-flexion non linéaire, un couplage membrane-flexion *linéaire* est aussi présent du fait de la courbure initiale de la structure, paramétrée par  $R$  (termes  $\frac{1}{R}\Delta F$  et  $\frac{Eh}{R}\Delta w$ ).

À ces équations sont adjointes des conditions aux limites libres, imposant des conditions sur  $F$  et  $w$  en  $r = 0$  et  $r = a_0$  [Thomas et al. 2005] telles que :

$$\begin{aligned} F_{,r} + \frac{1}{a_0}F_{,\theta\theta} &= 0, \quad F_{,r\theta} - \frac{1}{a_0}F_{,\theta} = 0, \quad \text{en } r = a_0, \\ w_{,rr} + \frac{\nu}{a_0}w_{,r} + \frac{\nu}{a_0^2}w_{,\theta\theta} &= 0, \quad \text{en } r = a_0, \\ w_{,rrr} + \frac{1}{a_0}w_{,rr} - \frac{1}{a_0^2}w_{,r} + \frac{2-\nu}{a_0^2}w_{,r\theta\theta} - \frac{3-\nu}{a_0^3}w_{,\theta\theta} &= 0, \quad \text{en } r = a_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 2.3.2 Adimensionnement

Il est courant d'adimensionner les équations (2.1) et (2.2) afin de faire apparaître l'ordre de grandeur entre le mouvement transverse  $w$  et l'épaisseur  $h$ . Les variables adimensionnées sont définies suivant :

$$w = w_0\tilde{w}, \quad F = F_0\tilde{F}, \quad r = a_0\tilde{r}, \quad t = T_0\tilde{t}, \quad c = c_0\tilde{c}, \quad P = p_0\tilde{P}$$

où le symbole  $\tilde{\phantom{x}}$  caractérise les variables adimensionnées du problème, avec :

$$w_0 = \frac{h^3}{a_0^2}, \quad T_0 = a_0^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad F_0 = \frac{Eh^7}{a_0^4}, \quad c_0 = \frac{2Eh^4}{Ra_0^2}\sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad p_0 = \frac{Eh^7}{Ra_0^6} \quad (2.4)$$

En ré-écrivant les équations (2.1) et (2.2) avec ces variables adimensionnées, et en omettant le symbole d'adimensionnement  $\tilde{\phantom{x}}$  pour plus de clarté, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w + \epsilon_q\Delta F + \ddot{w} &= \epsilon_c L(w, F) + \epsilon_q(-2c\dot{w} + P) \\ \Delta\Delta F - \frac{a_0^4}{Rh^3}\Delta w &= \frac{-1}{2}L(w, w) \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec [Thomas et al. 2005] :

$$\begin{aligned} \epsilon_q &= 12(1 - \nu^2)\frac{a_0^2}{Rh^2}w_0 \\ \epsilon_c &= 12(1 - \nu^2)\frac{w_0^2}{h^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

En pratique, plusieurs adimensionnements sont possibles pour le choix de  $w_0$  dans (2.4). En général, ce choix est justifié par l'emploi de méthodes perturbatives au moment de l'établissement du modèle réduit. La méthode des échelles multiples, utilisée section 2.3.4, nécessite notamment que les termes non linéaires soient d'un ordre de grandeur inférieur aux termes linéaires. Or d'après (2.6), l'importance relative des termes non linéaires gouvernés par les coefficients  $\epsilon_q$  et  $\epsilon_c$  dépend de  $w_0$ .

Quelques cas particuliers se dégagent alors :

- Si  $w_0 = h$ , alors  $\epsilon_q$  et  $\epsilon_c$  sont supérieurs à 1 et les termes non linéaires sont d'un ordre de grandeur égaux ou supérieurs aux termes linéaires. C'est le choix adopté dans [Touzé and Amabili 2006; Camier 2009].
- Si  $w_0 = \frac{h^2}{a_0}$ , seuls les termes cubiques sont petits par rapport aux termes linéaires. C'est le cas qui est choisi dans les modèles développés dans [Thomas 2001], et plus généralement dans l'étude des plaques - il n'y a pas de termes quadratiques.
- Si  $w_0 = \frac{h^3}{a_0^2}$ , les termes cubiques et quadratiques sont petits devant les termes linéaires. C'est en général l'hypothèse adoptée lors de l'utilisation d'une méthode de perturbation sur un système présentant des non-linéarités quadratiques et cubiques [Thomas et al. 2005].

Le dernier point justifie le choix de  $w_0$  adopté dans (2.4). Celui-ci respecte le domaine de validité mathématique de la méthode des échelles multiples utilisée section 2.3.4. L'hypothèse  $w \sim \frac{h^3}{a_0^3}$  sera par ailleurs confrontée à la mesure expérimentale du déplacement transverse au Chapitre 4.

### 2.3.3 Projection modale

La résolution analytique des problèmes continus de vibration passe souvent par la discrétisation des équations du mouvement sur une base de fonctions - cette méthode est aussi connue sous le nom de méthode de Galerkin. Cette décomposition sépare le problème spatial du problème temporel. Il est alors possible d'utiliser la base des modes propres du problème linéaire associé au problème non linéaire comme base de fonctions pour la discrétisation [Nayfeh and Mook 1995]. Dans le cas qui nous intéresse ici, les modes propres transversaux  $(\Phi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et longitudinaux  $(\Psi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  du problème linéaire conservatif associé à (2.5) sont solutions du problème spatial défini par :

$$\Delta\Delta\Phi + \chi\Delta\Psi - \omega^2\Phi = 0 \quad (2.7)$$

$$\Delta\Delta\Psi + \Delta\Phi = 0 \quad (2.8)$$

et associé aux conditions limites libres (2.3). Le paramètre  $\chi = \epsilon_q^2/\epsilon_c = 12(1 - \nu^2)\frac{a_0^4}{R^2h^2}$  est un paramètre géométrique de la coque ne dépendant pas de  $w_0$ . La solution du problème non linéaire (2.5), notée  $w(r, \theta, t)$ , est alors recherchée sous la forme :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi_k(r, \theta)q_k(t) \quad (2.9)$$

où  $\Phi_k(r, \theta)$  désigne le  $k$ -ième mode propre du problème linéaire, solution de (2.7), et  $q_k$  la coordonnée modale temporelle associée. Les efforts de membrane  $F$  sur la base des  $(\Psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , solutions de (2.8), sont de même écrits :

$$F(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi_k(r, \theta)\zeta_k(t) \quad (2.10)$$

Après avoir introduit les équations (2.9) et (2.10) dans (2.5) et projeté le résultat sur le mode propre  $\Phi_p$ , les équations modales suivantes sont obtenues pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\ddot{q}_p(t) + \omega_p^2 q_p(t) = -\epsilon_q \left( \sum_{i,j=1}^{+\infty} \beta_{ij}^p q_i(t)q_j(t) \right) - \epsilon_c \left( \sum_{i,j,k=1}^{+\infty} \Gamma_{ijk}^p q_i(t)q_j(t)q_k(t) \right) \quad (2.11)$$

Les expressions analytiques des coefficients  $(\beta_{ij}^p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\Gamma_{ijk}^p)_{p \in \mathbb{N}}$  sont décrites dans [Touzé and Thomas 2006]. Ainsi, le problème (2.5) est remplacé par le problème équivalent (2.11), constitué d'une infinité d'oscillateurs couplés non linéairement par les coefficients  $(\beta_{ij}^p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\Gamma_{ijk}^p)_{p \in \mathbb{N}}$ . Les termes non linéaires quadratiques sont dus à la présence conjuguée des deux sources de couplage : linéaire (dus à la courbure de la structure, *i.e.*  $R$  fini), et non linéaire (liées aux non-linéarités géométriques). Sans les termes de couplage dus à la courbure, c'est-à-dire dans le cas d'une plaque, l'équation (2.11) ne contiendrait que des termes cubiques (et  $\forall (i, j, p) \in \mathbb{N}^3, \beta_{ij}^p = 0$ ).

### 2.3.4 Phénomènes non linéaires

Dans cette section, les phénomènes non linéaires principaux présents dans la dynamique du gong *xiaoluo* sont mis en évidence à partir des développements précédents. Dans un premier

temps, l'équation (2.11) est réduite à un seul oscillateur. Sa résolution analytique par une méthode de perturbation permet de mettre en évidence les phénomènes classiques de distorsion harmonique et de dépendance de la fréquence vis-à-vis de l'amplitude. La méthode de perturbation utilisée est la méthode des échelles multiples, également employée au Chapitre 4. Cette méthode est ensuite utilisée pour introduire la notion de courbe de résonance non linéaire, en considérant cette fois le régime forcé du même oscillateur. Enfin, la prise en compte d'oscillateurs supplémentaires dans la modélisation permet d'introduire la notion de résonance interne entre modes de vibration.

### 2.3.4.1 Régime uni-modal libre : distorsion harmonique et glissement fréquentiel

Considérons un unique oscillateur  $p = 1$  dans le cas conservatif de (2.11) :

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) + \epsilon_q \beta X^2(t) + \epsilon_c \Gamma X^3(t) = 0 \quad (2.12)$$

où  $X = q_1$ ,  $\omega_0 = \omega_1$ ,  $\beta = \beta_{11}^1$  et  $\Gamma = \Gamma_{111}^1$ . Cette équation est solvable analytiquement par des méthodes de perturbation [Nayfeh 1973]. Parmi celles-ci, la méthode des échelles multiples consiste à considérer les termes non linéaires des équations dynamiques comme une petite perturbation des termes linéaires. Cette perturbation est introduite par un paramètre  $\epsilon \ll 1$  mis en facteur des termes non linéaires de l'équation. Dans l'équation (2.12), le terme non linéaire cubique est supposé comme étant au moins un ordre de grandeur inférieur au terme non linéaire quadratique. En effet :

$$\epsilon_c = \left(\frac{h}{a_0}\right)^3 \cdot \left(\frac{R}{a_0}\right) \cdot \epsilon_q$$

ce qui pour les dimensions du gong (Figure 2.2a) implique :

$$\epsilon_c \sim 10^{-6} \epsilon_q$$

Il est donc possible de travailler avec un unique paramètre  $\epsilon \sim \epsilon_q \ll 1$  et de transformer l'équation (2.12) en :

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) + \epsilon \beta X^2(t) + \epsilon^2 \Gamma X^3(t) = 0 \quad (2.13)$$

La méthode des échelles multiples consiste à introduire plusieurs échelles de temps  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en puissance de  $\epsilon$  :

$$T_n = \epsilon^n t, \quad n \in \mathbb{N}$$

La solution  $X(t)$  de l'équation (2.13) est alors aussi cherchée sous la forme d'un développement en puissances de  $\epsilon$  :

$$X(t) = X_0(T_0, T_1, \dots) + \epsilon X_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 X_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (2.14)$$

Avec les nouvelles variables temporelles, les dérivées par rapport au temps se ré-écrivent, en se restreignant à l'ordre 2 en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + O(\epsilon^3) \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

où  $\forall n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ . En ré-écrivant l'équation (2.13) avec les nouvelles variables et en ordonnant les termes en puissances de  $\epsilon$ , on obtient :

$$D_0^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 = 0 \quad (2.15)$$

$$D_0^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = -2D_0 D_1 X_0 - \beta X_0^2 \quad (2.16)$$

$$D_0^2 X_2 + \omega_0^2 X_2 = -2D_0 D_1 X_1 - D_1^2 X_0 - 2D_0 D_2 X_0 - 2\beta X_0 X_1 - \Gamma X_0^3 \quad (2.17)$$

La solution de (2.15) (ordre 0) est connue :

$$X_0(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0}$$

où  $\bar{A}$  est le complexe conjugué de  $A$ . En remplaçant cette expression dans l'équation (2.16) qui régit la solution d'ordre 1 en  $\epsilon$ , il vient :

$$D_0^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 T_0} - \beta \left( A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + A\bar{A} \right) + CC \quad (2.18)$$

où la dénomination  $CC$  indique le complexe conjugué du terme de droite de l'équation (2.18). L'équation (2.18) contient un terme résonant  $e^{i\omega_0 T_0}$  venant forcer l'oscillateur à sa fréquence de résonance  $\omega_0$ . Ce terme donne lieu dans la solution de (2.18) à un terme dit *séculaire*, non borné, rendant invalide la solution aux temps longs. Pour obtenir une solution valide en temps, il est nécessaire d'annuler ce terme, en imposant une *condition de solvabilité* [Nayfeh and Mook 1995] à l'équation (2.18). Dans notre cas, celle-ci s'écrit :

$$D_1 A = 0$$

ce qui revient à imposer que  $A$  soit indépendant de  $T_1$ . L'équation différentielle (2.18) est alors résolue classiquement :

$$X_1 = \frac{\beta A^2}{3\omega_0^2} e^{2i\omega_0 T_0} - \frac{\beta}{\omega_0^2} A\bar{A} + CC$$

La solution  $X_1$  est à présent injectée dans (2.17), et les termes séculaires sont annulés en imposant une deuxième condition de solvabilité.  $A$  est alors supposé de la forme  $A = \frac{1}{2} a e^{i\phi}$ , puis ré-injecté dans la deuxième condition de solvabilité. Il est alors possible d'exprimer la solution  $X$  de l'équation en fonction de  $X_0$  et  $X_1$ , suivant l'équation (2.14). Il vient alors [Nayfeh and Mook 1995] :

$$X(t) = \epsilon a \cos(\omega t + \phi_0) - \frac{\epsilon^2 a^2 \beta}{2\omega_0^2} \left( 1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\phi_0) \right) + O(\epsilon^3) \quad (2.19)$$

où

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{8\omega_0^2} (3\Gamma - \frac{10\beta^2}{3\omega_0^2}) \epsilon^2 a^2 \right) + O(\epsilon^3) \quad (2.20)$$

La valeur de la constante  $\phi_0$  n'est pas précisée ici. A partir de ces deux résultats, deux phénomènes sont à souligner :

- Premièrement, d'après l'équation (2.20), la pulsation principale d'oscillation  $\omega$  de la réponse  $X(t)$  du système considéré *dépend de l'amplitude  $a$* . La dépendance de la fréquence vis-à-vis de l'amplitude est directement liée au glissement fréquentiel caractéristique du gong *xiaoluo*. Ceci est démontré expérimentalement à la section 2.4. La tendance du glissement fréquentiel, c'est-à-dire le fait que la fréquence augmente (respectivement diminue) quand l'amplitude de vibration diminue définit un comportement assouplissant (respectivement raidissant), et dépend du signe de  $T_p = 3\Gamma - \frac{10\beta^2}{3\omega_0^2}$  dans l'équation (2.20). Le signe de  $T_p$  désigne ce qu'on appelle *la tendance de non-linéarité* du système. Dans le cas d'une plaque ( $\beta = 0$ ), la tendance de non-linéarité est toujours raidissante. Dans le cas d'une coque, les deux comportements (assouplissant ou raidissant) sont observés, en fonction du signe de  $T_p$ . La courbe amplitude-fréquence en régime libre est appelée *backbone curve*<sup>6</sup> du système.

---

6. Il n'existe pas de traduction française littérale à la connaissance de l'auteur.

- Deuxièmement, au premier ordre en perturbation, la réponse  $X(t)$  contient un terme oscillant à la pulsation propre  $\omega \sim \omega_0$ , suivi d'un terme à la pulsation double  $2\omega \sim 2\omega_0$ . Ainsi, les non-linéarités introduisent une *distorsion harmonique* dans la réponse du système, c'est-à-dire des composantes fréquentielles multiples de la fréquence propre. Dans le cas présent, l'ordre du calcul met en évidence une composante paire à  $2\omega$ , mais un calcul à l'ordre supérieur souligne une composante impaire à  $3\omega$ . Les composantes paires et impaires de distorsion harmonique sont respectivement dues aux termes quadratiques et cubiques des équations modales issues du modèle de Von Kármán. Les phénomènes de distorsion harmonique sur le gong sont observés section 2.4.

### 2.3.4.2 Régime uni-modal forcé

Bien que l'essentiel de ce travail ne concerne que l'étude en vibrations libres, l'étude de l'oscillateur (2.12) en régime forcé met en évidence les caractéristiques de courbes de résonances non linéaires (définies équation (2.22)), mesurées expérimentalement au Chapitre 4. Cette fois-ci, l'équation non-conservative est considérée :

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2X(t) + \epsilon\beta X^2(t) + \epsilon^2\Gamma X^3(t) = \epsilon^2Q \cos(\Omega t) \quad (2.21)$$

où  $\xi$ ,  $Q$  et  $\Omega$  sont respectivement le taux d'amortissement, l'amplitude et la fréquence de forçage. L'ordre de grandeur du forçage ( $\epsilon^2$ ) est choisi égal à l'ordre de grandeur du plus petit terme non linéaire [Nayfeh and Mook 1995]. La réponse du système à un tel forçage est cherchée par la méthode des échelles multiples. Dans ce cas, il est courant d'utiliser comme paramètre un paramètre de désaccord  $\sigma$  quantifiant le décalage de la fréquence  $\Omega$  à la fréquence propre linéaire du système  $\omega_0$  :

$$\epsilon\sigma = \Omega - \omega_0$$

En cherchant comme précédemment  $X$  sous la forme d'un développement en  $\epsilon$ , la solution d'ordre zéro est  $X_0(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + CC$  avec  $A = \frac{a}{2}e^{i\phi}$ ,  $a$  et  $\phi$  qui ne dépendent là encore que de  $T_2$ . A la différence du calcul précédent, une condition de régime permanent est imposée afin d'obtenir la *courbe de résonance non linéaire* du système, c'est-à-dire la relation entre le désaccord  $\sigma$  et l'amplitude  $a$  [Nayfeh and Mook 1995] :

$$\sigma = \frac{9\Gamma\omega_0^2 - 10\beta^2}{24\omega_0^3}a^2 \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4\omega_0^2a^2} - \xi^2\omega_0^2a^2} \quad (2.22)$$

D'après l'équation (2.22), la valeur de l'amplitude  $a$  est multivaluée pour certaines valeurs de  $\sigma$ . Nayfeh et Mook [1995] ont montré que seules deux des trois valeurs possibles de l'amplitude  $a$  mènent à des solutions stables ; en régime permanent, le système se place sur l'une ou l'autre des solutions stables, en fonction des conditions initiales. Les courbes de résonances non linéaires de l'oscillateur (2.21) dans le cas linéaire  $(\beta, \Gamma) = (0, 0)$  et non linéaire  $(\beta, \Gamma) \neq (0, 0)$  sont visibles sur les Figures 2.13a et 2.13b pour des amplitudes de forçage  $Q$  croissantes. Les deux branches stables de la solution sont indiquées en traits pleins, et la branche instable en pointillés. La courbure de la courbe de résonance traduit la présence de termes non linéaires, et augmente avec le forçage. Par ailleurs, au premier ordre, la *backbone curve* définie par (2.20) correspond aux maxima de la courbe définie par (2.22) (Figure 2.13c) : c'est la courbe amplitude-fréquence parcourue par l'oscillateur en régime libre. Lors de mesures expérimentales de courbes de résonances non linéaires, le système se place sur l'une des deux solutions stables en régime permanent, donnant lieu à des phénomènes de saut et d'hystérésis [Nayfeh and Mook 1995]. En fonction des conditions initiales sur le forçage, c'est-à-dire du sens parcouru par le forçage sur l'axe des fréquences, les branches parcourues par le système sont différentes. Cet aspect est

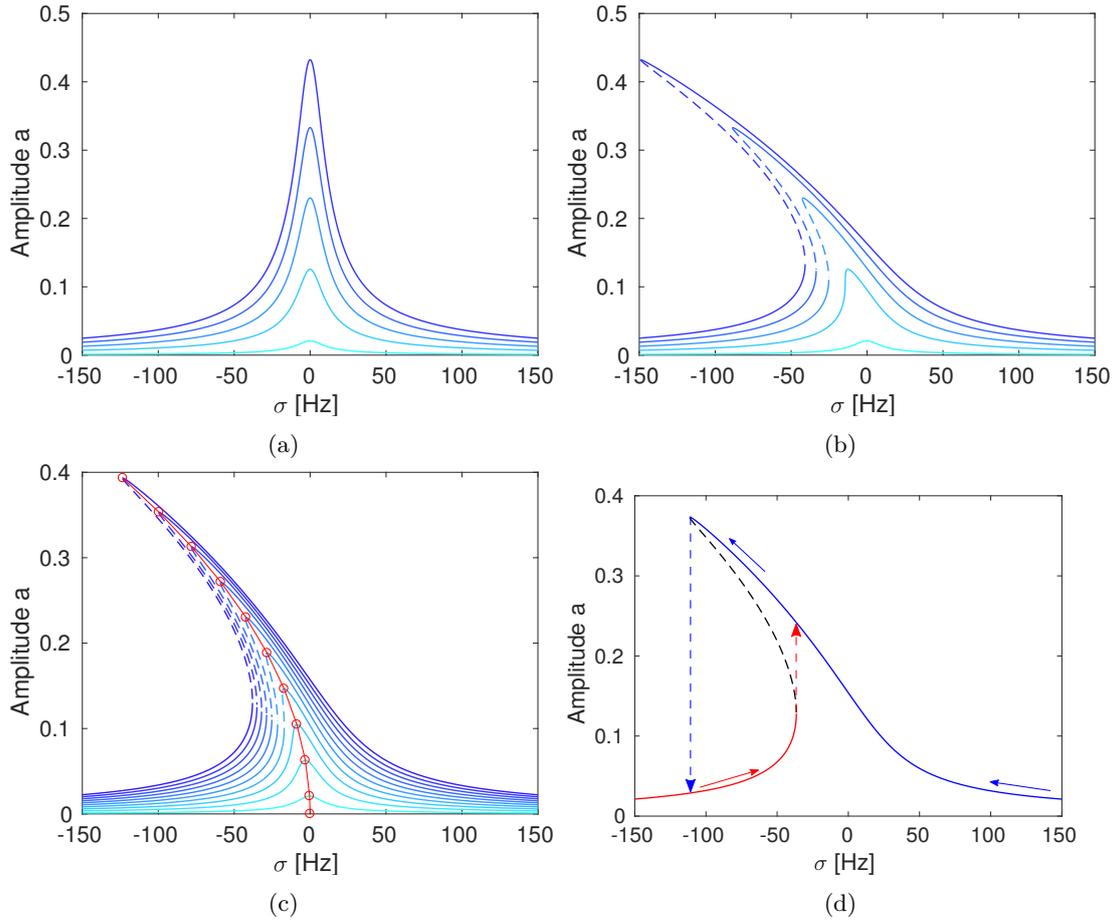


FIGURE 2.13 – Courbes de résonances non linéaires, obtenues en traçant l’amplitude  $a$  en fonction du désaccord  $\sigma$  liés par la relation (2.22). Paramètres de l’oscillateur :  $\xi = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 451$ ,  $Q = [1000 \ 6000 \ 11000 \ 17000 \ 21000]$ . (a)  $(\beta, \Gamma) = (0, 0)$ . (b)  $(\beta, \Gamma) = (0, -6 \cdot 10^6)$ . (c) Courbes de résonances du système défini en (b) et *backbone curve* correspondante (en rouge). (d) Phénomènes de saut et d’hystérésis expérimentaux lors de la mesure de courbes de résonances non linéaires. Les courbes en traits pleins représentent les solutions stables, et la courbe en pointillés la solution instable. La courbe bleue correspond à la solution du régime permanent quand la fréquence de forçage est diminuée pas à pas, tandis que la courbe rouge correspond à cette même solution quand la fréquence de forçage est incremented pas à pas.

illustré sur la Figure 2.13d : lorsque la fréquence de forçage est lentement croissante, le système évolue sur la branche rouge ; dans le cas où cette même fréquence de forçage décroît, le système répond sur la branche bleue. Ce phénomène est observé expérimentalement au Chapitre 4.

### 2.3.4.3 Résonances internes

Si des degrés de liberté sont ajoutés au cas uni-modal ( $m > 1$  oscillateurs dans le système (2.11)), la méthode des échelles multiples met en évidence l’occurrence de couplages importants lorsque les fréquences propres de modes présentent entre elles certaines relations. Ces modes sont alors dits en *résonance interne*. En régime forcé, les résonances internes apparaissent lorsque les fréquences propres  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq m}$  présentent certaines relations de commensurabilité avec la fréquence de forçage  $\Omega$ , c’est-à-dire :

$$\exists (k, (k_i)_{1 \leq i \leq m}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^m, \quad k\Omega = \sum_{i=1}^m k_i \omega_i$$

Par ailleurs, le nombre de modes impliqués dans une relation de résonance interne est inférieur à l'ordre de non-linéarité du système  $P$  [Nayfeh and Mook 1995]. Dans le cas d'une plaque (non-linéarités cubiques,  $P = 3$ ) en vibrations libres ( $k = 0$ ), un maximum de quatre modes peuvent être impliqués dans des résonances internes ; quelques exemples de relation de commensurabilité pour les non-linéarités cubiques sont :  $\omega_i = 3\omega_j$ , et/ou  $\omega_i = 2\omega_j \pm \omega_k$ , et/ou  $\omega_i = \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l$ . Dans le cas d'un système présentant des non-linéarités quadratiques (coque), les possibilités sont :  $\omega_i = 2\omega_j$ ,  $\omega_i = \omega_j \pm \omega_k$ . Si ces relations de commensurabilités sont vérifiées, des échanges continus d'énergie ont lieu entre les modes concernés, jusqu'à ce que l'amplitude du système revienne à zéro du fait de l'amortissement.

La présence de résonances internes de type 1:1:1 ( $\omega_i = \omega_j \pm \omega_k$ ) dans la dynamique du gong xiaoluo est démontrée par le contrôle actif modal au Chapitre 3. Par ailleurs, l'interaction entre le glissement fréquentiel et une résonance 1:2 ( $\omega_i = 2\omega_j$ ) est qualitativement étudiée au Chapitre 5.

## 2.4 Expériences en régime de jeu

Cette section expose quelques expériences sur le gong *xiaoluo* afin d'illustrer les différents phénomènes non linéaires mis en évidence théoriquement : distorsion harmonique, glissement fréquentiel, résonances internes. Toutes les expériences sont réalisées en régime de jeu, c'est-à-dire en vibrations libres.

### 2.4.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est décrit par la Figure 2.14. Il est constitué d'un système d'excitation impulsif monté à l'IRCAM, et d'une chaîne d'acquisition mesurant la réponse de l'instrument en vibrations libres. Le système d'excitation est constitué d'un portant auquel le gong est suspendu (Figure 2.15). Une mailloche en feutre est accrochée à une liaison pivot située dans le plan de l'instrument et rattachée au portant. Une butée, dont l'angle est variable, est vissée dans le même axe que la liaison pivot. Il est ainsi possible d'exciter le gong de manière reproductible en fixant la position de la butée à un angle donné, et en amenant la mailloche contre la butée. Celle-ci est ensuite lâchée, mettant en vibration le gong, avant d'être attrapée par l'utilisateur-trice afin d'éviter le rebond sur l'instrument. La mailloche du système d'excitation est instrumentée avec un accéléromètre, afin de caractériser la force de frappe. Sa calibration est détaillée au Chapitre 5. La réponse de l'instrument est mesurée par un accéléromètre (masse : 0.75 g), collé à l'arrière de l'instrument par de la cire d'abeille. Il est localisé sur la partie centrale du gong, à côté du centre afin de ne pas subir une force trop importante qui viendrait le décoller de l'instrument (Figure 2.16a). Les accéléromètres de la mailloche et du gong sont reliés à deux conditionneurs B&K, eux mêmes reliés à une carte d'acquisition et un ordinateur de mesure. Le son de l'instrument est enregistré au moyen d'un micro, placé à 80 cm du gong à hauteur de la partie centrale de l'instrument, afin de comparer les signaux de réponse du gong à l'accéléromètre et le son résultant. Les références des différents composants du dispositif de la Figure 2.14 sont répertoriés Table 2.2.

A l'aide de ce dispositif, deux expériences sont réalisées :

- La première expérience consiste à mesurer la réponse du gong pour un même lieu d'impact et des forces d'impact croissantes. Cette expérience met en évidence les apparitions successives de la distorsion harmonique et du glissement fréquentiel dans la réponse de l'instrument.
- La seconde expérience consiste à mesurer la réponse du gong pour différents lieux d'impacts (Figure 2.16b), mais pour un même angle de frappe. Cette deuxième expérience souligne l'hétérogénéité de la structure sur sa partie centrale.

Les résultats de ces deux expériences sont décrites en section suivante.

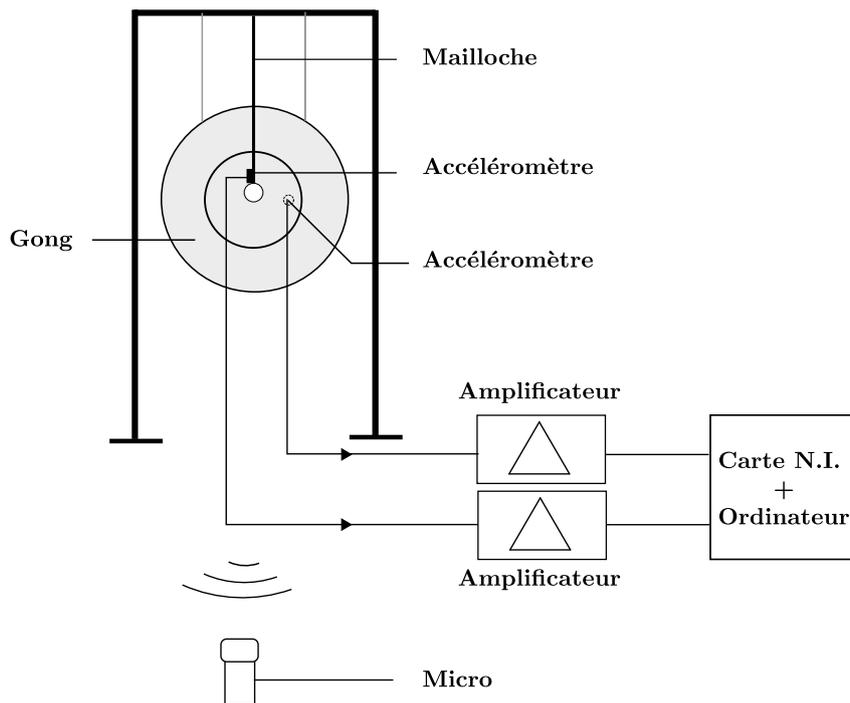


FIGURE 2.14 – Dispositif expérimental.

Composant	Référence
Accéléromètres	B&K Type 4374
Conditionneur mailloche	B&K Type 2635
Conditionneur gong	B&K NEXUS 2692-A
Carte d'acquisition	NI 9234
Microphone	Tascam DR-40

TABLE 2.2 – Références des éléments du dispositif expérimental de la Figure 2.14.

### 2.4.2 Influence de la force d'impact sur les non-linéarités géométriques

Les résultats de la première expérience (frappes croissantes en un point) sont représentés Figures 2.17 et 2.18 sous la forme de spectrogrammes. Les spectrogrammes du signal de l'accéléromètre collé au gong ainsi que le son correspondant au micro sont comparés, afin d'avoir accès à l'information effectivement mesurée par chaque capteur.

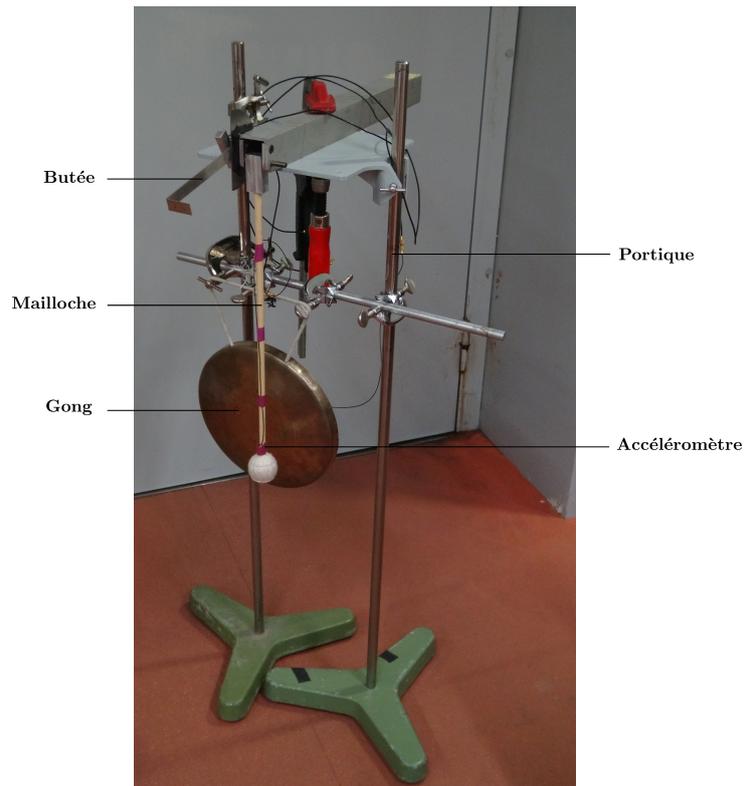


FIGURE 2.15 – Système de frappe reproductible monté à l'IRCAM.

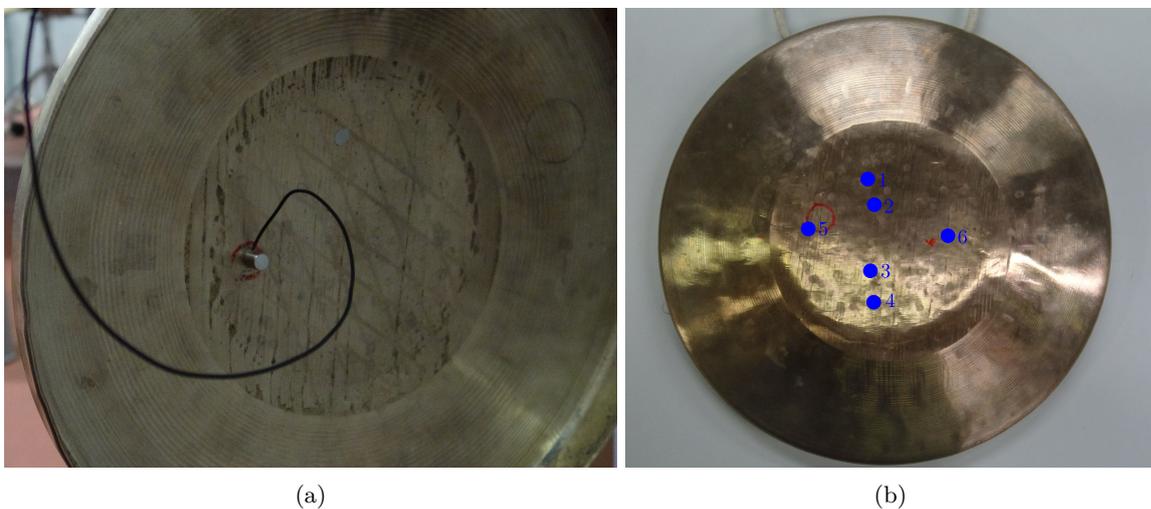


FIGURE 2.16 – Localisation de l'excitation et de la mesure de l'accélération du gong. (a) Position de l'accéléromètre, à l'arrière de l'instrument. (b) Positions numérotées de l'impact de la mailloche pour la deuxième expérience (section 2.4.3).

Sur la Figure 2.17a, correspondant à la frappe la plus faible, la composante liée au mode fondamental ( $f_{(0,1)} = 451$  Hz) est indiquée par un astérisque rouge. Une composante fréquentielle à la fréquence double (900 Hz) est aussi présente et ne correspond à aucune déformée modale : il s'agit de la distorsion harmonique d'ordre 2, représentée par un astérisque orange. De même, l'harmonique triple, correspondant à la distorsion harmonique d'ordre 3, est aussi présente dans

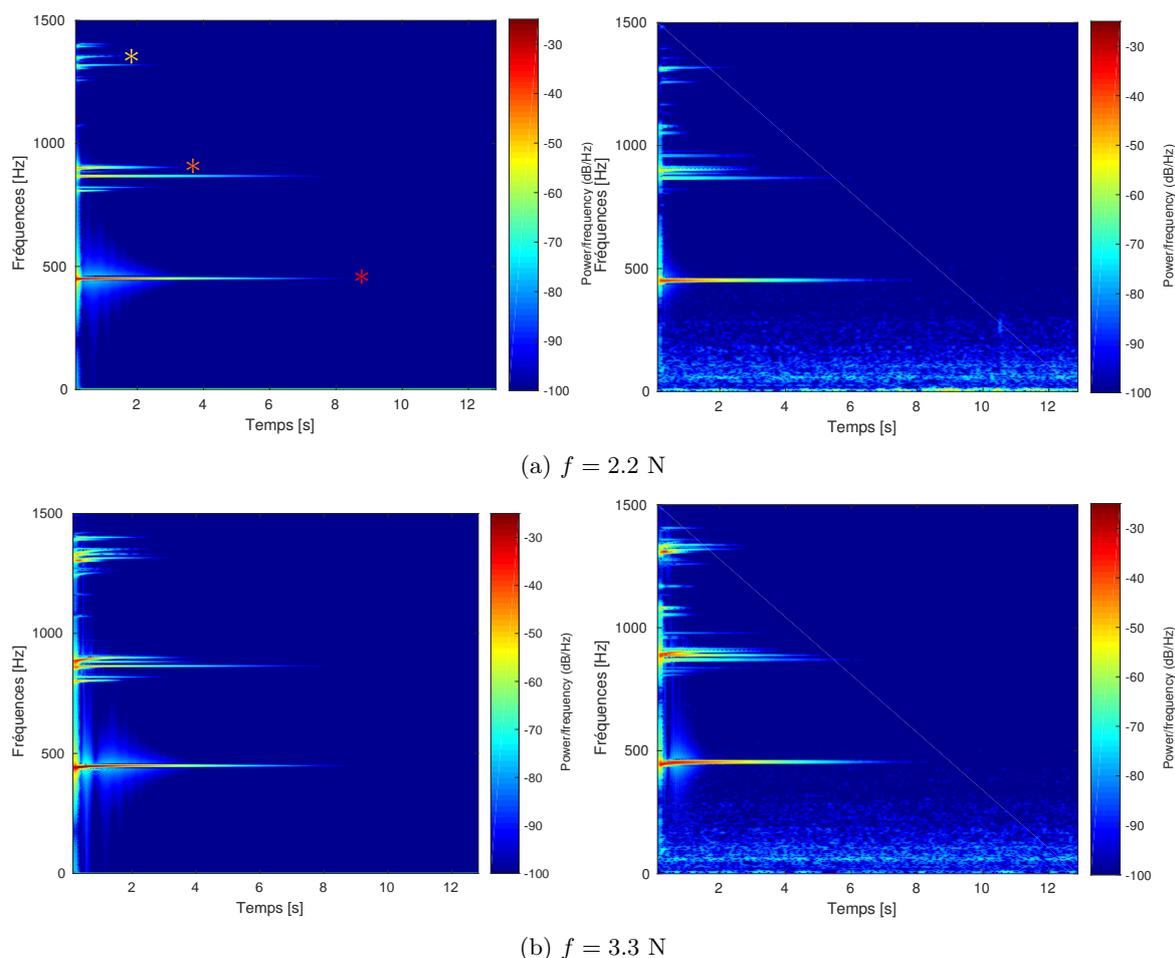


FIGURE 2.17 – Spectrogrammes du signal de l'accéléromètre collé au gong (gauche) et de l'enregistrement sonore correspondant (droite) pour des forces croissantes de frappe  $f$ . Dans (a), les astérisques rouge, orange et jaune indiquent respectivement le mode fondamental (450 Hz), sa distorsion harmonique d'ordre 2 (900 Hz) et d'ordre 3 (1350 Hz).

le signal à 1350 Hz, et est représentée par un astérisque jaune. Les distorsions harmoniques d'ordre 2 et 3 sont respectivement associées aux non-linéarités quadratiques et cubiques dans le système (2.11). Elles apparaissent dès les plus faibles amplitudes de vibration : il n'est donc pas possible d'observer un comportement strictement "linéaire" du gong en régime de jeu, même en faibles amplitudes. La composante fréquentielle située sous la distorsion harmonique d'ordre 2 correspond au mode (1,1) à 865 Hz, localisé au centre de l'instrument. Il est particulièrement présent dans le signal de l'accéléromètre et dans le son, contrairement à son mode compagnon à 816 Hz qui est lui pratiquement absent. Ceci est lié aux caractéristiques de la frappe (position 1 de la Figure 2.16b), localisée à proximité d'un nœud de vibration du mode à 816 Hz.

Le comportement assouplissant devient visible lorsque la force de frappe augmente légèrement (Figure 2.17b) : la fréquence augmente avec le temps du fait de l'amortissement du système. De manière logique, les distorsions d'ordre 2 et 3 du mode fondamental voient leur fréquence varier de la même manière que ce dernier. Par ailleurs, d'autres modes situés à 816 Hz et 865 Hz présentent également un comportement assouplissant.

La dynamique se complexifie lorsque la force de frappe augmente : les distorsions harmoniques d'ordre 2 et 3 voient leur fréquence varier sur des plages de fréquences plus importantes : sur la Figure 2.18a, la fréquence de la distorsion harmonique d'ordre 2 atteint celle d'un mode situé

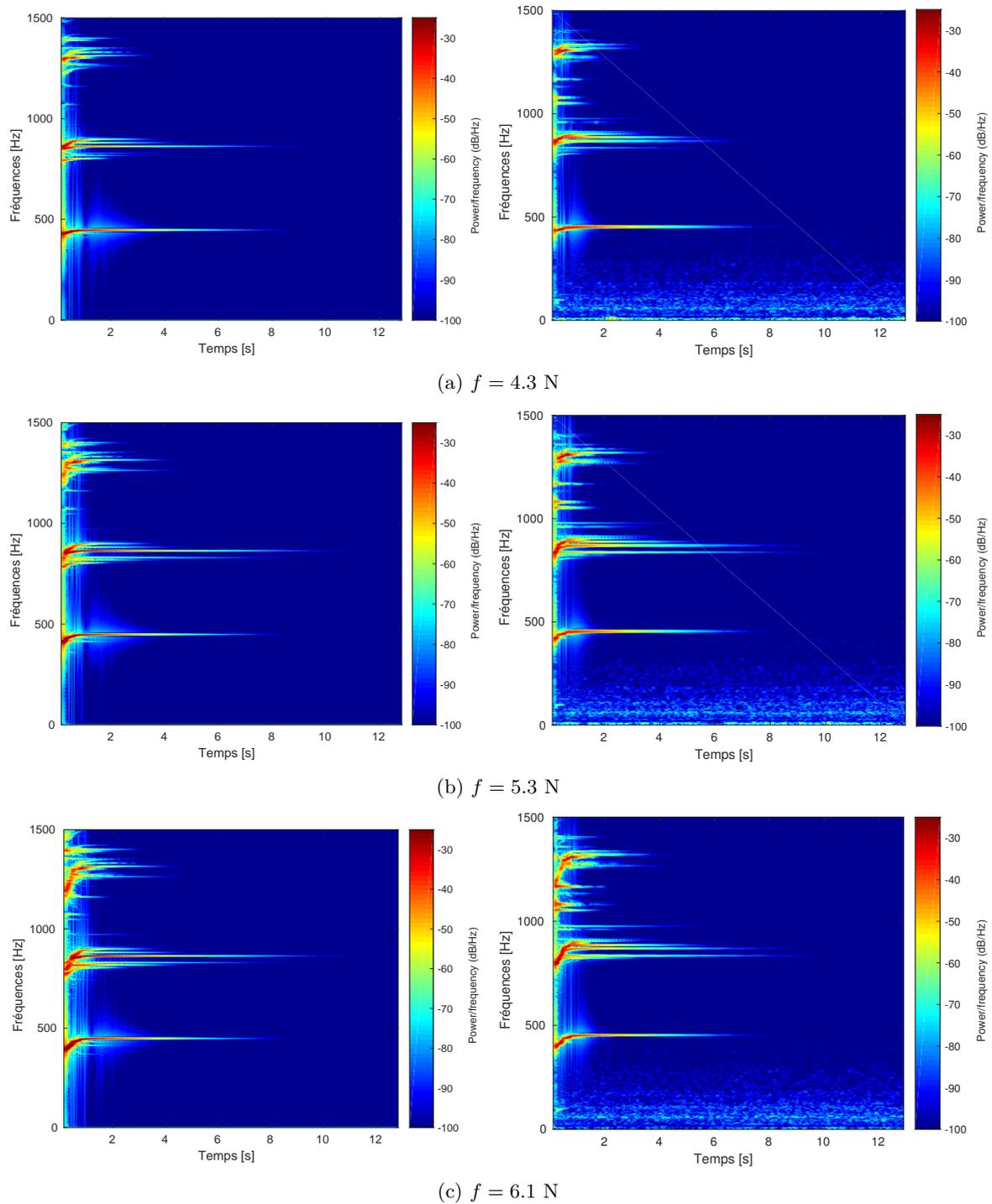


FIGURE 2.18 – Suite de la Figure 2.17.

autour de 880 Hz ; lorsque la force de frappe augmente, elle traverse également le mode à 865 Hz (Figure 2.18b), puis, entre autres, le mode à 816 Hz (Figure 2.18c). Il en est de même pour l'harmonique 3 qui traverse également plusieurs modes (Figure 2.18a-c).

Ces observations montrent que le glissement fréquentiel du mode fondamental en régime libre impose des relations de commensurabilité entre les modes propres de la structure. En effet, si

$\omega_0(t)$  désigne la pulsation du mode fondamental et  $\omega_1(t)$  la pulsation d'un mode de fréquence plus élevée, lorsque la fréquence de la distorsion harmonique d'ordre 2 atteint au temps  $t_0$  celle du mode propre défini par  $\omega_1(t)$ , alors la relation  $2\omega_0(t_0) = \omega_1(t_0)$  est vérifiée et une résonance interne 1:2 se met en place. Les effets de tels couplages sur le glissement fréquentiel sont étudiés et démontrés au Chapitre 5.

### 2.4.3 Influence de la localisation de l'excitation sur les non-linéarités géométriques

Au cours de la seconde expérience, la structure est excitée à différents endroits (Figure 2.16b) avec un angle de frappe constant correspondant à une force  $F \simeq 6.2$  N - cette dernière variant légèrement en fonction du lieu d'impact. Les spectrogrammes du signal de l'accéléromètre pour les différentes positions d'excitation sont représentés Figure 2.19. Ces spectrogrammes mettent en évidence de deux manières la disparité de réponse de l'instrument en fonction de la localisation de la frappe :

- Premièrement, la variation de la localisation de l'excitation modifie de fait les modes propres excités. Cela est visible sur le spectrogramme des positions n°3 et n°4 : le mode à 816 Hz est plus excité dans la position n°3 que la position n°4, plus éloignée du centre de l'instrument.
- Deuxièmement, l'instrument étudié présente une hétérogénéité dynamique. Ainsi, alors que les positions de frappe n°1 et n°2 sont relativement proches l'une de l'autre et situées dans la zone de vibration maximale du mode fondamental (localisée sur toute la partie centrale, voir Figure 2.8), elles donnent lieu à deux réponses drastiquement différentes du gong. Par exemple, le glissement fréquentiel du mode fondamental est plus important dans le cas de la position n°1 que dans la position n°2. Similairement, la fréquence du mode fondamental évolue dans une gamme plus large dans la position n°6 que dans la position n°5. Cela suggère que l'instrument possède à l'échelle macroscopique des zones de rigidité hétérogènes, probablement dues aux processus de facture. Il est également possible que des résonances internes se mettent en place en fonction du lieu d'impact de la mailloche, opérant des transferts d'énergie avec le mode fondamental qui modifient le comportement de son glissement fréquentiel.

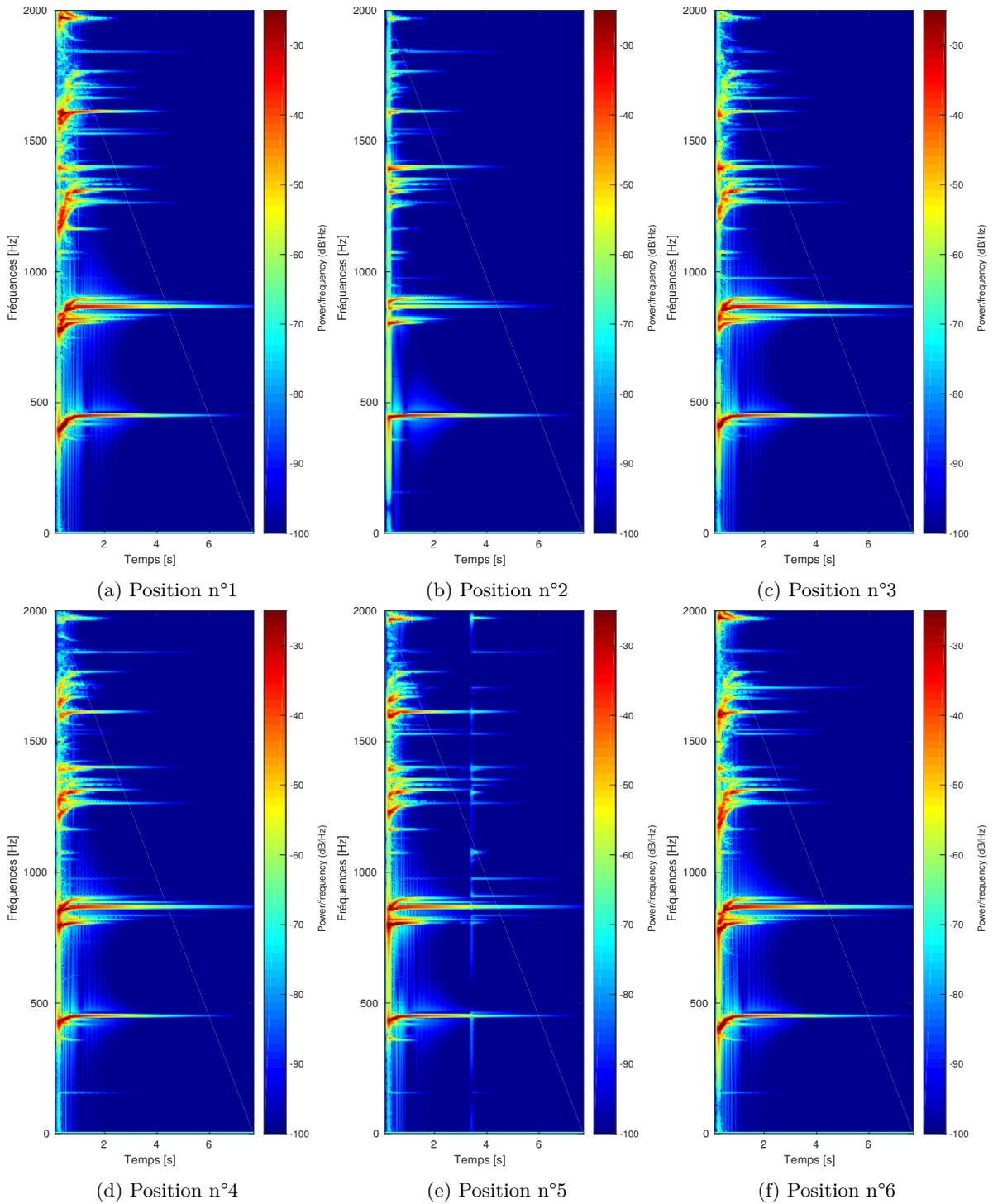


FIGURE 2.19 – Spectrogrammes du signal de l'accéléromètre collé au gong pour différentes localisations de frappe avec la mailloche en feutre (voir Figure 2.16b), et un même angle de frappe correspondant à une force d'impact  $f \simeq 6.2$  N.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre présente une étude expérimentale et théorique du gong *xiaoluo*, dans le but de donner une description qualitative des caractéristiques vibratoires de cet instrument. L'analyse modale effectuée a caractérisé la localisation des différents modes de vibration, notamment le mode fondamental auquel la suite de ce travail s'intéresse. Des rappels théoriques concernant les non-linéarités dites géométriques dans le cas de structures minces ont été effectués, permettant l'identification analytique de certains phénomènes non linéaires caractéristiques de l'instrument : distorsion harmonique d'ordre 2 et 3, dépendance de la fréquence de vibration avec l'amplitude, et résonances internes. Une étude expérimentale a clairement mis en évidence la présence de distorsion harmonique et de glissement fréquentiel, et a permis de supposer l'existence de résonances internes impliquant le mode fondamental.

L'ensemble des points abordés dans ce chapitre constitue une étude préliminaire nécessaire à l'application du contrôle modal au gong *xiaoluo*, détaillée au chapitre suivant. Bien que le contrôle modal soit réservé à des structures dynamiques supposées linéaires, l'influence et les performances de ce type de contrôle sur les phénomènes non linéaires présentés dans ce chapitre n'ont jamais été abordées.



## Chapitre 3

# Contrôle modal et non-linéarités géométriques

---

3.1	Cadre théorique du contrôle actif modal . . . . .	50
3.1.1	Contrôle par rétroaction . . . . .	50
3.1.1.1	Contrôle par retour d'état dans la base physique . . . . .	51
3.1.1.2	Contrôle par retour d'état dans la base modale . . . . .	51
3.1.2	Formulation modale . . . . .	53
3.1.2.1	Problème conservatif et base modale . . . . .	53
3.1.2.2	Ajout de l'amortissement . . . . .	55
3.1.3	Formulation dans l'espace d'état : système en boucle ouverte . . . . .	55
3.1.4	Ajout du système de contrôle : système en boucle fermée . . . . .	57
3.1.4.1	Contrôleur et observateur . . . . .	57
3.1.4.2	Calcul des gains de contrôle et d'observation . . . . .	58
3.1.5	Identification du système : Méthode Rational Fraction Polynomial (RFP) . . . . .	59
3.1.5.1	Identification sous la forme de polynômes orthogonaux . . . . .	59
3.1.5.2	Détermination des paramètres modaux . . . . .	60
3.1.6	Synthèse . . . . .	62
3.2	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	62
3.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	63
3.2.1.1	Instrumentation . . . . .	63
3.2.1.2	Contrôleur COALA . . . . .	64
3.2.1.3	Éléments du dispositif . . . . .	65
3.2.2	Identification modale . . . . .	66
3.2.3	Protocole de l'étude . . . . .	70
3.3	Résultats . . . . .	70
3.3.1	Performances du contrôle actif modal . . . . .	71
3.3.1.1	Résultats expérimentaux . . . . .	71
3.3.1.2	Comparaison avec la simulation . . . . .	73
3.3.2	Effets du contrôle modal sur la distorsion harmonique et les résonances internes . . . . .	74
3.3.3	Effets du contrôle modal sur le glissement fréquentiel . . . . .	77
3.3.3.1	Étude qualitative des performances . . . . .	77
3.3.3.2	Étude quantitative des performances . . . . .	77
3.4	Discussion des résultats . . . . .	83
3.5	Conclusion . . . . .	83

---

## Préambule

Ce chapitre présente la mise en œuvre expérimentale d'un contrôle actif modal du gong *xiaoluo*. Certains des outils présentés ont été développés dans le cadre de la thèse de Thibaut Meurisse [2014] et de Simon Benacchio [2014]. Les éléments théoriques et techniques utilisés seront cependant rappelés dans une première partie. L'apport original par rapport aux thèses précédentes, outre le caractère non linéaire de l'objet d'étude, est la mise sous forme embarquée du système de contrôle, auparavant réalisée sur une machine dédiée. Ce système embarqué, dénommé COALA, a été développé à l'IRCAM dans le souci de rendre portatif un outil global de contrôle des instruments pour la recherche et la production musicale.

La première section de ce chapitre (section 3.1) rappelle quelques éléments de la théorie du contrôle actif modal et introduit les notions et les formalismes clés pour la compréhension de l'étude. La deuxième section (section 3.2) présente la mise en œuvre du système de contrôle expérimental : choix des différents composants (actionneur, capteur et contrôleur COALA) et démarches préliminaires au contrôle en lui-même (identification et choix de l'observateur). La troisième section (section 3.3) présente les résultats du contrôle en amortissement du mode fondamental de l'instrument, et s'intéresse aux conséquences du contrôle sur les différents phénomènes non linéaires mis en évidence au Chapitre 2 : distorsion harmonique, résonances internes, et glissement fréquentiel. Enfin, la dernière section effectue le bilan de ce deuxième chapitre et introduit les perspectives pour la suite de l'étude.

Il est important de noter que les développements théoriques associés au contrôle actif modal s'appuient sur une approximation *linéaire* des structures. Appliqués au gong *xiaoluo*, les rappels effectués dans la suite de ce chapitre s'appuient donc sur l'hypothèse que la dynamique du gong est considérée comme linéaire. C'est la confrontation de cette hypothèse, lourde, dans le cadre du contrôle qui est au cœur des travaux de ce chapitre.

## 3.1 Cadre théorique du contrôle actif modal

### 3.1.1 Contrôle par rétroaction

Le contrôle par rétroaction<sup>1</sup> consiste à réduire ou modifier les vibrations de structures dynamiques par l'intermédiaire d'un boucle de rétroaction. Cette boucle de rétroaction inclut le couplage de capteur(s) et d'actionneur(s) à la structure, entre le(s)quel(s) un système de contrôle détermine une loi de commande, remplissant les objectifs vibratoires souhaités. Les objectifs cibles du système contrôlé sont atteints soit (i) en comparant la réponse du système à une réponse référence ou (ii) en intégrant cette référence directement dans la boucle de rétroaction. Un schéma global de contrôle par rétroaction dans le cas (ii) est présenté sur la Figure 3.1.

Le fonctionnement de la boucle de contrôle est le suivant : une perturbation de la structure entraîne sa mise en vibration ; celle-ci est mesurée par un ou plusieurs capteur(s) et envoyée à un système de contrôle, qui détermine alors une commande à envoyer à la structure, en fonction de la réponse et des objectifs de contrôle. Cette commande est transmise à la structure par l'intermédiaire d'un ou plusieurs actionneur(s). La détermination du système de contrôle dépend des variables d'état utilisées pour déterminer la loi de commande. Dans le cas où ces variables sont le déplacement ou la vitesse totale du système, le contrôle par rétroaction est dit dans la base physique ; dans le cas où ces variables sont les déplacements modaux et les vitesses modales du système, le contrôle est dit dans la base modale.

---

1. *Feedback control* en anglais.

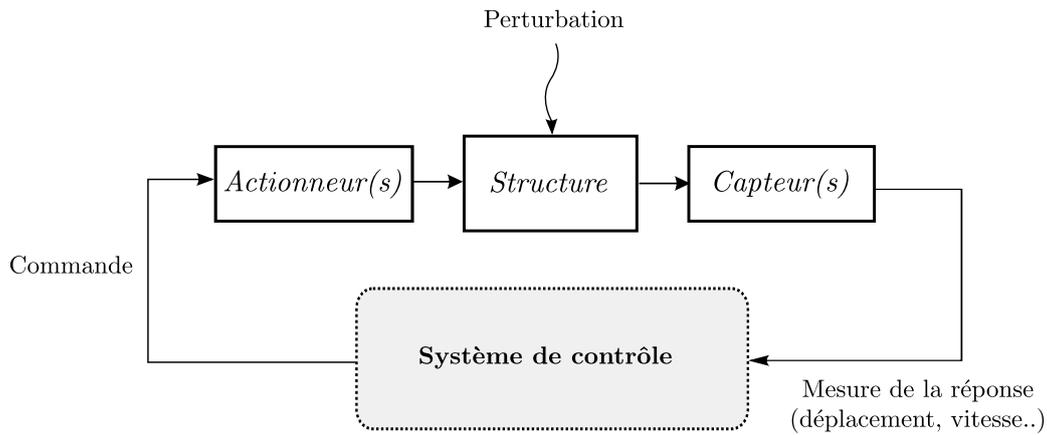


FIGURE 3.1 – Schéma général d'un contrôle par rétroaction.

Qu'il soit mis en œuvre dans la base physique ou dans la base modale, le contrôle par rétroaction peut être appliqué au contrôle *modal*. L'objectif du contrôle modal est de contrôler les modes de vibrations d'un système *indépendamment les uns des autres* ; cela signifie plus précisément le contrôle des *paramètres modaux* de la structure : amortissements modaux, fréquences modales, et amplitudes modales. Les deux types de contrôle par rétroaction (base physique et base modale) sont décrits ci-après. Leurs avantages et inconvénients au regard des applications en contrôle modal sont discutées.

### 3.1.1.1 Contrôle par retour d'état dans la base physique

Dans le cas d'un contrôle par retour d'état dans la base physique, le(s) capteur(s) mesurent directement le déplacement et/ou la vitesse du système à partir desquels la commande est déterminée. Le contrôleur est par exemple constitué d'un contrôleur PID (*Proportionnel-Intégral-Dérivé*), qui détermine une loi de commande à partir du signal mesuré, de son intégrale et de sa dérivée. Dans ce cas, un compromis doit être effectué entre la précision de la boucle de contrôle, sa vitesse et sa robustesse. Il est également possible d'effectuer un contrôle modal de la structure en utilisant des filtres modaux, cependant le nombre de capteurs doit être égal aux nombres de modes reconstruits [Meirovitch and Baruh 1985], ce qui constitue une solution invasive dans le cas de contrôle multimodal de certaines structures comme les instruments de musique. Par ailleurs, la disposition spatiale des capteurs et actionneurs doit être adaptée pour assurer un contrôle indépendant [Takanashi et al. 2003]. En revanche, ce type de contrôle modal se révèle à la fois robuste et exempt de *spillover* Preumont [2012] (voir section 3.1.1.2) étant donné qu'aucun modèle réduit de la structure n'est utilisé.

### 3.1.1.2 Contrôle par retour d'état dans la base modale

Une alternative à l'utilisation de filtres modaux pour mettre en place un contrôle modal consiste à utiliser les coordonnées modales comme variables d'état ; ce type de contrôle est appelé *contrôle par retour d'état dans la base modale*. Dans ce cas, l'application au contrôle modal est immédiate car la loi de commande est déterminée de manière à cibler le contrôle sur chaque mode indépendamment, réduisant ainsi l'énergie utilisée. Par ailleurs, ce type de contrôle minimise le nombre de capteurs et d'actionneurs [Gaudiller and Der Hagopian 1996]. En revanche, les déplacements et vitesses modales n'étant pas déduites d'une simple mesure de déplacement ou de vitesse du système, il est nécessaire d'introduire dans le système de contrôle un *observateur d'état*

Luenberger [1964] reconstruisant, en temps réel, ces variables d'état. Le rôle de cet observateur correspond à une décomposition du signal sur la base modale. Un schéma de contrôle modal utilisant le contrôle par rétroaction dans la base modale est présenté Figure 3.2. Sur ce schéma,

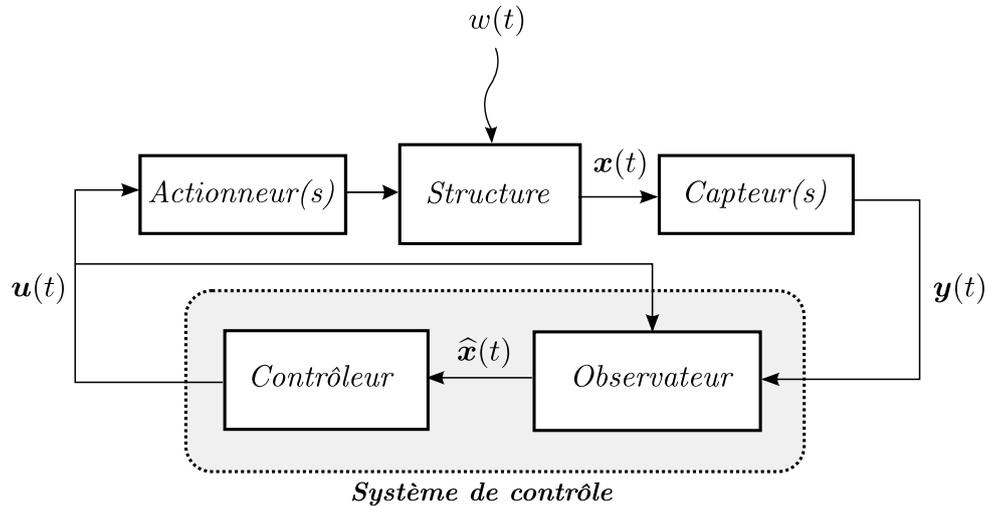


FIGURE 3.2 – Schéma général d'un contrôle modal.

les variables d'état (déplacements et vitesses modales) sont regroupées dans le vecteur  $\mathbf{x}(t)$ . Le(s) capteur(s) mesure(nt) la réponse  $\mathbf{y}(t)$  du système soumis à une excitation  $w(t)$ ; l'observateur décompose alors le signal  $\mathbf{y}(t)$  sur la base modale et fournit une estimation  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  du vecteur d'état  $\mathbf{x}(t)$ ; qui est ensuite envoyée au contrôleur; celui-ci détermine la commande  $\mathbf{u}(t)$  à partir de  $\hat{\mathbf{x}}$ , qui est transmise au système *via* le(s) actionneur(s).

Ces considérations amènent plusieurs points :

- La description de la dynamique globale des composants de la Figure 3.2 est réalisée par la formulation modale des équations de la dynamique et la mise sous forme d'équations d'état. Ces deux formalismes sont rappelés dans la section 3.1.2 et dans la section 3.1.3.
- L'estimation correcte en temps réel de l'état du système par l'observateur est réalisée en minimisant l'erreur quadratique entre l'état réel du système  $\mathbf{x}$  et l'état estimé  $\hat{\mathbf{x}}$ . Cette minimisation est réalisée par un algorithme de convergence dont les détails et les paramètres sont donnés en section 3.1.4.
- L'observateur d'état nécessite un *modèle linéaire réduit* de la structure à étudier. Ce modèle est réalisé en général de manière expérimentale par un processus d'*identification*, dont la méthode sera exposée section 3.1.5.
- Enfin, malgré les avantages du contrôle modal dans la base modale, quelques inconvénients existent : premièrement, le fait de travailler avec un modèle réduit de la structure, donc sur une bande fréquentielle bornée, peut provoquer la déstabilisation de modes non modélisés dans le système de contrôle, dont l'amortissement est susceptible de diminuer. Ce phénomène, absent du contrôle par rétroaction dans la base physique, est appelé *spillover* [Preumont 2012]. Deuxièmement, la robustesse de ce type de contrôle est également moindre que dans le cas du contrôle par rétroaction dans la base physique, et nécessite une ré-actualisation régulière du contrôleur en fonction des changements sensibles des paramètres modaux [Chomette et al. 2008].

### 3.1.2 Formulation modale

Pour les systèmes continus, certaines difficultés apparaissent lors de la résolution analytique des équations aux dérivées partielles de la dynamique : la complexité des systèmes d'équations, du domaine d'étude sur lesquelles elles doivent être résolues, des conditions aux limites, ou l'hétérogénéité du milieu sont autant d'obstacles à la détermination de solutions analytiques au problème posé. Ces difficultés sont en général surmontées par des méthodes de discrétisation spatiale (méthode de Galerkin, méthode de Ritz...) substituant au problème continu un problème discret à  $n$  degrés de liberté décrit par un système de coordonnées généralisées  $(z_1, \dots, z_n)$ . Dès lors, les équations du mouvement sont déduites des équations de Lagrange appliquées aux systèmes discrets. Ces équations font intervenir les énergies cinétique  $T$  et potentielle  $U$  du système ainsi que les efforts généralisés  $(Q_i)_{1 \leq i \leq n}$  suivant l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial z_i} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) = Q_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.1)$$

Dans le cas où les coordonnées généralisées  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  correspondent aux déplacements généralisés, le calcul de l'énergie potentielle  $U$  et de l'énergie cinétique  $T$  du système étudié montre que celles-ci sont des formes quadratiques des déplacements  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  et des vitesses  $(\dot{z}_i)_{1 \leq i \leq n}$  :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} {}^t \mathbf{z} \mathbf{K} \mathbf{z} \\ T &= \frac{1}{2} {}^t \dot{\mathbf{z}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{z} = [z_1 \dots z_n]$  et  $\dot{\mathbf{z}} = [\dot{z}_1 \dots \dot{z}_n]$  sont respectivement les vecteurs déplacement et vitesse. Ces expressions font apparaître la *matrice de masse*  $\mathbf{M}$  et la *matrice de raideur*  $\mathbf{K}$  qui sont, par construction, symétriques. Par ailleurs, comme l'énergie cinétique  $T$  est toujours une forme quadratique définie positive, la matrice  $\mathbf{M}$  est définie positive et donc inversible. De même,  $\mathbf{K}$  est semi-définie positive.

Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont en général construites avec les mêmes méthodes. Cependant, la matrice de masse, contrairement à la matrice de raideur, peut être construite de manière à être diagonale en regroupant les éléments masse au niveau des points spatiaux de discrétisation. Elle est ainsi supposée diagonale dans la suite. L'application de (3.1) permet de déduire l'équation du mouvement dans le cas conservatif :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{F}$  est le vecteur des efforts généralisés.

#### 3.1.2.1 Problème conservatif et base modale

La première étape à la formulation d'un problème dans la base modale est la recherche des vecteurs propres du problème (3.2), réalisée sur le cas libre associé :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

La solution à cette équation est cherchée sous la forme harmonique  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i(\omega t + \theta)}$  où  $\boldsymbol{\phi}$  est le vecteur amplitude,  $\omega$  la pulsation de la solution et  $\theta$  sa phase. La substitution de cette solution dans l'équation (3.3) amène à résoudre le problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

L'ensemble des vecteurs solutions  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$  de l'équation (3.4) forment un ensemble non trivial si et seulement si le déterminant de la matrice  $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$  est nul. Cette condition permet de résoudre un polynôme d'ordre  $n$  en  $\omega^2$ , dont les  $n$  racines  $(\omega_i^2)_{1 \leq i \leq n}$  sont les valeurs propres du système (3.2). Si la matrice  $\mathbf{M}$  est définie positive et la matrice  $\mathbf{K}$  est semi définie positive ou définie positive, les valeurs propres  $(\omega_i^2)_{1 \leq i \leq n}$  sont réelles et positives, et leurs racines carrées  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  correspondent aux fréquences naturelles du système. A chaque fréquence  $\omega_i$  est alors associé un vecteur  $\phi_i$  de dimension  $n$ , solution de l'équation :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Cette équation, pour  $i$  fixé, correspond à un système de  $n$  équations homogènes caractérisées par un unique coefficient commun  $\omega_i^2$ . L'équation (3.5) possède donc une solution non triviale  $\phi_i$  qui est appelé *déformée modale* ou *mode propre* du système. Dans le cas où les valeurs propres  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont distinctes, l'une des propriétés fondamentales des modes propres est le fait qu'ils sont un à un *orthogonaux* et qu'ils forment une base de l'espace des solutions (non unique, puisque les vecteurs  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont définis à un facteur multiplicatif près). Les vecteurs propres  $\phi_{1 \leq i \leq n}$  sont également orthogonaux par rapport aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  [Shabana 2012]. Cette propriété rend les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  diagonalisables dans la base modale. Le changement de variable pour passer des déplacements généralisés  $\mathbf{z}$  aux déplacements modaux, regroupés dans le vecteur  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  est obtenu en construisant la matrice de changement de base  $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_n]$  telle que :

$$\mathbf{z}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (3.6)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} {}^t \Phi \mathbf{M} \Phi &= \text{diag}(m_i) := \mathbf{M}_m \\ {}^t \Phi \mathbf{K} \Phi &= \text{diag}(k_i) = \text{diag}(m_i \omega_i) := \mathbf{K}_m \end{aligned}$$

où les matrices  $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{K}_m$  sont des matrices diagonales appelées matrices de *masse modale* et de *raideur modale*, respectivement. Notons que la matrice  $\Phi$  est choisie avec un nombre  $m$  de vecteurs propres  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq m}$  strictement inférieur au nombre de degrés de liberté  $n$  de la structure. Dans ce cas, la matrice  $\Phi$  n'est pas carrée et donc non inversible, ce qui justifie ici l'emploi de la transposée  ${}^t \Phi$  plutôt que l'inverse de  $\Phi$  (dans la suite,  $m = n$ ). En remplaçant l'expression (3.6) dans l'équation (3.2) et en multipliant à gauche par la matrice  ${}^t \Phi$  l'équation (3.2) devient :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_m \mathbf{q}(t) = {}^t \Phi \mathbf{F}(t) \quad (3.7)$$

Le terme  ${}^t \Phi \mathbf{F}$  correspond à la projection modale des efforts généralisés. Il peut être exprimé de manière plus intuitive en le découplant en un terme temporel, correspondant à la perturbation temporelle scalaire  $w(t)$  appliquée à la structure (*e.g.* une impulsion, un forçage), et un terme spatial  $\mathbf{\Pi}^w$  représentant la contribution spatiale de la perturbation  $w$ , c'est-à-dire sa contribution *modale*. La matrice  $\mathbf{\Pi}^w$  est de taille  $n \times r$ , où  $r$  désigne le nombre de points spatiaux où est appliqué la perturbation  $w(t)$ . Ceci s'écrit :

$${}^t \Phi \mathbf{F}(t) = \mathbf{\Pi}^w w(t)$$

Par ailleurs, l'amplitude des modes propres  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$  est judicieusement choisie de manière à imposer  $\mathbf{M}_m = \mathbb{I}_n$ , où  $\mathbb{I}_n$  désigne la matrice identité de taille  $n$ . Le système (3.7) s'écrit finalement :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{\Pi}^w w(t) \quad (3.8)$$

avec

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_i)$$

Ainsi, le changement de variable (3.6) transforme le problème (3.2) aux  $n$  équations différentielles linéaires couplées en un problème équivalent (3.8) constitué d'un système de  $n$  équations linéaires découplées.

### 3.1.2.2 Ajout de l'amortissement

Les développements précédents considèrent le cas conservatif. Le passage du problème conservatif (3.2) au cas dissipatif est réalisé par l'ajout direct, dans l'équation (3.2), d'un terme dissipatif  $\mathbf{C}(\mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t))$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t)$$

La forme de l'amortissement  $\mathbf{C}$  n'est pas connue *a priori*. En général, des hypothèses fortes sont effectuées sur sa forme afin de garantir sa diagonalisation dans la base modale. Ici l'hypothèse est faite d'un amortissement proportionnel [Caughy and O'Kelly 1965], qui est valide dans le cas de structures faiblement amorties dont les modes sont suffisamment séparés en fréquences [Balmes 1997]. Cette hypothèse permet de diagonaliser simultanément les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  dans la base modale. Ainsi, la matrice  ${}^t\mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$  est diagonale et les facteurs d'amortissement modaux  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont définis tels que :

$${}^t\mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \text{diag}(2\omega_i \xi_i)$$

En posant  $\mathbf{\Xi} = \text{diag}(\xi_i)$ , la formulation modale complète pour les systèmes non conservatifs à amortissement visqueux proportionnel est obtenue :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{\Pi}^w w(t) \quad (3.9)$$

### 3.1.3 Formulation dans l'espace d'état : système en boucle ouverte

L'équation (3.9) décrit la dynamique d'une structure élastique comme un système de  $n$  oscillateurs découplés, dont chaque déplacement vérifie une équation différentielle homogène du second ordre. La formulation dans l'espace d'état simplifie le formalisme de cette équation, en la transformant en une unique équation matricielle *du premier ordre* en un vecteur d'état, noté  $\mathbf{x}$ . Ce vecteur d'état se construit à partir des variables d'état, dont le choix, non unique, permet de décrire le système à tout instant  $t$ . A titre d'exemple, le vecteur  $\mathbf{x} = \mathbf{q}$  ne suffit pas à ré-exprimer la dynamique décrite par l'équation (3.9), car la connaissance de  $\mathbf{q}$  à l'instant  $t$  nécessite, entre autres, la valeur de  $\dot{\mathbf{q}}$  à l'instant initial  $t_0$ , qui est inconnue. En revanche, le choix  $\mathbf{x} = {}^t[\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]$  convient pour le système (3.9), qui s'écrit alors sous la forme au premier ordre suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,n} & \mathbb{I}_{n,n} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{\Pi}^w \end{bmatrix} w(t)$$

soit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}w(t) \quad (3.10)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,n} & \mathbb{I}_{n,n} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{\Pi}^w \end{bmatrix}$$

Ce choix de l'état  $\mathbf{x}$  est conservé dans la suite. La grandeur  $\mathbf{G}$  est appelée *matrice de perturbation* et rend possible la projection de la perturbation  $w$  dans la base modale. La matrice  $\mathbf{A}$  est la *matrice dynamique* du système, et la forme totale (3.10) est appelée *formulation dans l'espace d'état* de l'équation (3.9).

La mesure de la fonction de transfert du système (3.11) est obtenue en couplant  $r$  actionneur(s) et  $t$  capteur(s) au système, modélisés respectivement par des matrices *actionneur*  $\mathbf{B}$  (taille  $2n \times r$ ) et *capteur*  $\mathbf{C}$  (taille  $t \times 2n$ ), permettant de projeter respectivement l'excitation et la mesure sur la base modale. Le système de contrôle utilisé dans cette étude, présenté section 3.2, est un système SISO : un seul capteur et un seul actionneur sont utilisés ( $r = t = 1$ ). Le calcul formel de la fonction de transfert, détaillé ci-dessous, est traité ci-après dans le cas SISO, sans pour autant poser de restrictions sur la généralisation au cas MIMO, c'est-à-dire avec plusieurs capteurs et actionneurs. Dans le cas SISO, les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont définies par :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ g_a \mathbf{\Pi}^a \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathbf{C} = \begin{bmatrix} g_c \mathbf{\Pi}^c \\ \mathbf{0}_{n,1} \end{bmatrix}$$

Les termes  $g_a$  et  $g_c$  désignent les gains respectifs d'amplification de l'actionneur et de conditionnement du capteur, et  $\mathbf{\Pi}^a$  et  $\mathbf{\Pi}^c$  les vecteurs de couplage électromécaniques de l'actionneur et du capteur, projetés dans la base modale. En boucle ouverte,  $u = 0$ . L'excitation du système  $w$  est réalisée par l'actionneur, ce qui impose  $\mathbf{G} = \mathbf{B}$ . Le système (3.10) devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}w(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $y$  désigne la mesure réalisée par le capteur. La fonction de transfert est obtenue en effectuant la transformée de Laplace de (3.11). En notant  $\mathbf{X}$ ,  $W$ , et  $Y$  les transformées de Laplace respectives de  $\mathbf{x}$ ,  $w$ , et  $y$ , il vient :

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}W(s) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $s$  désigne la variable de Laplace. Classiquement, la mesure de la fonction de transfert en boucle ouverte est définie par  $H_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$  et s'écrit :

$$H_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{C}(s\mathbb{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.13)$$

Soit, en développant la forme matricielle précédente :

$$H_{BO}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{g_c \pi_i^c g_a \pi_i^a}{s^2 + 2s\xi_i \omega_i + \omega_i^2} \quad (3.14)$$

où les  $(\pi_i^a)_{i \leq n}$  et  $(\pi_i^c)_{i \leq n}$  désignent les termes des matrices  $\mathbf{\Pi}^a$  et  $\mathbf{\Pi}^c$ . L'expression (3.14) démontre que la fonction de réponse en fréquence (FRF) expérimentale  $H_{BO}$  peut s'exprimer comme la somme de  $n$  fonctions de transfert individuelles, correspondant chacune à un oscillateur de pulsation  $\omega_i$ , d'amortissement modal  $\xi_i$  et d'amplitude modale  $a_i = g_c \pi_i^c g_a \pi_i^a$ . Notons que ces amplitudes modales sont *réelles*, ce qui découle directement du choix de l'amortissement proportionnel effectué à la section précédente. Cette dernière équation met en évidence le fait que les pôles de la fonction de transfert du système sont reliés aux paramètres modaux du système. L'introduction d'une commande par retour d'état, détaillée dans la section suivante, permet de modifier la matrice  $\mathbf{A}$  et donc les paramètres modaux qui lui sont associés.

### 3.1.4 Ajout du système de contrôle : système en boucle fermée

#### 3.1.4.1 Contrôleur et observateur

Cette section s'intéresse à l'introduction d'un système de contrôle au système en boucle ouverte précédent. En particulier, l'étude se restreint au contrôle par retour d'état, c'est-à-dire que la commande  $u$  s'écrit en fonction du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  :

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{K}$  désigne le *gain de contrôle*. L'introduction de la commande (3.15) dans le système (3.11) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}w(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

L'introduction de la commande  $u$  a donc pour effet de changer la matrice dynamique  $\mathbf{A}$  du système, qui est remplacée par  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ , où  $\mathbf{K}$  est de dimension  $1 \times 2n$ . Le système en boucle fermée est alors caractérisé par une nouvelle fonction de transfert en boucle  $H_{BF}$  :

$$H_{BF}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.17)$$

dont les pôles correspondent à de nouveaux taux d'amortissement  $(\xi_i^c)_{1 \leq i \leq n}$  et pulsations  $(\omega_i^c)_{1 \leq i \leq n}$ .

D'après l'équation (3.15), la détermination de la commande  $u$  nécessite la connaissance de l'état  $\mathbf{x}$ . L'estimation de l'état  $\mathbf{x}$ , noté  $\hat{\mathbf{x}}$ , est réalisée par un observateur d'état, dont la dynamique est régie par la dynamique du système (3.16), complétée par une boucle d'asservissement, proportionnelle à l'erreur entre la sortie mesurée du système  $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$  et la sortie estimée  $\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ . Cette boucle d'asservissement assure la convergence asymptotique vers 0 de l'erreur d'estimation  $h(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ . La commande envoyée par le contrôleur est alors  $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Ainsi, la dynamique de l'observateur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{B}_m\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}_m\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$  et  $\mathbf{C}_m$  correspondent aux matrices modélisées dans l'observateur. Elles sont obtenues à l'issue d'un processus d'identification décrit en section 3.1.5. Ce type d'observateur est un observateur dit de Luenburger [1964]. Le terme  $\mathbf{L}(y - \hat{y})$  fait apparaître le gain de correction  $\mathbf{L}$ , appelé *gain de l'observateur*, relié à l'erreur de reconstruction de la sortie  $h$ . Le système en boucle fermée avec observateur est représenté Figure 3.3.

Par ailleurs, en soustrayant le système (3.18) et (3.11), l'erreur d'estimation  $h$  vérifie l'équation :

$$\dot{h}(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{LC}_m)h(t)$$

qui a pour solution :

$$h(t) = h(0)e^{(\mathbf{A}_m - \mathbf{LC}_m)t} \quad (3.19)$$

Pour garantir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation  $h$ , il convient de choisir  $\mathbf{L}$  judicieusement. La section suivante expose les différentes méthodes pour déterminer les matrices du contrôleur  $\mathbf{K}$  et les matrices de l'observateur  $\mathbf{L}$ .

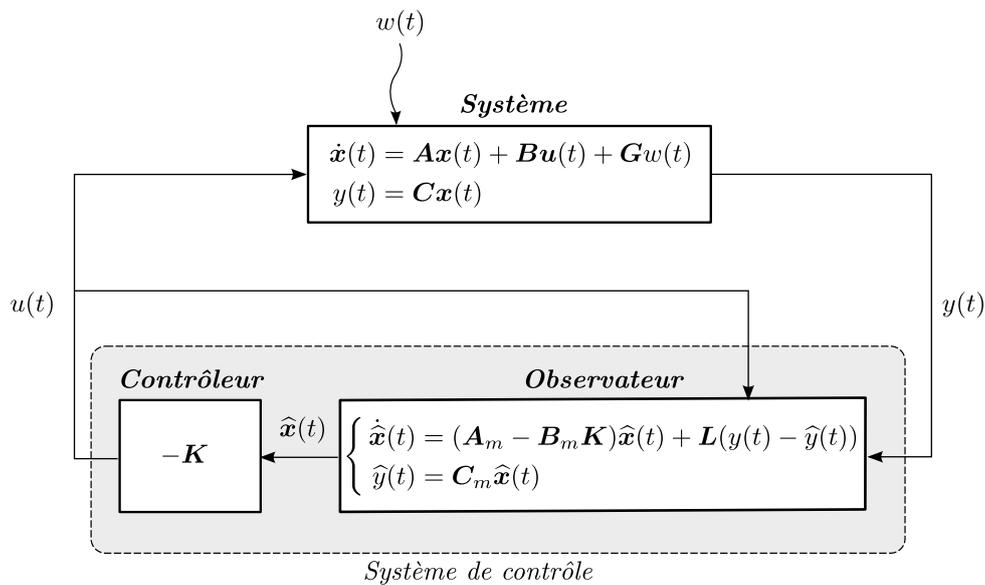


FIGURE 3.3 – Schéma du système en boucle fermée.

### 3.1.4.2 Calcul des gains de contrôle et d'observation

Deux approches peuvent être envisagées pour la détermination des gains de contrôle  $\mathbf{K}$  et d'observation  $\mathbf{L}$ .

La première approche, qui sera aussi celle utilisée dans cette étude, est la synthèse de commande par placement de pôles, ou contrôle *Full State Feedback* (FSF). Dans le cas où le système est commandable<sup>2</sup>, cet algorithme consiste à résoudre l'équation :

$$\det(s\mathbb{I}_n - \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}) = P_c(s) \quad (3.20)$$

où le polynôme  $P_c$  représente le polynôme caractéristique dont les racines sont les pôles cibles du système en boucle fermée (voir (3.17)). Les coefficients de  $\mathbf{K}$  sont obtenus en identifiant séparément les termes de même degré de l'équation (3.20). Pour les systèmes à entrée unique, la solution  $\mathbf{K}$  est déterminée de manière unique, puisqu'elle possède un nombre de composantes ( $2n$ ) correspondant aux nombres de pôles cibles que l'on cherche à imposer<sup>3</sup>. Le calcul du gain  $\mathbf{L}$  est réalisé par une méthode de placement de pôles appliquée à la matrice  ${}^t \mathbf{A}_m - {}^t \mathbf{L}^t \mathbf{C}_m$  (celle-ci étant exactement la transposée de  $\mathbf{A}_m - \mathbf{L} \mathbf{C}_m$  et possédant de fait les mêmes valeurs propres). La seule condition au choix des pôles de la matrice  ${}^t \mathbf{A}_m - {}^t \mathbf{L}^t \mathbf{C}_m$  est que la paire  $({}^t \mathbf{A}_m, {}^t \mathbf{C}_m)$  soit commandable, ce qui est assuré si la paire  $(\mathbf{C}_m, \mathbf{A}_m)$  est observable<sup>4</sup>. Les pôles de l'observateur sont en général choisis avec une partie réelle qui est environ six à huit fois plus grande [Preumont 2012] que celle des pôles du système de contrôle, afin de garantir une vitesse de convergence de l'observateur très supérieure à celle de la boucle de contrôle. Il est à noter qu'en vertu du *principe de séparation* [Preumont 2012], les pôles du système de contrôle caractérisé

2. D'après le critère de Kalman, en dimension finie, le système (3.11) est commandable si et seulement si le rang de la matrice  $\mathcal{C}_{(\mathbf{A}, \mathbf{B})} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ , appelée matrice de commandabilité, est égal à la dimension de  $\mathbf{A}$ .

3. Pour les systèmes à  $r$  entrées avec  $r > 1$  (systèmes MIMO), le gain  $\mathbf{K}$  est de dimension  $r \times 2n$ ; dans ce cas, le problème possède des degrés de liberté supplémentaires qui peuvent par exemple servir à améliorer la robustesse du système en boucle fermée [Kautsky et al. 1985].

4. D'après le critère de Kalman, en dimension finie, le système (3.11) est observable si et seulement si le rang de la matrice  $\mathcal{O}_{(\mathbf{A}, \mathbf{C})} = {}^t [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}]$ , appelée matrice d'observabilité, est égal à la dimension de  $\mathbf{A}$ .

par la matrice  $\mathbf{A}_m - \mathbf{B}_m \mathbf{K}$  et ceux de l'observateur, caractérisé par la matrice  $\mathbf{A}_m - \mathbf{L} \mathbf{C}_m$ , peuvent être déterminés indépendamment les uns des autres, ce qui signifie que le choix de  $\mathbf{K}$  se fait séparément du choix de  $\mathbf{L}$ . Il est toutefois nécessaire que leur partie réelle soit strictement négative afin d'assurer la stabilité globale du système contrôlé.

Dans ce travail, le gain  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  sont déterminés par placement de pôles. Les pôles de la matrice  $\mathbf{A}_m - \mathbf{L} \mathbf{C}_m$  seront choisis de manière à comporter une partie réelle 8 fois plus grande que celle des pôles de la matrice  $\mathbf{A}_m - \mathbf{B}_m \mathbf{K}$ . Cependant, la mise en pratique d'un système de contrôle, même si celui-ci est contrôlable, peut présenter certaines difficultés si l'énergie de la commande est très grande, ou si les valeurs de gains de contrôle atteignent des valeurs telles que la robustesse du système face aux erreurs de modélisation ou au bruit de mesure est compromise. Ces questions constituent les enjeux du contrôle optimal. Celui-ci constitue une deuxième méthode pour la détermination des gains  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$ , et est succinctement rappelé en Annexe B.

### 3.1.5 Identification du système : Méthode Rational Fraction Polynomial (RFP)

L'estimation en temps réel de l'état du système par l'observateur repose sur un modèle réduit de la structure, représenté par les matrices  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$  et  $\mathbf{C}_m$ , et obtenu par un processus d'identification du système. Une revue exhaustive des différentes méthodes d'identification, souvent classées entre méthodes temporelles et méthodes fréquentielles [Maia and Silva 2001], serait fastidieuse et non utile dans notre étude. Dans le cadre du contrôle par retour d'état dans la base modale, les méthodes d'identification les plus récentes et les plus utilisées sont fréquentielles. Les méthodes temporelles (*e.g.* les méthodes ARMAX [Box et al. 1994] et LSCE (*Least Square Complex Exponentials*) [Brown et al. 1979]) ne seront donc pas considérées ici.

Dans les méthodes fréquentielles, la fonction de transfert du système est supposée être une fonction rationnelle polynomiale dont les coefficients contiennent les paramètres modaux de la structure à identifier. Ces coefficients sont estimés par des méthodes de moindre carré à partir d'une fonction de transfert expérimentale. Parmi ces méthodes, les algorithmes Rational Fraction Polynomial (RFP) [Richardson and Formenti 1982], *Least Square Complex Frequencies* (LSCF) [Van Der Auweraer et al. 2001] et PolyMax [Peeters et al. 2004; Cauberghe et al. 2004] sont les plus utilisés aujourd'hui. Cette dernière méthode simplifie notamment la procédure délicate de sélection des pôles par l'opérateur, en fournissant des diagrammes de stabilité contenant des modes stables facilement identifiables.

L'algorithme RFP est utilisé dans ce travail. Cette méthode, développée par Richardson [1982], s'appuie sur une formulation polynomiale rationnelle de la FRF du système. Les paramètres modaux sont estimés en minimisant l'erreur quadratique entre cette formulation de la FRF rationnelle et une fonction de transfert expérimentale. Celle-ci est obtenue en excitant la structure à l'aide d'un balayage sinus envoyé dans le système par un actionneur, et en mesurant la réponse du système à l'aide d'un capteur. La méthode est beaucoup utilisée pour l'identification de systèmes SIMO (un actionneur, plusieurs capteurs); elle a été étendue au cas MIMO [Richardson and Formenti 1985] (plusieurs capteurs et actionneurs) ce qui en fait une méthode populaire pour l'analyse modale.

#### 3.1.5.1 Identification sous la forme de polynômes orthogonaux

L'objectif de l'algorithme RFP est d'approximer la fonction de transfert expérimentale, supposée de la forme de  $H_{BO}$  dans (3.14) dont les paramètres modaux sont de fait inconnus, à l'aide

d'une fraction rationnelle polynomiale  $H_0$  écrite sous la forme :

$$H_0(s) = \frac{\sum_{k=1}^M a_k s^k}{\sum_{k=1}^N b_k s^k}, \quad (M, N) \in \mathbb{N}^2, (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.21)$$

Le problème d'ajustement se réduit alors à trouver les coefficients  $(a_k)_{1 \leq k \leq M}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq N}$  de telle sorte à minimiser l'erreur quadratique entre la fonction de transfert  $H_0$  et une mesure expérimentale de la fonction de transfert en boucle ouverte. Le vecteur erreur  $\mathbf{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq L}$  est défini en  $L$  points fréquentiels, où  $e_i$  représente l'erreur quadratique à la fréquence  $\omega_i$ . D'après l'équation (3.21), les composantes  $(e_i)_{1 \leq i \leq L}$  sont :

$$e_i = \sum_{k=0}^M a_k (j\omega_i)^k - H_{exp}(\omega_i) \left( \sum_{k=0}^N b_k (j\omega_i)^k + (j\omega_i)^N \right), \quad i \in \llbracket 1, L \rrbracket \quad (3.22)$$

où  $H_{exp}$  est la fonction de transfert mesurée. En pratique, minimiser les coefficients d'erreurs  $(e_i)_{1 \leq i \leq L}$  de l'équation (3.22) en utilisant la base des polynômes  $(1, s, \dots, s^n)$  conduit à l'inversion d'un problème linéaire impliquant des matrices de Hilbert, rendant ledit problème mal conditionné [Richardson and Formenti 1982]. Cette difficulté est contournée par l'utilisation d'une base de polynômes orthogonaux tels que les polynômes de Forsythe [1957]. Une fois les coefficients extraits dans la base de Forsythe, un changement de base permet de revenir à la forme (3.21) et d'identifier les coefficients  $(a_k)_{1 \leq k \leq M}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq N}$ . En pratique, ce changement de base pose des problèmes de conditionnement numérique si l'ordre d'identification est trop élevé, c'est-à-dire si l'identification est réalisée sur une bande fréquentielle large avec un grand nombre de modes [El-Kafafy and Guillaume 2011; Chomette and Mamou-Mani 2017]. Il faut alors travailler sur des bandes fréquentielles réduites pour garantir des ordres faibles. Par ailleurs, il peut être délicat d'estimer l'ordre optimal pour une bande fréquentielle donnée, et il est alors nécessaire d'avoir recours à des diagrammes de stabilité [Mohanty et al. 2007; Lau et al. 2007]. Néanmoins, la méthode reste simple et facile d'implémentation.

### 3.1.5.2 Détermination des paramètres modaux

Pour établir le lien entre la fonction de transfert  $H_0$  (équation (3.21)), dont les coefficients sont connus par l'ajustement empirique précédent, et la forme  $H_{BO}$  (3.14) contenant les paramètres modaux,  $H_0$  est décomposée en éléments simples :

$$H_0(s) = \sum_{k=1}^{N/2} \left( \frac{r_i}{s - p_i} + \frac{r_i^*}{s - p_i^*} \right) \quad (r_i, p_i) \in \mathbb{C}^2 \quad (3.23)$$

où  $*$  désigne le complexe conjugué, et les  $(r_i)_{1 \leq i \leq N}$  et les  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont respectivement les résidus et les pôles<sup>5</sup> de la fonction de transfert  $H_0$ . Cette dernière étant connue, les  $(r_i)_{1 \leq i \leq N}$  et les  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont connus. Le développement de l'expression (3.23) donne :

$$H_0(s) = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{-2(\Re(p_i)\Re(r_i) + \Im(p_i)\Im(r_i)) + 2s\Re(r_i)}{s^2 - 2\Re(p_i)s + p_i^2} \quad (3.24)$$

Il est finalement possible, en égalisant les termes de même degré en  $s$  entre (3.24) et (3.14), de relier les pôles et résidus  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(r_i)_{1 \leq i \leq n}$  aux paramètres modaux  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ ; l'identification complète du système est réalisée.

À ce stade, deux remarques importantes doivent être formulées :

5. Les pôles  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont tous supposés avoir une multiplicité de 1 dans la décomposition (3.23).

- Premièrement, dans le cas où le terme  $2s\Re(r_i)$  est non nul, les numérateurs dans l'expression de  $H_0$  (3.24) sont complexes alors que les numérateurs de  $H_{BO}$ , les coefficients  $a_i = g_c \pi_i^c g_a \pi_i^a$ ,  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , sont par définition réels. Ceci provient du fait que la forme de fraction rationnelle (3.21) de  $H_0$  n'impose pas de restrictions sur la forme de l'amortissement qui, s'il n'est pas diagonalisable dans la base modale, peut mener à des modes complexes. La mesure de modes complexes sur un système est en général interprétée par la présence d'amortissement non-proportionnel, même si d'autres phénomènes (bruit de mesure, non-linéarités, haute densité modale...) peuvent en être à l'origine [Deblauwe and Allemang 1986]. Une solution consiste à prendre pour amplitude modale  $a_i$  le module du numérateur  $z_i = -2(\Re(p_i)\Re(r_i) + \Im(p_i)\Im(r_i)) + 2s\Re(r_i)$ ,  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , multipliée par le signe de sa partie réelle :

$$a_i = |z_i| \operatorname{sgn}(\Re(z_i)) \quad (3.25)$$

- Deuxièmement, l'équation (3.14) indique que l'amplitude modale identifiée est égale à :

$$a_i = g_c \pi_i^c g_a \pi_i^a = b_i c_i, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (3.26)$$

où les  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  et les  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont les coefficients respectifs des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ . L'identification des  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  ne caractérise donc pas les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  individuellement, mais seulement le *produit des deux*. Or, bien que ces deux matrices n'apparaissent que sous forme d'un produit dans l'identification de  $H_{BO}$ , elles interviennent de manière individuelle dans l'équation (3.12). Pour contourner cette difficulté, il est courant [Chesne et al. 2013] de fixer arbitrairement les valeurs des coefficients  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  et les  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$  de manière à ce que l'équation (3.26) soit vérifiée. Ceci se résume à poser, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} b_i &= g_a \pi_i^a := a_i \\ c_i &= g_c \pi_i^c := 1 \end{aligned}$$

Cette dernière équation achève le processus d'identification des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ , qui caractérisent le système en boucle ouverte décrit par l'équation (3.12). En conclusion, les relations entre les pôles et résidus de la fonction de transfert identifiée et les paramètres modaux ainsi que les paramètres capteur et actionneur s'écrivent, pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$\begin{cases} \omega_i = |p_i| \\ \xi_i = \frac{-\Re(p_i)}{|p_i|} \\ a_i = |z_i| \operatorname{sgn}(\Re(z_i)) \\ b_i = a_i \\ c_i = 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

### 3.1.6 Synthèse

Cette section a permis de rappeler le principe du contrôle actif modal ainsi que les formalismes sur lequel il repose. En particulier, les étapes en amont de la procédure de contrôle ont été explicitées et détaillées. Elles sont au nombre de deux :

- (i) Une étape d'identification expérimentale réalisée sur le système en boucle ouverte à l'aide d'une FRF expérimentale.
- (ii) Une étape de calcul des gains de contrôle  $K$  (en fonction de l'objectif de contrôle) et d'observateur  $L$  par un algorithme de placement de pôles.

Ces deux étapes sont résumées sur la Figure 3.4. La mise en œuvre expérimentale de ces étapes est réalisée dans la section suivante.

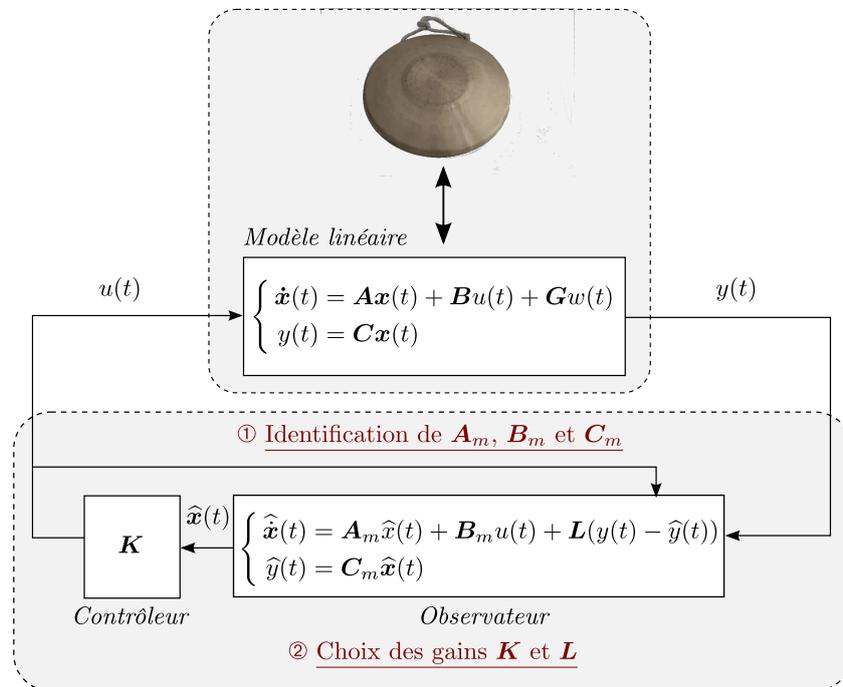


FIGURE 3.4 – Synthèse des étapes pour l'élaboration d'un contrôle modal.

## 3.2 Mise en œuvre expérimentale

Cette section présente les étapes de mise en œuvre expérimentale du contrôle actif modal, et s'intéresse exclusivement au contrôle du *mode de vibration fondamental* du gong ( $f_{(0,1)} = 451$  Hz) - la dénomination *mode fondamental* pour le mode (0, 1) est adoptée en dépit de la présence du mode (0, 2), plus bas en fréquence (voir Chapitre 1). Ce choix peut paraître réducteur dans le sens où l'un des principaux avantages du contrôle modal est le contrôle simultané de plusieurs modes de vibration. Cependant, le choix de ne contrôler qu'un seul mode est justifié ici par une considération simple : n'impliquer qu'un seul mode dans le processus de contrôle permet d'identifier simplement les comportements non linéaires (distorsion harmonique, résonances internes...) lié au comportement du mode contrôlé. En effet dans le cas d'un contrôle multi-modal, les conséquences du contrôle observées sur les différents modes correspondent à une combinai-

son (i) du contrôle en lui-même mais aussi (ii) des échanges d'énergie par résonances internes intervenant entre les modes contrôlés et d'autres modes de l'instrument.

Par conséquent, le système expérimental de contrôle utilisé ci-après est un système SISO. En effet, pour ne contrôler qu'un seul mode, un capteur et un actionneur suffisent. En premier lieu, le dispositif expérimental est décrit à la section 3.2.1. L'identification modale expérimentale dont la théorie a été présentée à la section 3.1.5 est réalisée et décrite en section 3.2.2. Enfin, le protocole de mesure est exposé en section 3.2.3.

### 3.2.1 Dispositif expérimental

#### 3.2.1.1 Instrumentation

Le capteur et l'actionneur choisis pour cette étude sont un MicroFiber Composite (MFC) (longueur : 38 mm, largeur : 14 mm) et un actionneur électrodynamique Tectonic Element - TEAX19C01-8 (masse :  $\sim 30$  grammes). Les capteurs MFC sont des capteurs piézo-électriques. Leur principal avantage est leur relative flexibilité, leur permettant d'adhérer à des surfaces courbes, comme celle d'un gong. Ils sont extrêmement légers et ajoutent une masse négligeable au système. Cependant, ils introduisent une certaine raideur locale à l'endroit où ils sont fixés. Le modèle de l'actionneur électrodynamique a été déterminé en fonction de sa gamme de réponse en fréquence ainsi que sa puissance maximale. Bien que la masse de l'actionneur électrodynamique choisi soit non négligeable (et donc potentiellement invasive quant aux fréquences modales de l'instrument), sa gamme de fréquences (300 - 20 kHz) en fait un bon choix concernant l'excitation du gong, dont les fréquences d'intérêt sont supérieures à 300 Hz. Par ailleurs, les capteurs MFC et les actionneurs électrodynamiques sont amovibles - ce qui leur confère un avantage considérable par rapport à d'autres solutions techniques, comme les patches céramiques par exemple, nécessitant d'être collés à la structure de manière définitive.



FIGURE 3.5 – Position (a) du capteur et (b) de l'actionneur utilisés pour le dispositif de contrôle expérimental.

Le choix de la localisation du capteur et de l'actionneur sur l'instrument rencontre deux problèmes délicats. Le premier est l'invasivité : l'addition de masse et de raideur induite par l'instrumentation modifie le son de l'instrument en changeant à la fois ses paramètres modaux et son degré de non-linéarité. La seconde difficulté concerne la contrôlabilité et l'observabilité : la localisation de l'instrumentation modifie les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  et donc la contrôlabilité et l'observabilité associées au mode fondamental. Si un seul mode est contrôlé, la position optimale du capteur et de l'actionneur est confondue avec le maximum de la déformée modale du mode contrôlé [Benacchio 2014]; dans le cas du mode fondamental, cette dernière est maximale au centre de l'instrument (voir Chapitre 2, Figure 2.8). Face à ces deux difficultés, le meilleur compromis consiste à placer le capteur et l'actionneur proche du centre, pour permettre une

bonne contrôlabilité et une bonne observabilité sans pour autant être trop invasif - ce que n'aurait pas manqué de causer un placement au centre. L'actionneur et le capteur sont colocalisés afin d'augmenter la stabilité du système de contrôle [Preumont 2012] (Figure 3.5).

Notons que l'introduction de cette instrumentation sur le gong ne modifie pas les formes modales. Cependant, elle décale les fréquences de certains modes de vibrations (voir Annexe 1). Notamment, la présence du capteur et de l'actionneur diminue la fréquence du mode fondamental, qui passe de 451 Hz à 449 Hz.

### 3.2.1.2 Contrôleur COALA

Le contrôleur utilisé pour les expériences est le système COALA [Piéchaud 2014], qui est un système de contrôle sous forme de prototype développé à l'IRCAM. Son utilisation dans la production d'œuvres musicales est variée, allant du contrôle modal au contrôle simple d'amplitude et de phase. Son architecture de programmation est modulaire et totalement open-source, ce qui en fait un support privilégié pour les musicien-ne-s et compositeur-trice-s.

Le système COALA est constitué d'une carte Beaglebone Black (Figure 3.6a), c'est-à-dire d'un micro-ordinateur sur lequel est installé Linux avec une distribution Debian. De plus, un environnement Xenomai [Blaess 2012] permettant un ordonnanceur déterministe effectue des tâches en temps réel à des fréquences de travail de l'ordre du kHz. La particularité du système réside dans le fait que les données ne sont pas stockées dans un tampon : les échantillons sont traités immédiatement. Sur la carte Beaglebone sont ajoutés un convertisseur analogique/numérique, des pré-amplis et des amplificateurs de puissance. Toute la chaîne d'acquisition est donc contenue dans le système, utilisable de manière autonome.

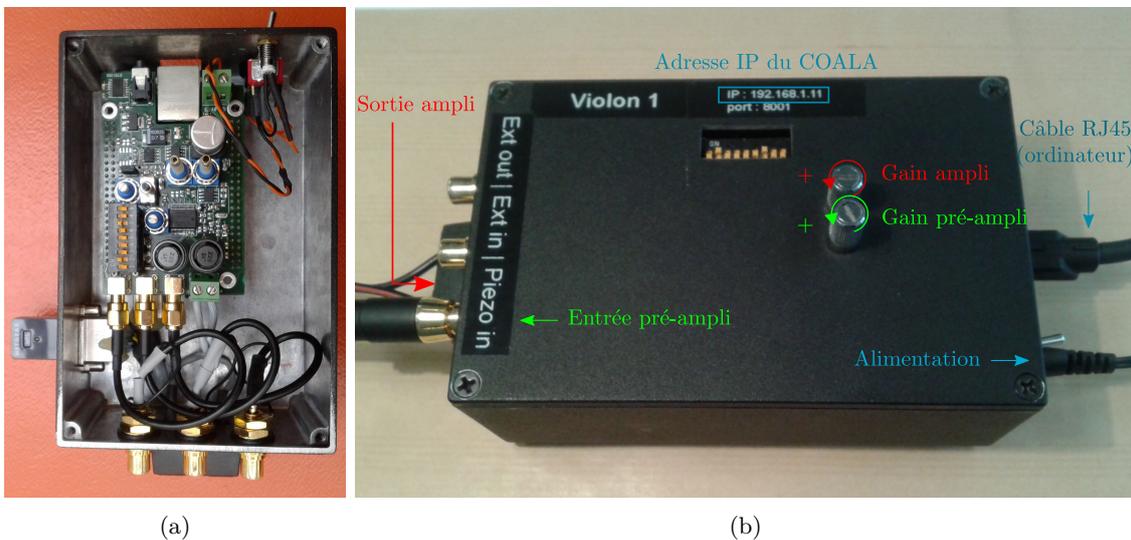


FIGURE 3.6 – Système COALA. (a) Intérieur du boîtier avec la carte BeagleBoard et la chaîne d'acquisition (b) Boîtier extérieur.

De l'extérieur (Figure 3.6b), le système COALA se présente comme un boîtier avec des entrées/sorties permettant d'y relier des actionneurs et des capteurs, ainsi qu'une liaison RJ-45 (éthernet) permettant d'importer des données (matrices du système, gains de contrôle...) ou d'en exporter (sous forme de séries temporelles par exemple). Le système COALA communique avec un PC grâce à un serveur web et une interface utilisateur sous un navigateur Firefox. L'intégration de ce système de contrôle au sein du dispositif expérimental est représentée Figure 3.7.

Les matrices de contrôle identifiées par l'algorithme RFP sont importées sur le système COALA sous forme de fichiers textes. Le contrôleur, implémenté en premier lieu sous Simulink, a été généré en C++ grâce à une Toolbox temps-réel de MATLAB. Le code est issu des équations dynamiques (3.18) discrétisées en temps - pour plus de précisions, consulter [Benacchio 2014]. La fréquence d'échantillonnage utilisée dans une boucle de contrôle doit être environ 10 à 1000 fois plus grande que la fréquence des modes contrôlés. Les fréquences d'intérêt ne dépassant pas 2000 Hz (voir section 3.2.2), la fréquence d'échantillonnage est fixée à 20 kHz. Au delà, les signaux peuvent être sur-échantillonnés et surtout la limite des performances en termes de temps de calcul du contrôleur est atteinte.

### 3.2.1.3 Eléments du dispositif

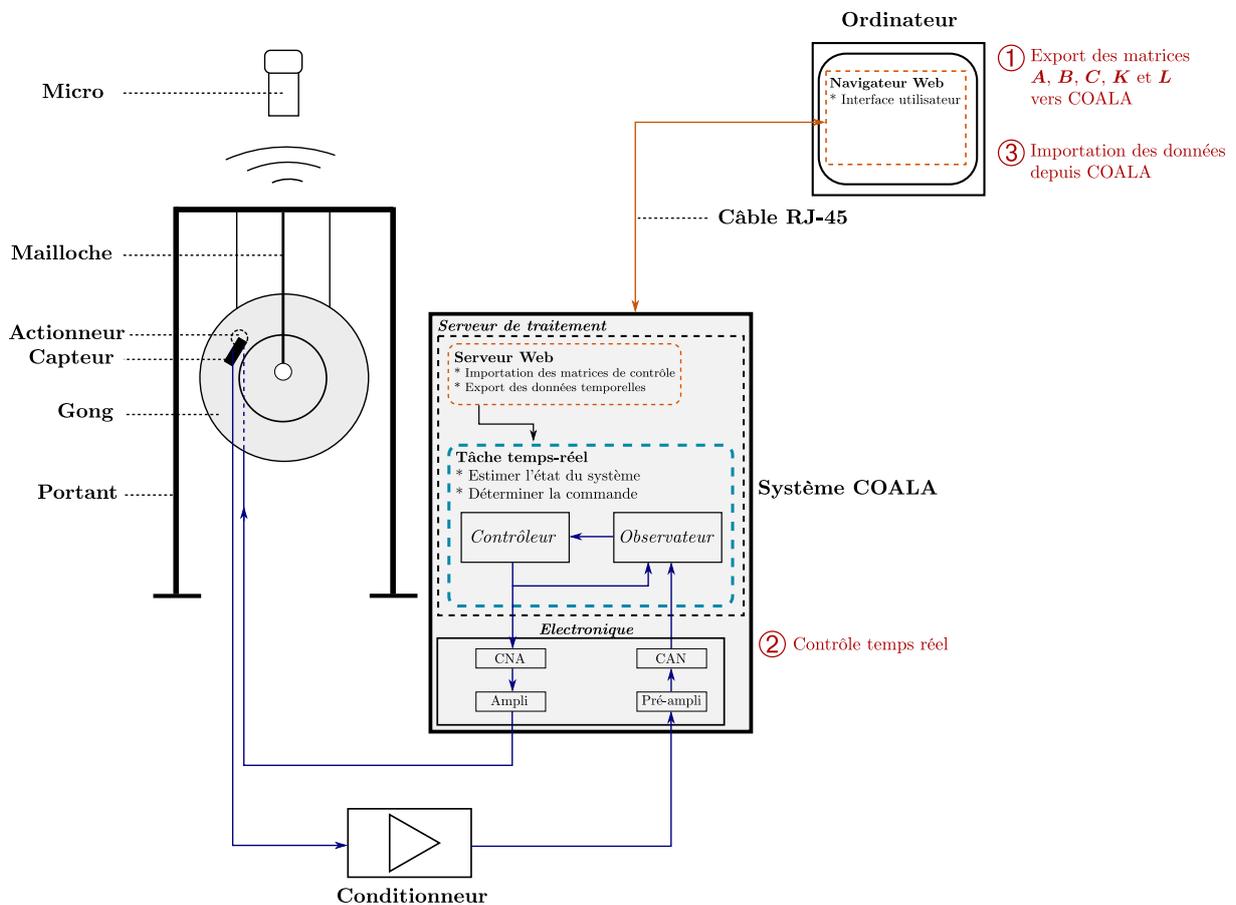


FIGURE 3.7 – Dispositif expérimental et étapes du contrôle modal expérimental.

Le dispositif expérimental comporte trois éléments principaux : (i) le gong, suspendu au système d'excitation mailloche (Chapitre 2, Figure 2.15), et instrumenté avec le capteur et l'actionneur ; (ii) le contrôleur numérique COALA ; (iii) un ordinateur. Le gong peut être mis en vibration de deux manières différentes : par l'actionneur, permettant de forcer l'instrument avec un balayage sinus et de mesurer ainsi des fonctions de transfert, et par la mailloche du système d'excitation pour l'étude du gong en régime de jeu. La chaîne complète du dispositif est représentée sur la Figure 3.7. L'actionneur et le capteur sont directement reliés à la sortie et l'entrée respectivement du contrôleur COALA, le signal capteur étant au préalable divisé par un conditionneur afin de ne pas saturer le pré-ampli intégré au système de contrôle. Par ailleurs,

pour chaque acquisition correspondant à une excitation mailloche, le son de l'instrument est enregistré au moyen d'un micro situé en face du gong, à 25 cm de distance. Les références des éléments de la chaîne de mesure sont répertoriés dans la Table 3.1.

Instrumentation	Référence
Capteur	MFC Type M 2814 P1
Actionneur	Tectonic Element TEAX19C01-8
Micro	ZOOM H2n Handy Recorder
Conditionneur	Brüel et Kjaær Type 2635
Micro-ordinateur	BeagleBone Black ®

TABLE 3.1 – Références des différents éléments de la chaîne de mesure.

L'identification des paramètres modaux avec l'algorithme RFP et le calcul des matrices de contrôle et d'observation est effectué en amont avec le logiciel MATLAB ; les étapes expérimentales sont les suivantes :

- Etape ① : exporter les matrices  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  depuis l'ordinateur vers le serveur du COALA ;
- Etape ② : lancer la boucle de contrôle et exciter l'instrument ;
- Etape ③ : importer les données temporelles du capteur et de l'actionneur depuis COALA vers l'ordinateur, pour un post-traitement.

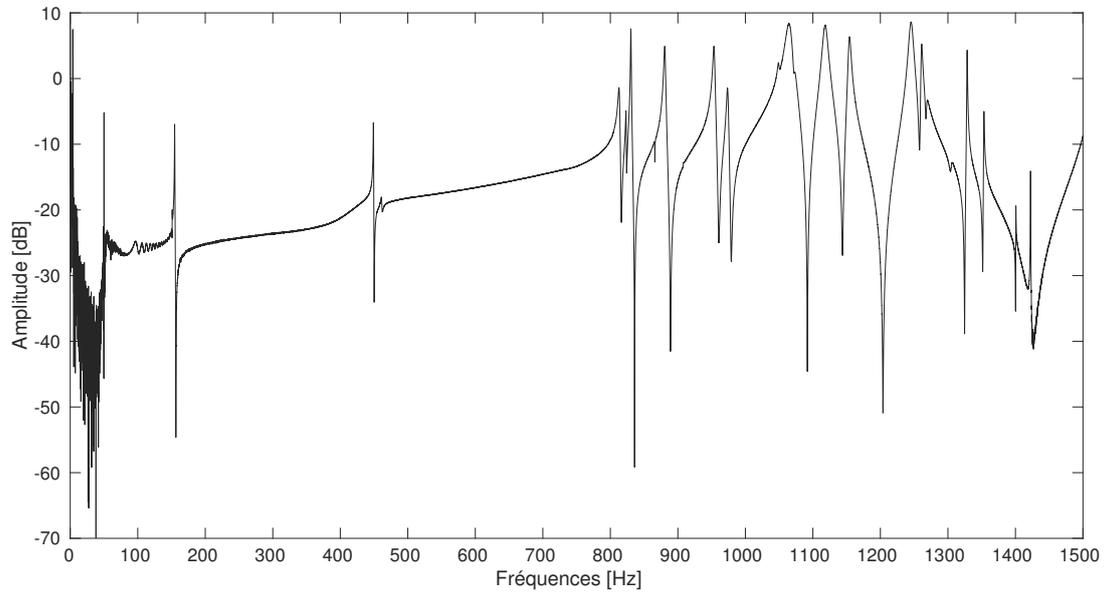
Ces trois étapes sont également récapitulées sur la Figure 3.7.

### 3.2.2 Identification modale

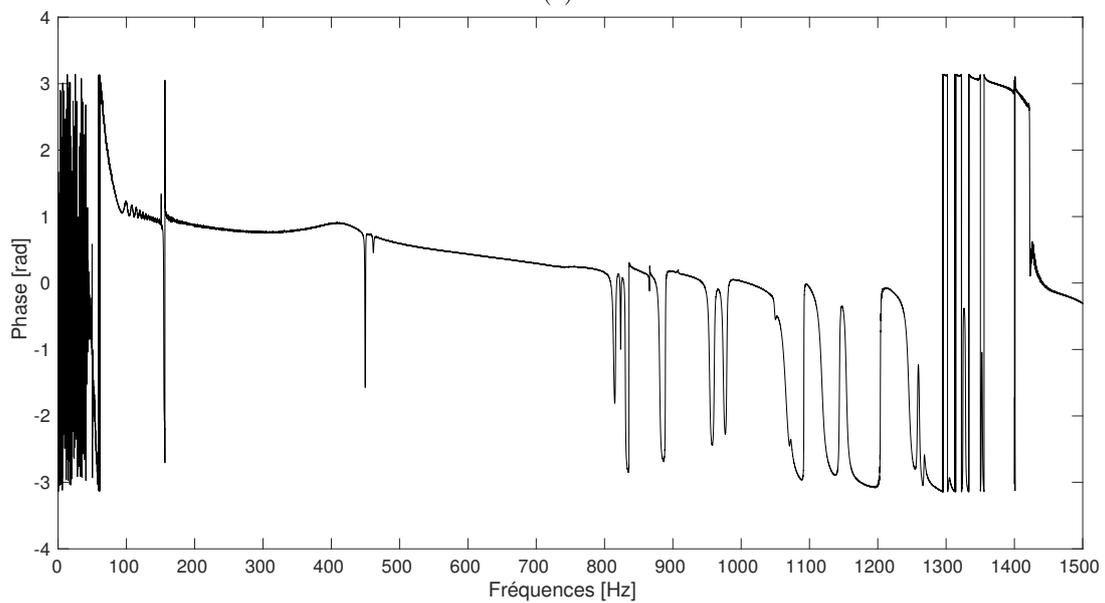
L'identification du système est réalisée à partir de la mesure d'une fonction de transfert capteur/actionneur (Figure 3.8). Celle-ci est obtenue en excitant le système par un balayage sinus entre 80 et 2000 Hz envoyé *via* l'actionneur, puis en effectuant le rapport de la FFT de la réponse de l'instrument sur la FFT de l'excitation. Elle est représentée sur la Figure 3.8. La qualité de l'identification avec l'algorithme RFP dépend ensuite de plusieurs paramètres :

- les bandes de fréquences sur lesquelles est réalisée l'identification (qui peuvent être conjointes ou disjointes) ;
- le nombre de modes pris en compte dans l'identification.

L'optimisation de ces paramètres est une étape importante. Celle-ci permet d'avoir une identification correcte du système et donc d'obtenir un modèle d'état de bonne qualité pour l'observateur. À titre d'exemple, la Figure 3.9 représente l'amplitude et la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO} = \mathbf{C}(s\mathbb{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  calculée pour différentes identifications correspondant à différents nombres de modes choisis au préalable pour l'algorithme RFP - c'est-à-dire différentes tailles de  $\mathbf{A}$ . Lorsque le nombre de modes identifiés croît, la qualité de l'identification de la fonction de transfert expérimentale augmente également. En ce qui concerne l'amplitude de la fonction de transfert (Figure 3.9a), l'ordre de l'algorithme influe à la fois sur la qualité de l'identification du mode fondamental, mais aussi sur celle des modes plus hautes fréquences - dont certains peuvent être impliqués dans des phénomènes de résonances internes avec le mode fondamental contrôlé. Cependant, même si l'amplitude est correctement identifiée pour un nombre de modes dans le modèle minimal, il n'en est pas de même pour la phase (voir Figure 3.9b). En effet, le passage des modes complexes identifiés aux modes réels *via* l'opération (3.25) ne permet pas de reconstituer correctement la phase des vecteurs propres.



(a)



(b)

FIGURE 3.8 – Fonction de transfert expérimentale obtenue avec le capteur et l'actionneur positionnés comme indiqué sur la Figure 3.5. (a) Module de la fonction de transfert. (b) Phase de la fonction de transfert.

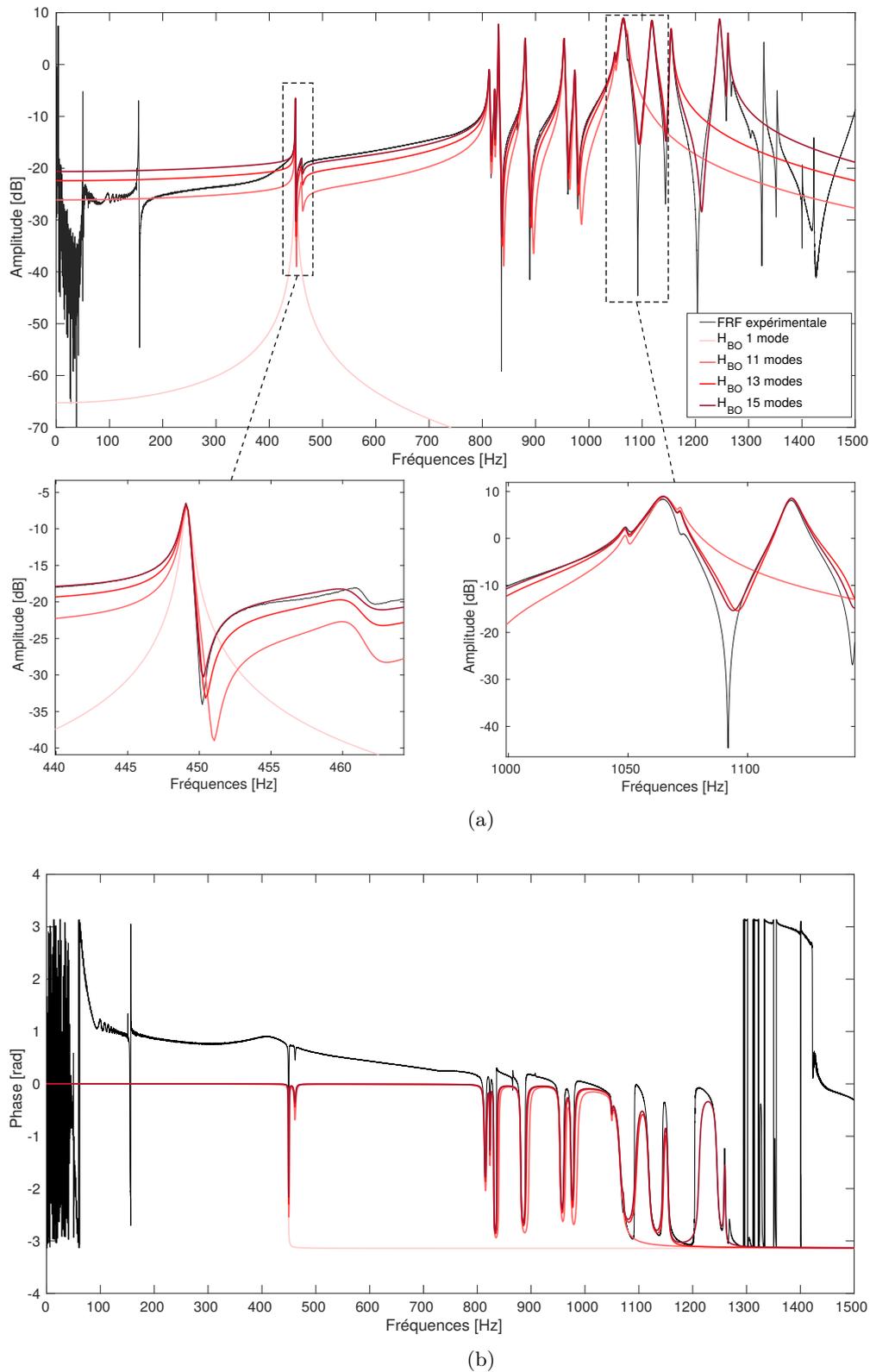


FIGURE 3.9 – Fonction de transfert expérimentale et fonctions de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}$  pour différentes valeurs du nombre de modes identifiés dans l’algorithme RFP. (a) Amplitude de la fonction de transfert. (b) Phase de la fonction de transfert. Les légendes sont identiques en (a) et en (b).

Dans l'étude qui suit, 15 modes sont identifiés et modélisés dans l'observateur ( $n = 15$ ). Ceci produit une modélisation propre des modes hautes fréquences, et permet de distinguer, pour ces modes, les effets dus au contrôle et ceux dus aux éventuels phénomènes de *spillover* [Preumont 2012]. L'amplitude et la phase de la fonction de transfert  $H_{BO}$  identifiée sont représentées Figure 3.10. Les fréquences et amortissements identifiés par l'algorithme RFP pour ces 15 modes de vibration sont donnés dans la Table 3.2. La colonne correspondant au mode contrôlé est indiquée en gras.

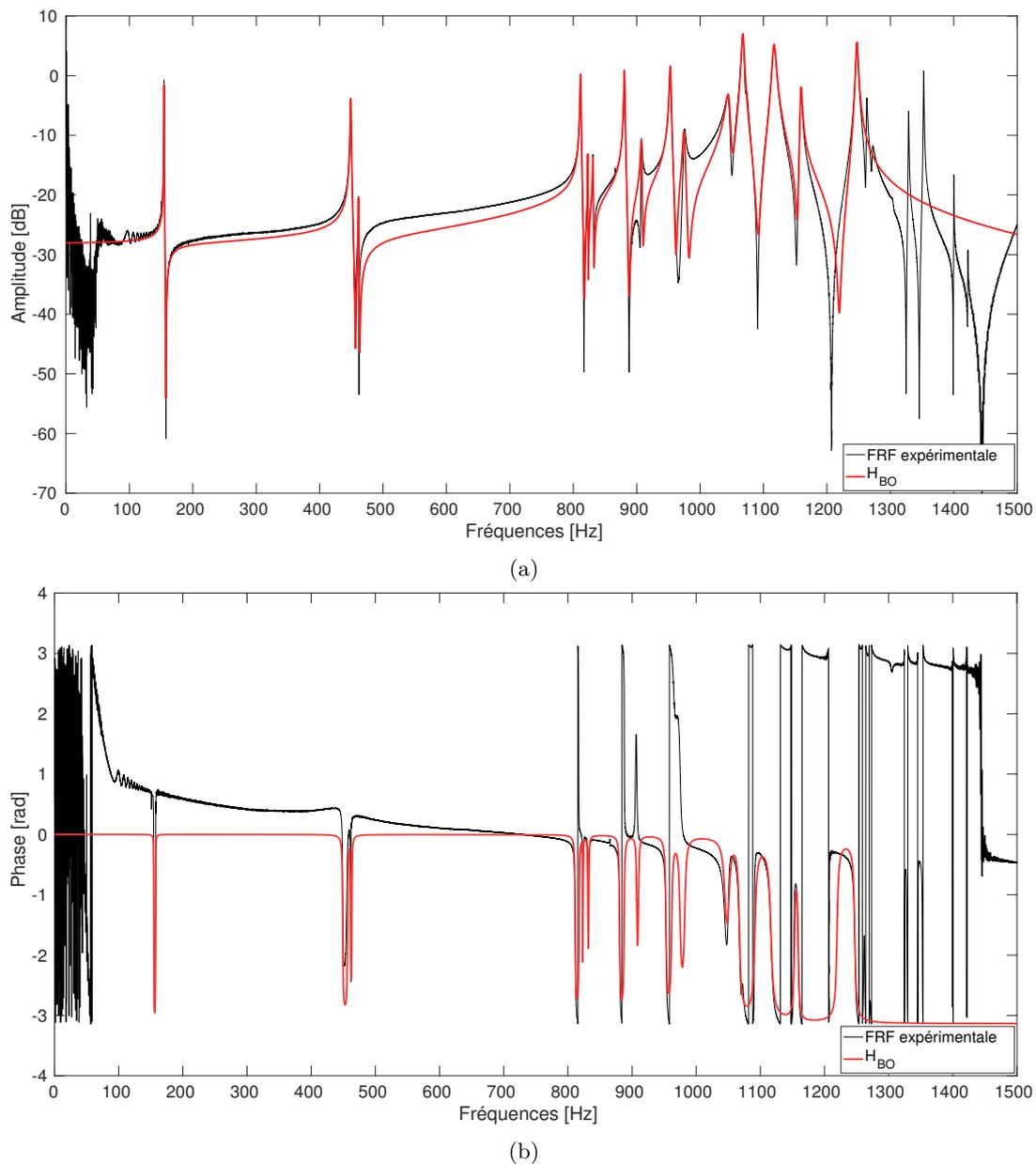


FIGURE 3.10 – Fonction de transfert expérimentale et fonction de transfert issue de l'identification pour le protocole de contrôle. Quinze modes ont été pris en compte. (a) Amplitude des fonctions de transfert. (b) Phase des fonctions de transfert.

Numéro du mode	1	<b>2</b>	3	4	5	6	7	8
Fréquence (Hz)	155	<b>449</b>	461	811	823	831	881	908
Taux amortissement	4.9e-4	<b>1.3e-3</b>	1.2e-3	7.97e-4	2.6e-4	5.0e-4	8.6e-4	8.8e-4

Numéro du mode	9	10	11	12	13	14	15
Fréquence (Hz)	953	975	1045	1067	1117	1159	1247
Taux amortissement	1.2e-3	1.5e-3	2.7e-3	2.0e-3	2.3e-3	1.3e-3	1.3e-3

TABLE 3.2 – Fréquences et taux d’amortissement identifiés par l’algorithme RFP pour les premiers modes de vibration.

### 3.2.3 Protocole de l’étude

Afin de séparer les différents effets de contrôle sur les phénomènes non linéaires, certains choix doivent être effectués ; ils sont résumés ci-dessous.

Premièrement, les phénomènes non linéaires étant multiples, il est nécessaire d’essayer au maximum de les faire apparaître le plus distinctement et séparément possible, afin de discriminer au mieux les effets dynamiques exercés sur eux par le contrôle modal. Les trois principaux phénomènes non linéaires apparaissent dans des régimes de jeu distincts (cf. Chapitre 2) : alors que les phénomènes de distorsion harmonique et de résonances internes peuvent intervenir dès les plus faibles amplitudes de vibration, le glissement fréquentiel apparaît dans des régimes de vibrations plus importants. Ainsi, la distinction des effets du contrôle actif modal sur ces différents phénomènes requiert un protocole de mesure faisant intervenir distinctement deux régimes de vibration : le premier, sans glissement fréquentiel, est appelé "régime de faible amplitude", et permet l’étude des effets du contrôle sur la distorsion harmonique et les éventuelles résonances internes ; le second est le "régime de grande amplitude" et permettra d’étudier les effets de ce même contrôle sur le phénomène de glissement fréquentiel. Ces deux régimes distincts sont étudiés en vibrations libres, et sont délimités de manière empirique par des angles de frappe différents réalisés au moyen du système de frappe (Figure 2.15). Par ailleurs, les effets du contrôle modal en régime de faible amplitude sont également étudiés avec une excitation en balayage sinus par l’intermédiaire de l’actionneur. La position et la puissance de celui-ci ne permettent pas d’atteindre un régime de vibration en grande amplitude de l’instrument.

Deuxièmement, il a été vu précédemment que le contrôle modal par retour d’état permet de contrôler la fréquence des modes ainsi que leur amortissement. Cette étude se concentre sur les résultats du contrôle en amortissement. Le contrôle en fréquence a été testé expérimentalement mais, du fait de sa moindre stabilité [Preumont 2012], n’a pas donné de résultats probants ; il est donc écarté de ce travail. Les configurations de contrôle choisies sont les mêmes pour les deux régimes de vibration, et sont au nombre de 11. Elles sont désignées par un pourcentage correspondant à l’augmentation ou la réduction de l’amortissement du mode fondamental : ainsi, la configuration "−60%" correspond à la configuration de contrôle (ou calcul du gain  $\mathbf{K}$ ) diminuant de 60% l’amortissement du mode fondamental. Enfin, les mesures de ce chapitre n’ont pas été effectuées avec la mailloche instrumentée décrite au Chapitre 2. Par conséquent, les frappes seront quantifiées par l’angle de frappe au lieu de la force.

## 3.3 Résultats

Cette section présente les résultats du contrôle actif modal en amortissement du mode fondamental. Dans un premier temps, les performances du contrôle sont évaluées par une excitation en balayage sinus, dont les résultats sont présentés dans la section 3.3.1. Les effets du contrôle actif modal sont ensuite évalués en régime de jeu dans les deux régimes de vibration : en régime

de faible amplitude pour évaluer les conséquences sur la distorsion harmonique et les résonances internes (section 3.3.2) et en régime de grande amplitude pour évaluer ceux sur le glissement fréquentiel (section 3.3.3).

### 3.3.1 Performances du contrôle actif modal

#### 3.3.1.1 Résultats expérimentaux

Les performances du contrôle actif modal sont évaluées en mesurant la fonction de transfert expérimentale entre le capteur et l'actionneur, pour une excitation en balayage sinus (80-2000 Hz). Les fonctions de transfert obtenues pour les 11 configurations de contrôle sont représentées sur la Figure 3.11. La fonction de transfert du système contrôlé n'est modifiée qu'autour du mode fondamental (Figure 3.11a), pour lequel le contrôle est qualitativement validé (Figure 3.11b) : l'amplitude du mode fondamental est augmentée d'environ +5dB pour la configuration de contrôle -70%, et de -7dB pour la configuration de contrôle +200%.

Afin de déterminer quantitativement les performances du contrôle, le gong est frappé en son centre avec le système de frappe, avec un angle de 20 degrés. Pour chaque configuration de contrôle, l'amortissement du système est déterminé à partir du signal du capteur filtré avec un filtre passe-bande de Butterworth d'ordre 4 autour de 450 Hz (Figure 3.12a). L'enveloppe en dB du signal filtré est ensuite calculée (Figure 3.12b), et une régression linéaire est réalisée sur sa pente afin d'en déduire le taux d'amortissement effectivement atteint par le système contrôlé. Les amortissements ainsi mesurés pour chaque configuration de contrôle sont répertoriés dans la Table 3.3. L'écart-type de la régression linéaire effectuée sur les données temporelles est indiqué pour chaque valeur de contrôle. Celle-ci met en évidence de bonnes performances quantitatives pour des configurations de contrôle situées entre -50% et +100%. En deçà ou au delà, des différences non-négligeables apparaissent entre les valeurs d'amortissements cibles et les valeurs d'amortissement expérimentalement atteintes.

<b>Cible</b>	-70%	-60%	-50%	-40%	+50%	+75%	+100%	+125%	+150%	+175%	+200%
Valeur	3.9e-4	5.2e-4	6.5e-4	7.8e-4	1.9e-3	2.3e-3	2.6e-3	2.9e-3	3.2e-3	3.6e-3	3.9e-3
<b>Atteint</b>	-53%	-47%	-40%	-43%	+49%	+80%	+109%	+140%	+178%	+216%	+245%
Valeur	6.4e-4	7.1e-4	8.0e-4	7.7e-4	2.0e-3	2.4e-3	2.8e-3	3.3e-3	3.8e-3	4.3e-3	4.7e-3
Ecart type	0.68%	0.67%	0.63%	0.76%	0.45%	0.72%	0.93%	1.17%	0.89%	0.84%	1.3%

TABLE 3.3 – Amortissements cibles et amortissements expérimentaux atteints par le système en boucle fermée pour les 11 configurations de contrôle. L'écart-type correspond à celui de la régression linéaire.

La Figure 3.11b indique également un décalage en fréquence de  $\sim 1$  Hz quand l'amortissement cible augmente. Ce décalage est légèrement supérieur au décalage fréquentiel lié à l'amortissement du mode. En effet, le rapport de la fréquence du mode non contrôlé, notée  $f_0$ , et la fréquence du mode contrôlé, notée  $f_c$ , est donné par :

$$\frac{f_c}{f_0} = \frac{\sqrt{1 - \xi_c^2}}{\sqrt{1 - \xi_0^2}}$$

où  $\xi_c$  est l'amortissement du mode contrôlé et  $\xi_0$  celui du mode non contrôlé. Dans le cas de la configuration de contrôle +200%, la fréquence du mode contrôlé doit être égale, d'après les tables 3.2 et 3.3, à  $f_c = 448.99$  Hz, ce qui est supérieur d'un peu plus d'1 Hz à la fréquence mesurée (447.8 Hz).

Ces divergences entre objectif de contrôle et résultats expérimentaux peuvent être expliquées par trois facteurs concomitants : (i) une qualité médiocre d'identification de la phase de la fonction de transfert par l'algorithme RFP (Figure 3.9b) entraînant un mauvais modèle pour l'observateur et une mauvaise estimation de l'état  $\hat{x}$  nécessaire à la détermination de la

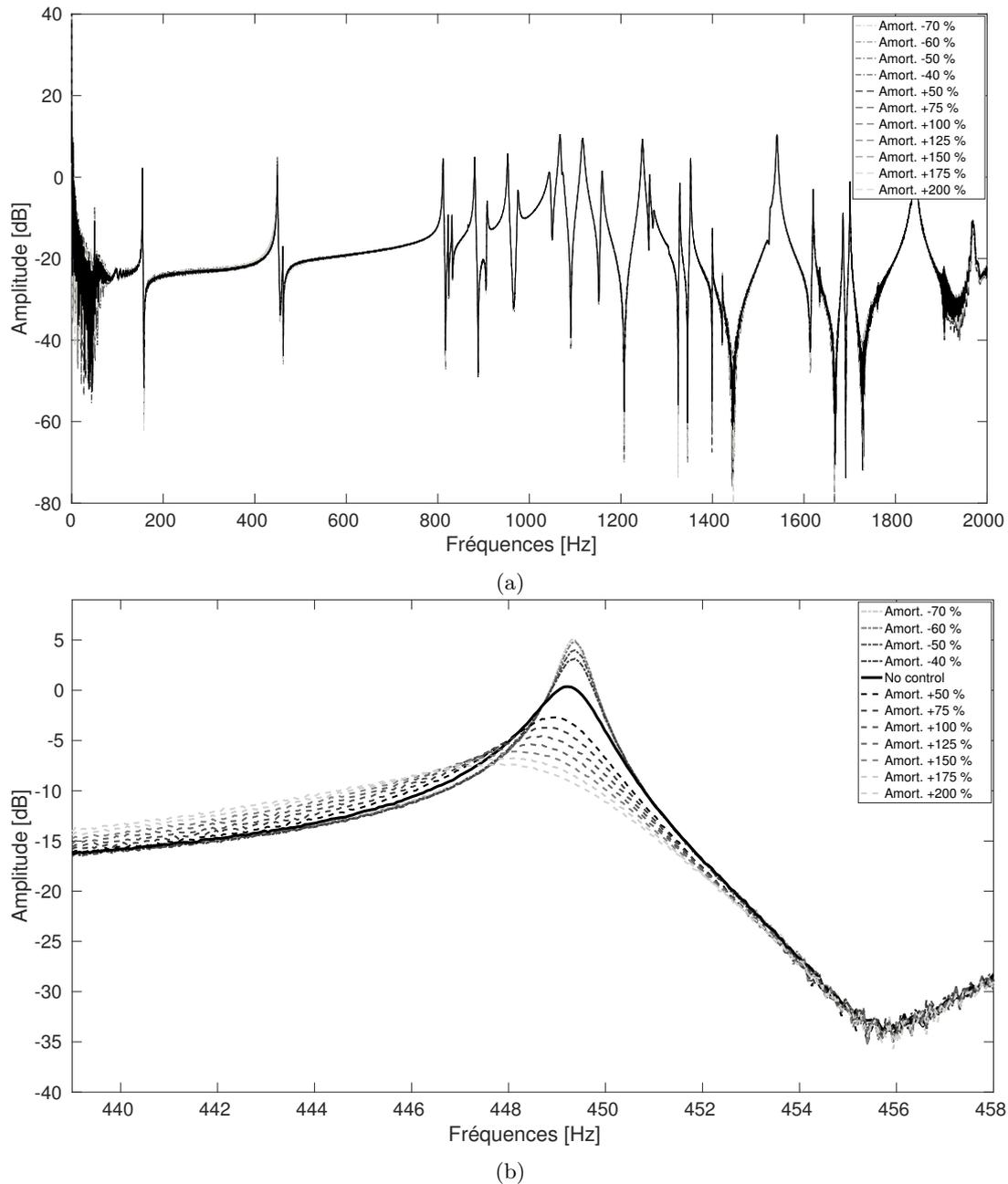


FIGURE 3.11 – Amplitude des fonctions de transfert expérimentales pour les différentes configurations de contrôle. (a) Fonctions de transferts sur toute la bande d'excitation. (b) Zoom autour du mode fondamental.

commande  $u(t) = -\mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t)$ ; (ii) un gain  $\mathbf{L}$  important menant à une augmentation de l'erreur d'estimation de l'observateur, et donc de l'état  $\hat{\mathbf{x}}$  du système (voir Annexe B); (iii) la commande  $u(t) = -\mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t)$ , répercutant cette erreur sur l'état, et ce d'autant plus que le gain de contrôle  $\mathbf{K}$  est élevé. Cette dernière remarque semble se vérifier concernant les résultats de la Table 3.3 : l'erreur entre amortissement cible et amortissement atteint est plus grande pour la configuration de contrôle +200% que pour la configuration +125%.

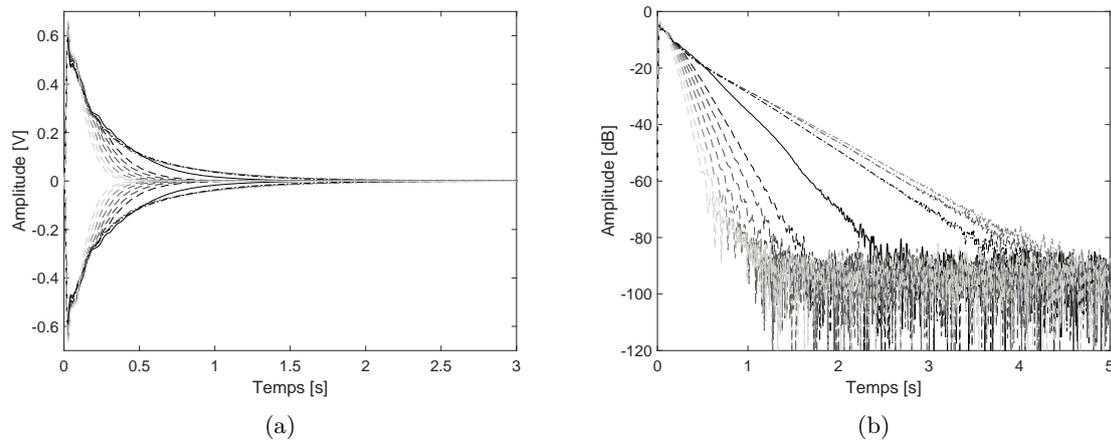


FIGURE 3.12 – Enveloppes des signaux capteurs enregistrés après une frappe mailloche (angle :  $20^\circ$ ) pour les 11 configurations de contrôle. (a) Enveloppes en volts. (b) Enveloppes en dB à partir desquelles est déterminé l’amortissement du système. Les légendes sont les mêmes que sur la Figure 3.11.

### 3.3.1.2 Comparaison avec la simulation

Les conséquences de la qualité de l’identification sur les performances du contrôle peuvent être facilement étudiés en simulation. Pour cela une mise en oeuvre du système contrôlé expérimental est réalisée sous le logiciel de modélisation Simulink. Le principe est le suivant : la dynamique de la structure physique est simulée par un modèle d’état caractérisé par les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ . À ce système sont adjoints un contrôleur et un observateur avec les mêmes paramètres  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  que ceux utilisés dans les expériences. L’observateur est caractérisé par les matrices  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$  et  $\mathbf{C}_m$ , différentes ou égales respectivement aux matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ . Le cas où elles sont égales correspond au cas d’*identification parfaite*. Les termes des matrices de l’observateur  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$  et  $\mathbf{C}_m$  peuvent être modifiés afin de rendre compte respectivement de problèmes d’identification du système, de l’actionneur, ou du capteur. La simulation est réalisée avec la même fréquence d’échantillonnage que le système COALA (20 kHz).

La configuration d’identification parfaite ( $\mathbf{A}_m = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}_m = \mathbf{C}$ ) est réalisée pour les différentes configurations de contrôle, à la fois avec une excitation sous forme de balayage sinus (80-2000 Hz), et une excitation mailloche simulée par une impulsion créneau. Les fonctions de transfert obtenues dans le cas de l’excitation en balayage sinus, et normalisées par rapport aux résultats expérimentaux, sont représentées Figure 3.13. Ces résultats sont à comparer avec les résultats expérimentaux Figure 3.11. La première observation concerne le décalage fréquentiel qui, présent dans les résultats expérimentaux de la Figure 3.11, est absent des résultats de simulation de la Figure 3.13. Les amortissements atteints par le système sont calculés à partir des signaux simulés par l’excitation créneau, en exécutant une régression linéaire sur l’enveloppe du régime libre. Les résultats, présentés dans la Table 3.4, montrent que les amortissements obtenus en simulation sont significativement plus proches des amortissements cibles que ceux mesurés dans le cas expérimental (voir Table 3.3).

Ce résultat souligne le fait que la première hypothèse avancée pour expliquer les performances faibles du contrôle modal pour les grandes variations d’amortissement est probablement valide.

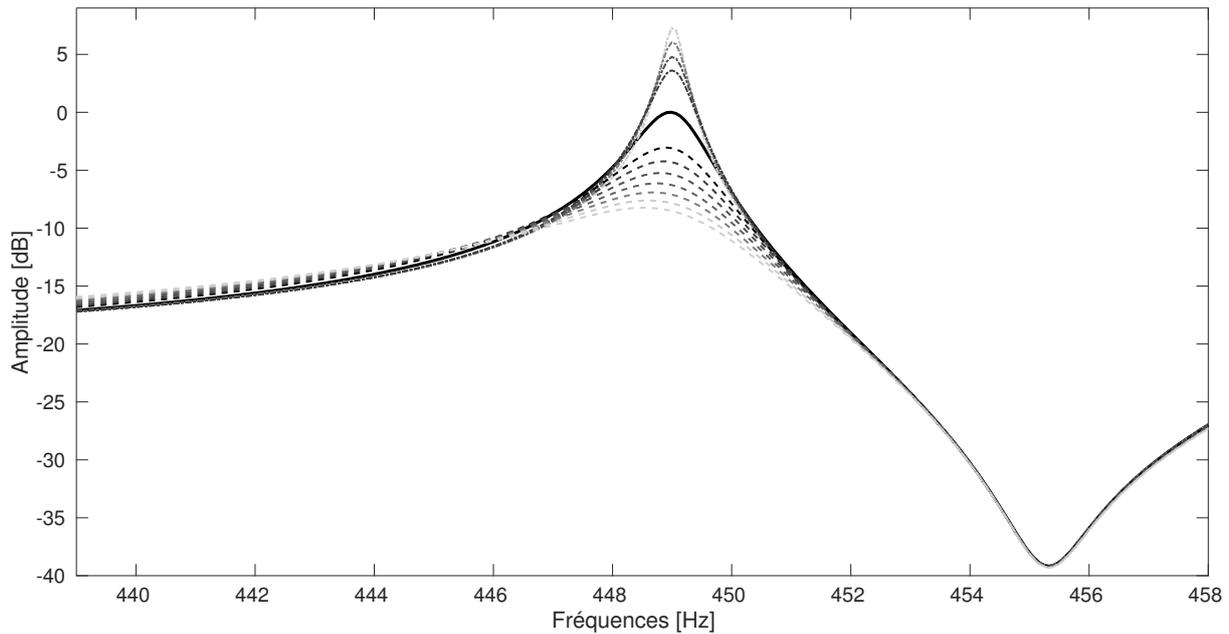


FIGURE 3.13 – Amplitude des fonctions de transfert issues de la simulation Simulink avec excitation en balayage sinus (80-2000 Hz). La légende est la même que sur la Figure 3.8.

Cible	-70%	-60%	-50%	-40%	+50%	+75%	+100%	+125%	+150%	+175%	+200%
Valeur	3.9e-4	5.2e-4	6.5e-4	7.8e-4	1.9e-3	2.3e-3	2.6e-3	2.9e-3	3.2e-3	3.6e-3	3.9e-3
Atteint	-69%	-59%	-50%	-40%	+50%	+75%	+99.1%	+126%	+152%	+177%	+202%
Écart type	5.5%	3.6%	2.9%	2.6%	2.7%	2.6%	2.6%	2.6%	2.7%	2.9%	3.2%

TABLE 3.4 – Amortissements cibles et amortissements atteints par le système en boucle fermée simulé pour les 11 configurations de contrôle.

### 3.3.2 Effets du contrôle modal sur la distorsion harmonique et les résonances internes

Les performances du contrôle modal en amortissement du mode fondamental ayant été validées, cette section s'intéresse aux effets de ce contrôle dans le "régime de faible amplitude" de l'instrument (*i.e.* en l'absence de glissement fréquentiel). L'observation de phénomènes non linéaires de faible amplitude comme la distorsion harmonique et/ou les résonances internes ne peut être réalisée par une excitation en balayage sinus. Ceci est indiqué par le fait que la distorsion harmonique d'ordre deux du mode fondamental (située à 898 Hz) est absente de la FRF expérimentale du système (Figure 3.8a).

Au contraire, une excitation au centre de l'instrument permet d'observer au moins la distorsion harmonique d'ordre deux et trois, comme cela a été montré au Chapitre 2. En conséquence, il est possible d'évaluer les performances du contrôle du mode fondamental sur la distorsion à partir des spectres globaux des signaux capteurs mesurés et utilisés à la section 3.3.1. Ces spectres sont représentés sur la Figure 3.14a pour les configurations de contrôle allant de +50% à +200%. La majorité de la bande de fréquences en dehors de la zone fréquentielle du mode fondamental ne semble pas touchée par le contrôle modal. En revanche, certaines zones de fréquences, délimitées sur la Figure 3.14a par des aires grisées, sont affectées de manière locale. Ainsi, les pics fréquentiels situés à 898 Hz (Figure 3.14b), 1261 Hz (Figure 3.14c) et 1272 Hz (Figure 3.14d) sont amortis. La première composante fréquentielle est située exactement au double

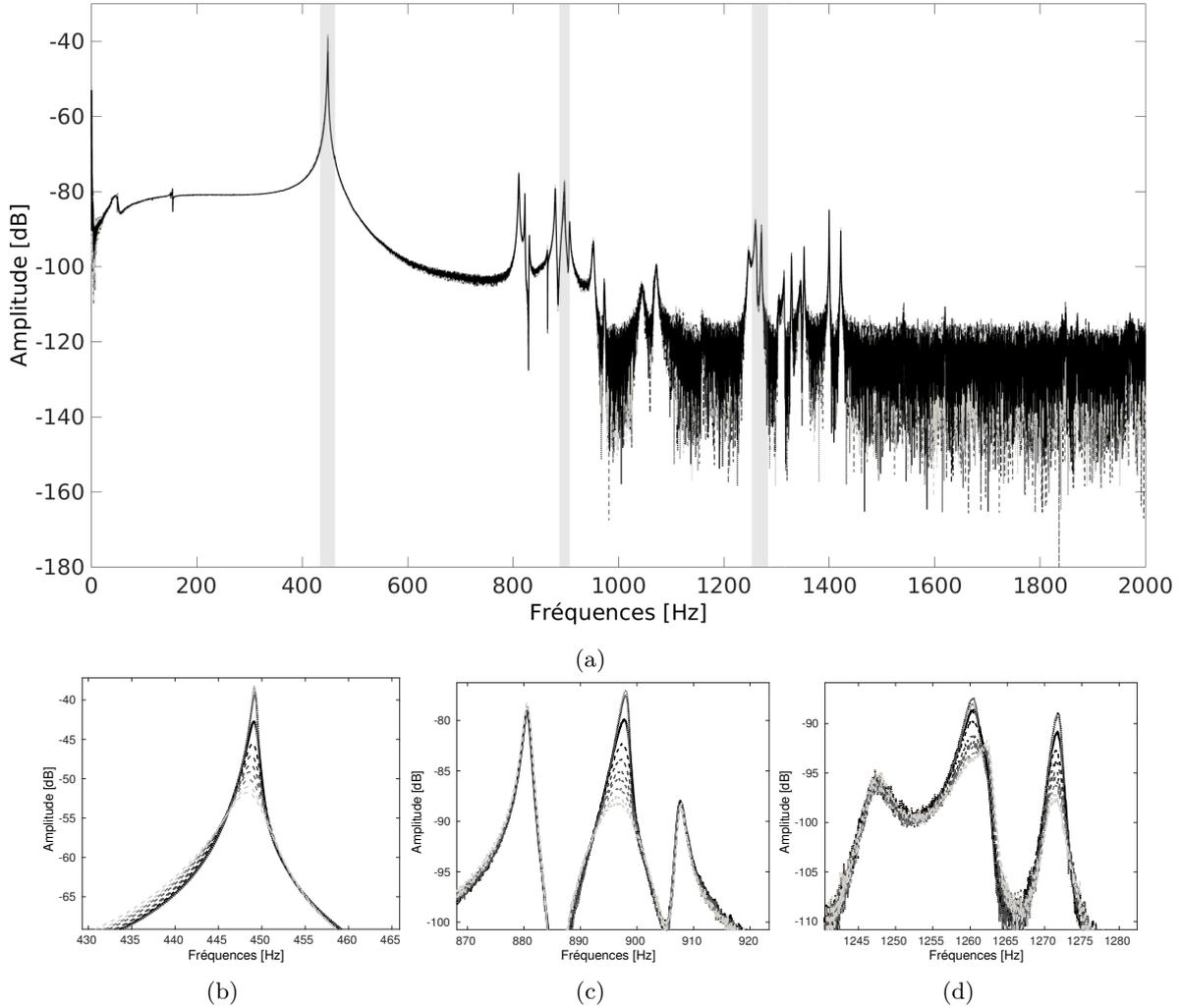


FIGURE 3.14 – FFT du signal enregistré au capteur avec une excitation mailloche en faible amplitude (angle :  $20^\circ$ ), pour les configurations de contrôle répertoriées dans la Table 3.3. (a) FFT sur toute la bande de fréquences 0-2000 Hz. Les zones grisées indiquent les zones d'intérêt représentées en (b), (c) et (d). (b) FFT du pic à 449 Hz. (c) FFT du pic à 898 Hz. (d) FFT des pics à 1261 Hz et 1272 Hz.

de la fréquence du mode contrôlé (449 Hz) et correspond à la distorsion harmonique d'ordre 2<sup>6</sup>. Les composantes à 1261 Hz et 1272 Hz correspondent quant à elles à deux modes compagnons de la structure, dont la déformée modale correspond à la notation (6,0) (cf. section 2.2). L'impact du contrôle modal sur ces modes s'explique par la présence d'une résonance interne de type 1:1:1 ( $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ ), présente entre le mode fondamental situé à  $f_1 = 449$  Hz, les modes compagnons à  $f_2 = 1261$  Hz et  $f'_2 = 1272$  Hz, ainsi que les modes situés à  $f_3 = 811$  Hz et  $f'_3 = 823$  Hz. En effet, les relations fréquentielles suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= f_3 \\ f_1 + f'_2 &= f'_3 \end{aligned}$$

Ces deux résonances internes sont représentées sur la Figure 3.15. Les déformées modales intervenant dans une même résonance interne sont représentées par la même couleur (rose ou

6. Les effets du contrôle sur la distorsion harmonique d'ordre 3 ne peuvent pas être évalués car l'amplitude de celle-ci est trop faible.

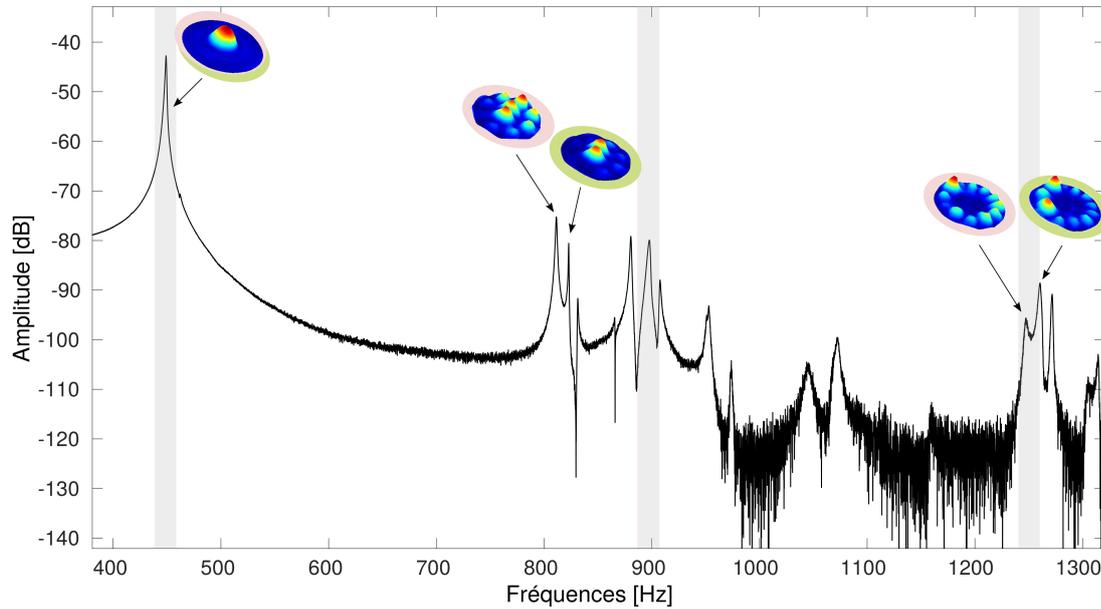


FIGURE 3.15 – Identification des modes impliqués dans des résonances internes 1:1:1 avec le mode fondamental contrôlé. Les modes présentant une relation de résonance interne sont désignés par leur déformée modale et entourés d'un cercle de même couleur (rose ou vert) - le mode fondamental participe ainsi à deux résonances internes différentes. Les zones grisées correspondent aux bandes fréquentielles impactées par le contrôle.

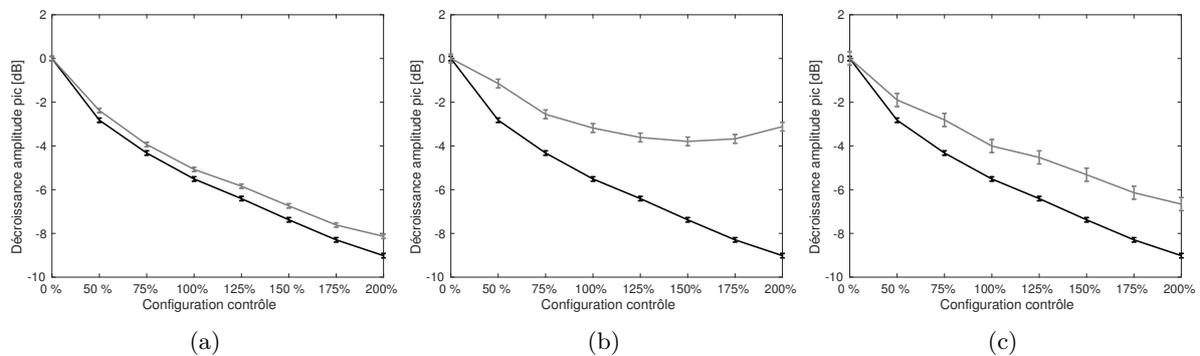


FIGURE 3.16 – Décroissance de l'amplitude du pic du fondamental (noir) et celle des pics fréquentiels contrôlés observés Figure 3.14 (b), (c) et (d) (gris), en fonction de la configuration de contrôle. (a) Pic à 898 Hz. (b) Pic à 1261 Hz. (c) Pic à 1272 Hz.

vert). On remarque que les deux modes à 811 et 823 Hz, bien qu'intervenant dans les résonances internes 1:1:1 et donc dans un échange d'énergie avec le mode fondamental et les modes compagnons (6,0), ne sont pas affectés par le contrôle modal. En revanche, l'amplitude des composantes fréquentielles contrôlées diminue (Figure 3.16). L'amplitude du pic fréquentiel associé à la distorsion harmonique diminue qualitativement comme celle du mode fondamental, ce qui n'est pas le cas concernant les modes compagnons situés à 1261 et 1272 Hz. Cela s'explique simplement par le fait que le mode fondamental, ainsi que les modes compagnons, sont susceptibles d'être impliqués dans d'autres résonances internes que celles mises en évidence ici.

### 3.3.3 Effets du contrôle modal sur le glissement fréquentiel

L'étude des effets du contrôle modal sur le glissement fréquentiel est réalisée par une excitation *via* le système de frappe. En effet, la position et les performances de l'actionneur ne permettent pas d'exciter le mode fondamental dans un régime de vibration autorisant le changement de la fréquence avec l'amplitude de vibration. Ci-après des angles d'attaque croissants (46°, 50°, 57°, 63°, 70°) sont utilisés pour étudier l'effet du contrôle modal dans des régimes différents de glissement fréquentiel et ce, pour toutes les configurations de contrôle. La quantité de données collectées étant importantes, seules les données mettant en avant les propriétés des performances du contrôle modal sur le glissement fréquentiel sont présentées.

#### 3.3.3.1 Étude qualitative des performances

Une première approche qualitative de ces performances peut être effectuée en comparant les spectrogrammes du son émis par le gong pour un même angle de frappe, dans une configuration sans contrôle et une configuration avec contrôle. Cette comparaison est visible sur la Figure 3.17. La bonne reproductibilité du système de frappe permet de remarquer que la seule composante affectée est, comme précédemment, le mode fondamental. Par ailleurs, le glissement fréquentiel n'est pas modifié, contrairement à la fin de la vibration qui est amortie qualitativement comme en régime de faible amplitude. Cette remarque est confirmée en mesurant l'évolution de la fréquence instantanée du mode fondamental en fonction du temps, pour toutes les configurations de contrôle et un même angle de frappe. Cette mesure est réalisée en filtrant le signal du capteur par un filtre passe-bande autour du mode fondamental, puis par un filtre dérivateur sur la phase. Les résultats sont exposés sur la Figure 3.18 et confirment l'hypothèse précédente : la fréquence instantanée du mode fondamental n'est pas modifiée par les configurations de contrôle.

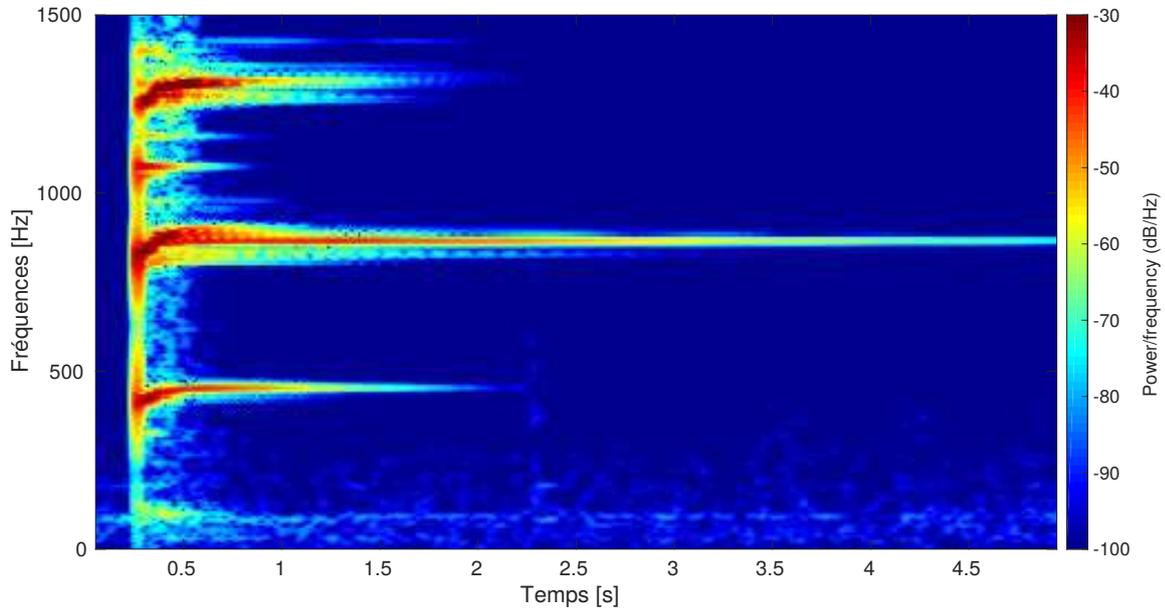
En revanche, ce dernier est bien amorti dans son régime de faible vibration (Figure 3.17). Pour le vérifier pour un angle de frappe donné, le signal capteur est filtré autour du mode fondamental, et son enveloppe en dB est récupérée. Cette opération est réalisée pour les 11 configurations de contrôle sur la Figure 3.19. Tous les signaux, quelle que soit la configuration de contrôle, sont confondus lors de la première demi-seconde environ, correspondant à la durée du glissement fréquentiel (Figure 3.18). Ce résultat signifie que lors de cet intervalle de temps, le contrôleur n'a aucune action sur le système. En revanche, au delà, les enveloppes se séparent en plusieurs droites dont chaque pente dépend de la valeur de la configuration de contrôle. Plus précisément, l'instant auquel chaque enveloppe se détache de l'ensemble des signaux confondus dépend de la valeur de l'amortissement cible : plus celui-ci est élevé, plus l'enveloppe du signal capteur correspondant se détache tôt dans le temps (Figure 3.19).

#### 3.3.3.2 Étude quantitative des performances

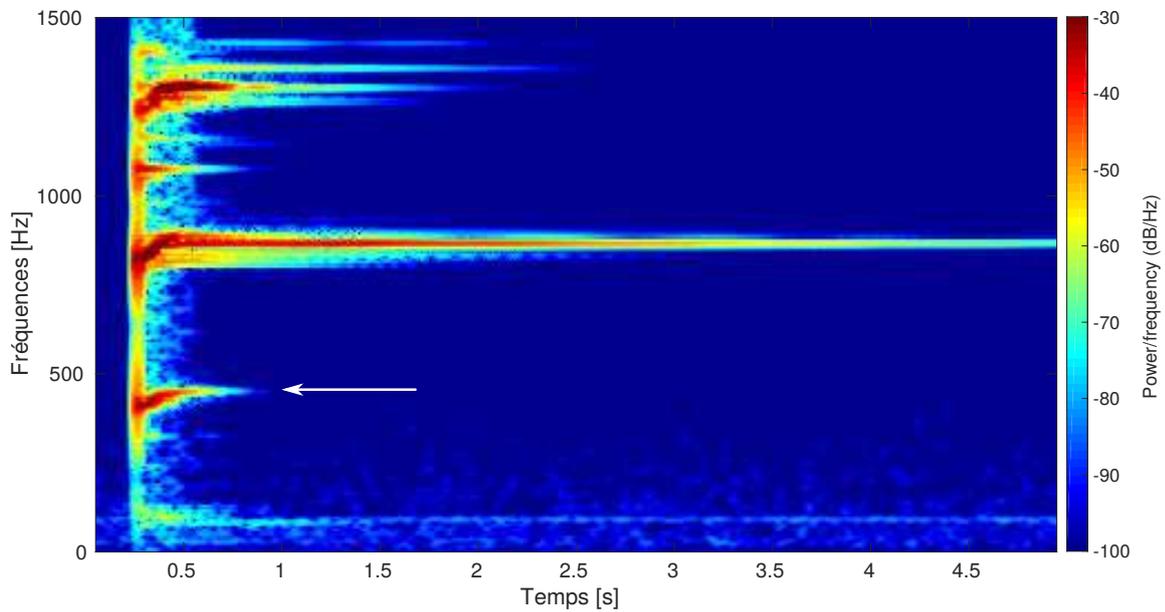
Les considérations qualitatives effectuées dans la section précédente appellent à une étude plus quantitative des performances du contrôle sur le glissement fréquentiel. Cette étude quantitative s'effectue ci-après en abordant deux points :

- (i) La relation entre l'instant temporel auquel les signaux capteurs se séparent les uns des autres et la commande associée ;
- (ii) L'établissement d'un critère d'efficacité du contrôle reposant sur la fréquence instantanée du mode fondamental.

Le point (i) est abordé par la Figure 3.20, dans laquelle l'enveloppe du signal capteur correspondant à la configuration de contrôle +200% est comparée à celle du signal de la configuration sans contrôle.



(a)



(b)

FIGURE 3.17 – Spectrogramme du son émis par l'instrument pour un angle de frappe de  $63^\circ$ , dans la cas d'une configuration (a) sans contrôle (b) de contrôle de +200% en amortissement.

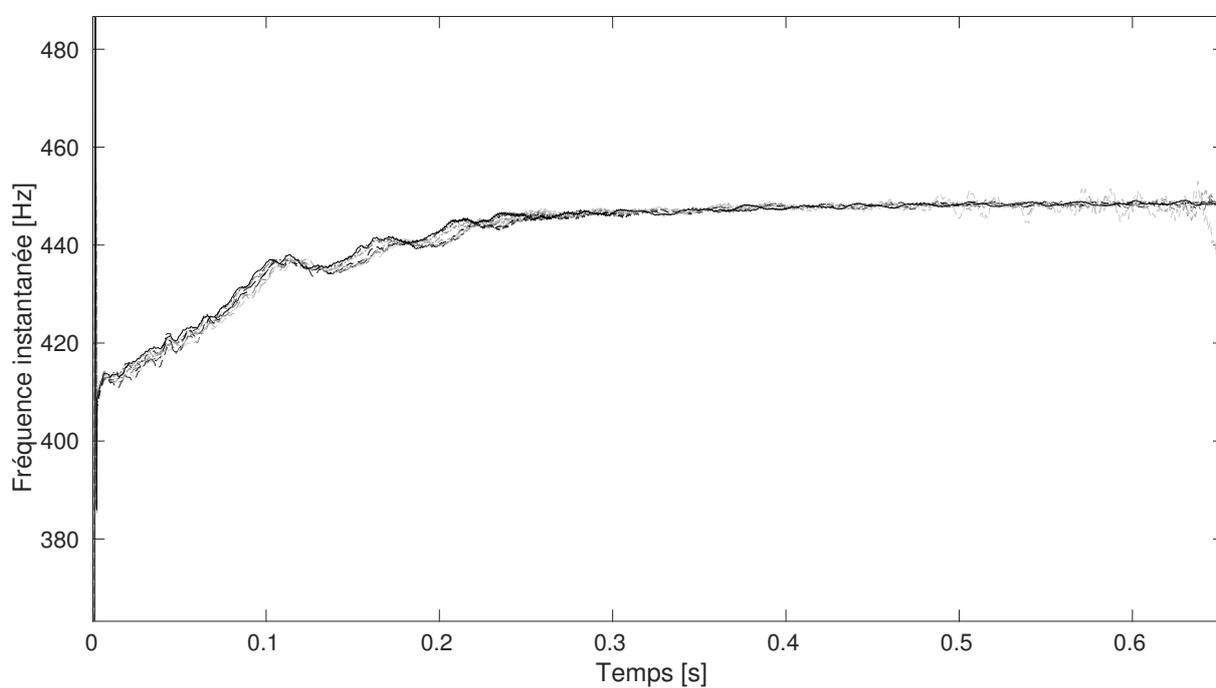


FIGURE 3.18 – Evolution de la fréquence instantanée en fonction du temps du mode fondamental, extraite à partir des enregistrements du son de l'instrument pour les 11 configurations de contrôle et un même angle de frappe de  $63^\circ$ . Les légendes sont identiques à la Fig. 3.11.

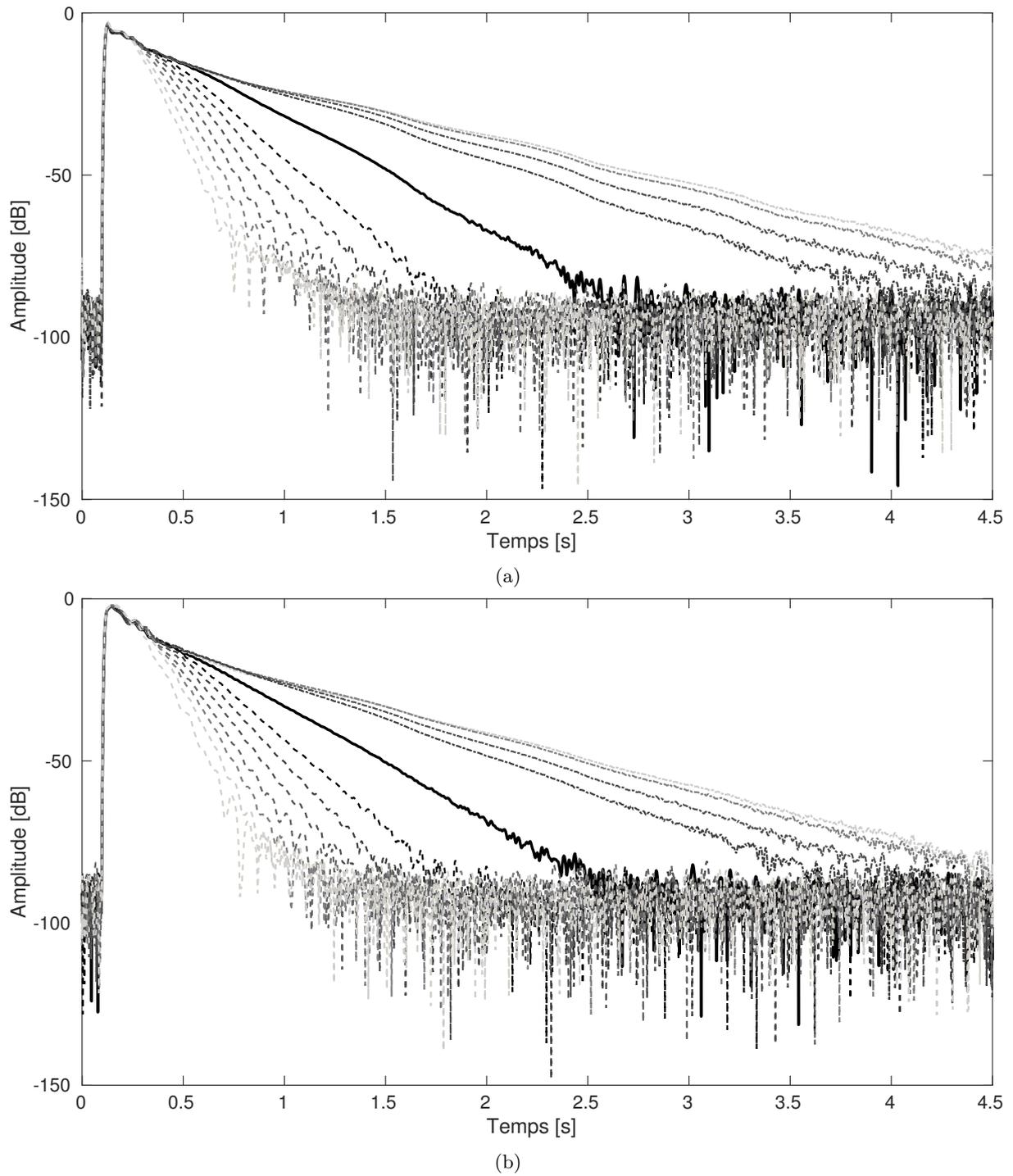


FIGURE 3.19 – Envelopes de l'amplitude du signal du capteur filtré autour du mode fondamental pour les 11 configurations de contrôle, et pour deux angles de frappe : (a) Angle de frappe de  $40^\circ$ . (b) Angle de frappe de  $27^\circ$ . Les légendes sont identiques à celles de la Figure 3.11.

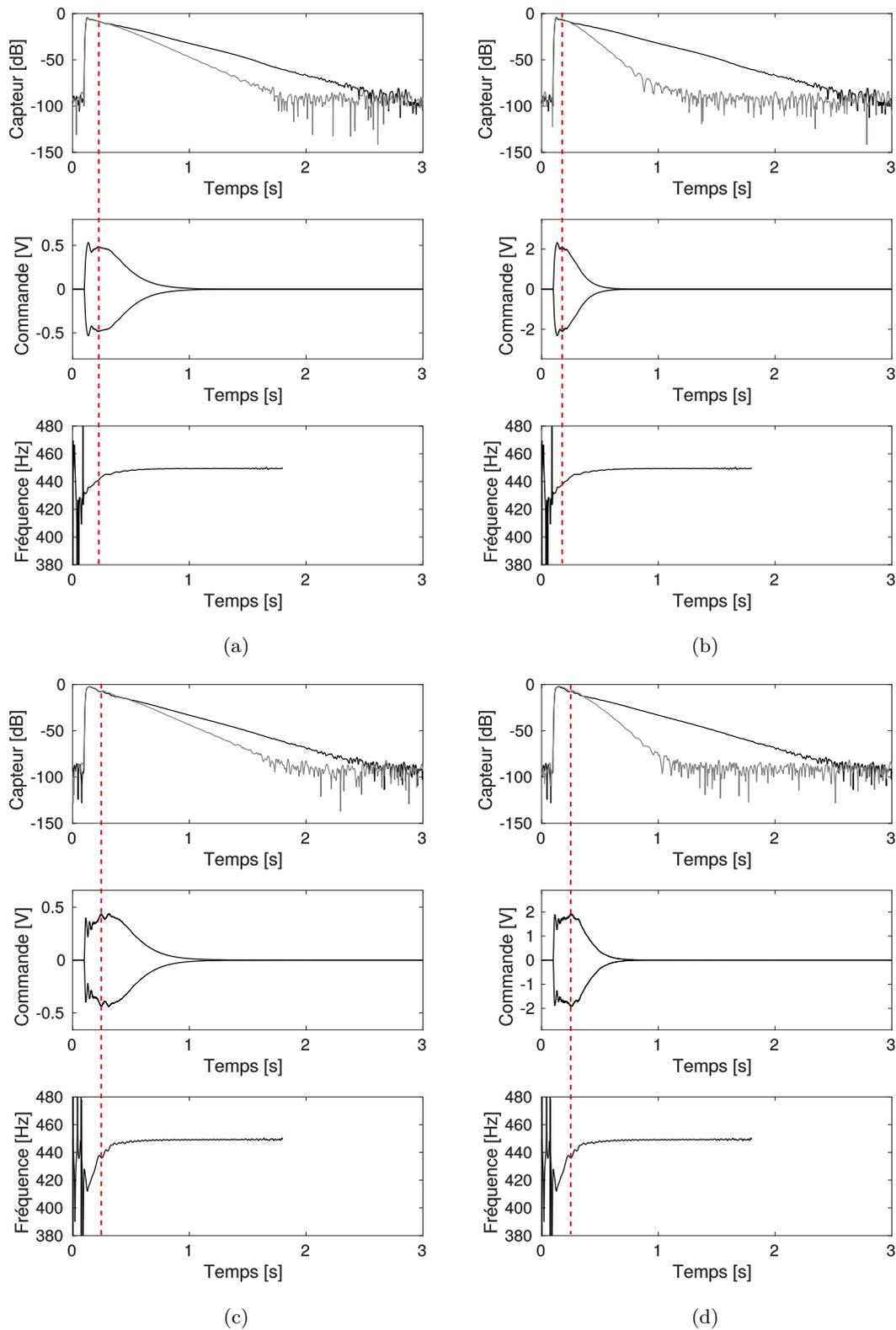


FIGURE 3.20 – Signaux temporels filtrés du capteur, commande envoyée par l'actionneur, et fréquence instantanée du mode fondamental pour différents angle d'impact et configurations de contrôle. La configuration sans contrôle ( $K = 0$ ) et contrôlée ( $K \neq 0$ ) sont indiquées respectivement en noir et en gris. Une ligne verticale en tirets rouges indique le moment où la commande est maximale et où le contrôle se déclenche véritablement. (a) Angle de frappe :  $46^\circ$ , configuration de contrôle :  $+50\%$ . (b) Angle de frappe :  $46^\circ$ , configuration de contrôle :  $+150\%$ . (c) Angle de frappe :  $63^\circ$ , configuration de contrôle :  $+50\%$ . (d) Angle de frappe :  $63^\circ$ , configuration de contrôle :  $+150\%$ .

Les deux signaux sont filtrés autour du mode fondamental par le filtre passe-bande utilisé précédemment. Ils sont ensuite synchronisés avec la commande  $u$  de la configuration +200%, ce qui permet de rechercher un éventuel lien de cause à effet entre celle-ci et la séparation des signaux. Les résultats de cette analyse sont représentés pour deux configurations de contrôle (+50% et +150%) et deux angles de frappe ( $46^\circ$  et  $63^\circ$ ). Pour chacun des quatre exemples, l'instant de séparation des courbes avec et sans contrôle (ligne rouge de la Figure 3.20) coïncide avec le deuxième maximum de la commande - le premier maximum, correspondant à l'impact de la mailloche, ne semble avoir aucune influence sur le système. Avant ce déclenchement véritable du contrôle, la commande est non nulle, c'est-à-dire que l'état associé au mode fondamental  $[\hat{q} \quad \dot{\hat{q}}]$  estimé par l'observateur est lui-même non nul. En revanche, l'effet du contrôle lui, est nul (cf Figure 3.18). Ceci s'explique de la manière suivante : la précision limitée de l'observateur dans la bande de fréquence du glissement fréquentiel (environ 40 Hz ici) mène à une valeur non nulle de l'état  $[\hat{q} \quad \dot{\hat{q}}]$  associé au mode fondamental à 449 Hz, donc à une estimation erronée de  $\hat{x}$ . Ceci se répercute dans la commande  $u = -\mathbf{K}\hat{x}$  qui envoie de l'énergie sur le mode fondamental associé à la fréquence 449 Hz. L'estimation  $\hat{x}$  étant fautive, la commande n'a pas d'effet sur le système.

Concernant le point (ii), un critère d'efficacité du contrôle est formulé en mesurant la fréquence instantanée du mode fondamental à l'instant où la commande est maximale<sup>7</sup>, c'est-à-dire à l'instant où l'efficacité du contrôleur peut être considérée comme non nulle (ligne rouge Figure 3.20). L'analyse est effectuée pour les 11 configurations de contrôle et les quatre angles de frappe (Figure 3.21).

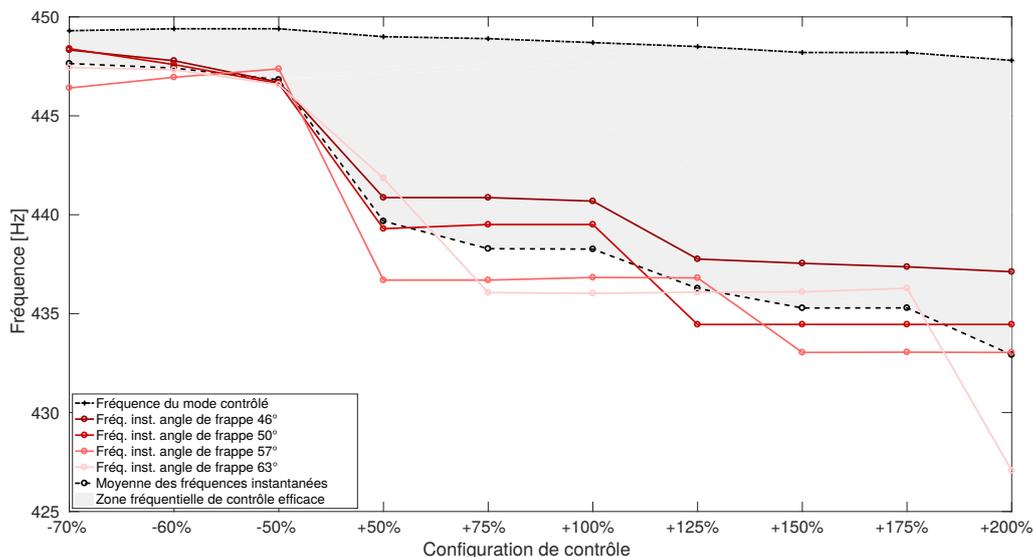


FIGURE 3.21 – Fréquence instantanée du signal au capteur au moment où le contrôle est effectif (voir ligne rouge sur la Figure 3.20), pour différents angles d'impacts (en rouge). La fréquence du mode contrôlé est représentée en pointillés noirs en haut de la figure.

Quel que soit l'angle de frappe, la fréquence instantanée du mode au moment du déclenchement du contrôle diminue lorsque la configuration de contrôle augmente. Ceci corrobore le fait que le déclenchement du contrôleur dépend de la cible de contrôle en amortissement. Le fait que, pour une configuration de contrôle donnée, la fréquence à partir de laquelle le contrôleur

7. En réalité, il s'agit du deuxième maximum de la commande.

devient efficace ne dépende pas de l'angle de frappe indique que la tendance observée Figure 3.21 est reproductible. Une "zone fréquentielle d'efficacité" du contrôleur modal est alors définie, délimitée d'un part par la fréquence du mode contrôlé, et la moyenne des courbes de fréquences obtenues pour tous les angles de frappe. Cette zone, représentée en gris sur la Figure 3.21, est une zone moyenne indiquant pour chaque configuration de contrôle, l'intervalle de fréquence autour du mode contrôlé dans lequel le contrôleur est efficace.

### 3.4 Discussion des résultats

Les résultats de ce chapitre mettent en évidence expérimentalement les performances et limites du contrôle actif modal appliqué au gong, mais plus largement, aux structures présentant des non-linéarités géométriques. Deux résultats principaux se dégagent et sont discutés ci-après.

Premièrement, le contrôle modal permet de contrôler les phénomènes non linéaires de distorsion et résonances internes qui sont liés au mode contrôlé. Il semble intuitif que des composantes fréquentielles échangeant de l'énergie avec un mode contrôlé soient également modifiées par le contrôle de ce mode. En ce sens, les résultats confirment l'intuition ; quelques remarques méritent cependant d'être formulées.

D'une part, les répercussions du contrôle actif modal sur les résonances internes souligne que celui-ci permet de mettre en évidence, en régime libre, les résonances internes de systèmes non linéaires ; ceci était précédemment réalisé en régime forcé [Yasuda et al. 1988; Thomas et al. 2007; Monteil et al. 2014].

D'autre part, le contrôle du phénomène de résonances internes possède un intérêt du point de vue physique, mais aussi musical. Les instruments de la famille des gongs subissent lors de la fabrication des usinages et des martelages faisant appel à des outils très variés (Chapitre 2). Dans le cas des gongs, le martelage de la structure induit probablement des précontraintes permettant d'accorder les fréquences propres de la structure entre elles, et de favoriser ainsi des résonances internes. Ceci est particulièrement recherché dans les *steelpan*, dont les trois premières fréquences propres sont minutieusement accordées dans le but de garantir des rapports harmoniques entre elles [Monteil 2013]. Ces échanges d'énergie entre modes sont à la base de la dynamique sonore de l'instrument. Ainsi, les techniques modales présentées dans ce chapitre peuvent présenter un intérêt musical pour ce type de percussions.

Deuxièmement, le contrôle modal présente des limites lorsque la fréquence d'oscillation dépend de l'amplitude et cette méthode ne permet pas de contrôler les phénomènes de glissement fréquentiel. Le décalage fréquentiel entre la fréquence d'oscillation du mode fondamental - variant jusqu'à plusieurs dizaines de Hz en une seconde - et la fréquence modélisée dans l'observateur (449 Hz) entraîne une estimation incorrecte par l'observateur du vecteur d'état  $\hat{x}$ , dont les composantes liées au mode fondamental sont estimées comme non nulles. La commande envoie de l'énergie sur le mode à 449 Hz, ce qui est sans effet sur le système en dehors d'une certaine bande de fréquence d'oscillation qui a été quantifiée en fonction de la cible de contrôle. Cette bande de fréquence délimite ainsi une zone fréquentielle d'efficacité pour le contrôleur.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une implémentation expérimentale complète d'un contrôle modal appliqué au gong *xiaoluo* a été effectuée. Dans un premier temps, des rappels théoriques ont amené les éléments principaux de formalisme requis pour la compréhension de l'étude, et ont justifié les différents choix opérés pour l'identification du gong (représenté comme un système linéaire) et la construction du contrôleur et de l'observateur. Dans un second temps, la mise en place du système

de contrôle expérimental a été présentée, ainsi que le protocole pour le contrôle en amortissement d'un unique mode de vibration correspondant au mode fondamental de l'instrument.

Les résultats indiquent que le contrôle modal est un outil performant pour contrôler les phénomènes non linéaires de distorsion harmonique et de résonances internes, mais se révèle inefficace pour les phénomènes de glissement fréquentiel. Ce dernier point est lié à l'incapacité du modèle linéaire de l'observateur à estimer l'état du mode fondamental lorsque la fréquence libre de celui-ci diffère de la fréquence modélisée dans l'observateur et ce, en dehors d'une gamme fréquentielle qui a été quantifiée en fonction de la cible de contrôle.

Le travail présenté dans ce chapitre apporte une démonstration rigoureuse et efficace de la limite linéaire du contrôle actif modal pour contrôler des phénomènes issus de non-linéarités géométriques. Cette limite est liée à l'approximation linéaire du modèle du gong *xiaoluo* utilisée dans l'observateur. Face à l'objectif de contrôle du glissement fréquentiel du mode fondamental, il apparaît nécessaire de développer un modèle *non linéaire* pour l'observateur, permettant de *caractériser* la dynamique du mode fondamental de l'instrument. Cette modélisation est présentée dans les chapitres suivants.





## Chapitre 4

# Identification du mode non linéaire fondamental

---

4.1	Modes non linéaires (MNL)	88
4.1.1	Concept et définitions historiques	89
4.1.2	Méthodes analytiques pour le calcul des MNL	90
4.1.2.1	Mise sous forme normale	91
4.1.2.2	Réduction au mode non linéaire fondamental	92
4.1.2.3	Remarques importantes	93
4.1.3	Méthodes numériques pour le calcul des MNL	93
4.1.4	Méthodes d'identification des MNL	94
4.2	Identification expérimentale du MNL fondamental	96
4.2.1	Caractérisation théorique du MNL fondamental	96
4.2.1.1	Équation dynamique	96
4.2.1.2	Relation amplitude-fréquence ( <i>backbone curve</i> )	96
4.2.1.3	Caractérisation par un oscillateur de Duffing équivalent	97
4.2.2	Principe de la boucle à verrouillage de phase (BVP)	98
4.2.2.1	Fonctionnement général	98
4.2.2.2	Résonance de phase	100
4.2.3	Mise en oeuvre de la BVP	101
4.2.4	Deux applications de la BVP	105
4.2.4.1	Mesure de <i>backbone curve</i> ( $\Phi_{ref}$ constante, $F$ variable)	105
4.2.4.2	Mesure de courbes de résonances ( $\Phi_{ref}$ variable, $F$ constante)	105
4.2.5	Évaluation de la BVP par une méthode de mesure alternative	106
4.2.6	Résultats	108
4.2.6.1	Identification du coefficient $\Gamma_0$	109
4.2.6.2	Évaluation de la BVP	110
4.2.7	Discussion	112
4.2.7.1	Identification de $\Gamma_0$	112
4.2.7.2	Influence de la position de l'aimant	112
4.2.7.3	Effets thermiques	112
4.2.7.4	Ordre de grandeur du déplacement	114
4.3	Conclusion	116

---

## Préambule

L'objectif de ce chapitre est d'initier le développement d'un modèle d'ordre réduit du gong *xiaoluo*. Il s'inscrit dans la continuité du Chapitre 3, qui a souligné les limites du modèle linéaire de l'observateur pour le contrôle du glissement fréquentiel de l'instrument. Le point de départ du travail développé dans ce chapitre est le modèle de vibration de plaques avec non-linéarités géométriques de Von Kármán, étendu au cas des coques, qui a été résumé au Chapitre 2. Cette modélisation a donné lieu à un système non linéaire (2.11) régissant les coordonnées modales de la structure. En particulier, la présence de couplages quadratiques et cubiques dans les équations a été mise en évidence. Ces couplages non linéaires entraînent la perte de la *propriété d'invariance* de la base modale, et des transferts d'énergie entre modes propres. Ceci, comme on va le voir dans ce qui suit, rend difficile la définition de modèles d'ordre réduit pour ce type de systèmes.

Le formalisme des *modes non linéaires* (MNL) permet d'étendre la propriété d'invariance des modes propres au cas non linéaire. La méthode repose sur le calcul de variétés invariantes dans l'espace des phases permettant, en projetant la dynamique du système sur celles-ci, l'établissement de modèles réduits. Le formalisme des MNL est utilisé dans notre étude, et il est présenté dans la première partie de ce chapitre (section 4.1). Les méthodes de calcul et les méthodes d'identification expérimentales qui lui sont associées sont également exposées. Ces rappels mèneront aux choix méthodologiques de cette étude.

La deuxième partie de ce chapitre (section 4.2) s'intéresse à l'identification du *mode non linéaire associé au mode fondamental* du gong *xiaoluo*. Certains phénomènes caractéristiques des non-linéarités géométriques nécessitent des modèles à plusieurs degrés de liberté (résonances internes, chaos...); au contraire, le phénomène de dépendance entre la fréquence et l'amplitude de vibration est un phénomène qui peut être décrit par un système à un seul degré de liberté, typiquement un oscillateur de Duffing [Nayfeh and Mook 1995]. L'approche uni-modale pour décrire le glissement fréquentiel du mode fondamental de l'instrument fait donc sens pour une première étape. L'implication des autres modes dans le glissement fréquentiel de l'instrument, notamment via les résonances internes évoquées au Chapitre 2, sera traitée au Chapitre 5.

L'identification du mode non linéaire fondamental de l'instrument est réalisée par sa *backbone curve*, mesurée à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase. La deuxième partie du chapitre expose la caractérisation du mode non linéaire fondamental, ainsi que la description du protocole expérimental de cette boucle à verrouillage de phase. Les résultats de l'identification du mode non linéaire fondamental sont ensuite exposés et évalués au regard d'une autre méthode de mesure de *backbone curve* utilisant la mesure de courbes de résonances non linéaires.

Tous les résultats expérimentaux figurant dans ce chapitre sont issus d'une collaboration avec le Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes aux Arts et Métiers de Lille. En particulier, le système d'excitation sans contact bobine-aimant a été développé dans le cadre de la thèse d'Olivier Thomas [2001]. La boucle à verrouillage de phase utilisée pour la mesure de *backbone curve* a été développée dans le cadre du post-doc de Vivien Denis [2017], conjointement aux expériences menées et présentées dans ce chapitre. Le développement de ce système fait l'objet d'un article soumis, qui est reproduit en intégralité en Annexe D.

### 4.1 Modes non linéaires (MNL)

Cette section présente le formalisme des MNL et un bref état de l'art des méthodes de calcul et d'identification qui lui sont associées. Premièrement, le concept et les définitions historiques

des MNL sont exposées (section 4.1.1). Dans un second temps, une synthèse des méthodes analytiques et numériques utilisées pour les calculer est présentée (section 4.1.2 et 4.1.3). Notamment, la méthode analytique de calcul par la mise sous forme normale et les méthodes de continuation numériques utilisées en section 4.2 sont exposées. Enfin, la section 4.1.4 décrit les méthodes d'identification associées aux MNL. Cette dernière section introduit la deuxième partie de chapitre (section 4.2) qui traite de l'identification expérimentale du mode fondamental par une boucle à verrouillage de phase.

#### 4.1.1 Concept et définitions historiques

Le système d'équations (2.11) établi au Chapitre 2, issu de la projection de la dynamique du problème sur la base modale, montre que les modes propres permettent de diagonaliser la partie linéaire du problème. En revanche, une partie non linéaire, caractérisée par des couplages quadratiques et cubiques entre les différents oscillateurs, est également présente dans les équations. L'une des conséquences notables de ces couplages est qu'ils brisent la propriété d'invariance de la base modale, qui rend possible l'excitation découplée des modes propres au stade linéaire ; en effet, au stade linéaire un mouvement initié sur le mode  $p$  garantira pour tout  $t > 0$  :

$$\forall j \neq p, q_j(t) = 0$$

Autrement dit, pour tout mouvement initié sur le mode propre  $p$  à  $t = t_0$ , le mouvement reste confiné sur mode  $p \forall t > t_0$ . Cette caractéristique est la définition de la propriété d'invariance. Dans le cas non linéaire, l'invariance des modes propres n'est plus garantie : si l'on force le système sur un mode propre linéaire, de l'énergie peut être transférée à un autre mode propre par le jeu des couplages évoqués précédemment. Ces dernières considérations posent le problème de l'identification des systèmes tels que décrits dans (2.11). Plus précisément, deux difficultés apparaissent :

- Une difficulté liée à la troncature du système (2.11) à un nombre de modes fini  $N_0$  : à partir de la somme infinie de termes dans l'équation (2.11), combien de modes garder dans la modélisation ? Autrement dit : quels modes sont importants dans la dynamique ?
- Une difficulté liée enfin au nombre de coefficients à identifier : si le système (2.11) est réduit à deux modes propres ( $p = \llbracket 1, 2 \rrbracket$ ), il est nécessaire d'identifier neuf coefficients. Ce nombre augmente drastiquement au fur et à mesure que des degrés de liberté sont ajoutés au modèle.

Concernant la première difficulté, une troncature tentante et déjà éprouvée dans le cas unimodal [Grossman et al. 1969; Hui 1983; Yasuda and Kushida 1984] consiste à tronquer la dynamique (2.11) à un seul mode *linéaire*  $p$ , ce qui revient à imposer dans l'équation (2.11)  $\forall i \in \mathbb{N}, i \neq p, q_i = 0$ . Ce type de troncature se révèle inopérante pour décrire la tendance de non-linéarité d'un seul mode, c'est-à-dire la dépendance de la fréquence de ses oscillations vis-à-vis de l'amplitude [Nayfeh et al. 1992; Touzé et al. 2004a]. Cette difficulté peut être contournée en prenant en compte plus de modes propres dans la modélisation [Amabili et al. 1998; Pellicano et al. 2002], mais ce choix peut augmenter considérablement le nombre de degrés de liberté du modèle. Touzé et al. [2004b] ont apporté une contribution intéressante en montrant que c'est la perte d'invariance des modes propres linéaires qui est responsable de la mauvaise prévision de la tendance de non-linéarité. Redéfinir la propriété d'invariance dans le cadre non linéaire apparaît dès lors intéressant pour tenter d'appréhender la dynamique de ces systèmes.

Le formalisme des modes non linéaires étend la propriété d'invariance du cas linéaire au cas non linéaire, et autorise ainsi à tronquer correctement le système (2.11) à un nombre fini de

modes  $N_0$ . Touzé *et al.* [2004a] montrent ainsi que l'emploi d'un *unique* mode non linéaire, au lieu de plusieurs modes linéaires, permet de retrouver la bonne tendance de non-linéarité du mode concerné. Les premiers travaux sur les modes normaux appliqués aux systèmes non linéaires remontent à Lyapunov [Lyapunov 1907]. Celui-ci démontre, pour un système dynamique non linéaire conservatif à  $N$  degrés de liberté ne présentant pas de relations de résonances internes, l'existence d'une famille de  $N$  orbites périodiques au voisinage de ses points d'équilibre stables. A partir de ce résultat, Rosenberg [Rosenberg 1962, 1966] propose dans les années 60 une première définition du MNL comme "*une vibration à l'unisson d'un système autonome*". Pour une structure donnée, il définit plus précisément un MNL comme le mouvement tel que tous les points de la structure passent par leur position d'équilibre nulle ou maximale en même temps. Quelques dizaines d'années plus tard, dans les années 1990, Shaw et Pierre [Shaw and Pierre 1991, 1993] s'appuient sur le théorème de la variété centrale [Carr 1981; Guckenheimer and Holmes 1986] pour définir un MNL comme une *variété invariante de l'espace des phases*<sup>1</sup>. Cette variété est tangente à l'origine aux sous-espaces propres. Ils définissent ainsi un mode non linéaire comme "un mouvement qui évolue sur une variété invariante en deux dimensions de l'espace des phases" [Shaw and Pierre 1993]. La définition de Shaw et Pierre permet de traiter le cas de systèmes non conservatifs (contrairement à la définition de Rosenberg), mais les deux définitions sont équivalentes pour les systèmes conservatifs. Dans le cas de résonances internes, la définition de Rosenberg peut être étendue en définissant le mode non linéaire comme un *mouvement périodique du système, non nécessairement synchronisé* [Kerschen et al. 2009].

Le calcul des modes non linéaires peut être réalisé avec différentes techniques, analytiques et/ou numériques. Une synthèse récente et critique sur le sujet peut être trouvée dans [Kerschen et al. 2009; Renson et al. 2016] ; on se contentera ici d'exposer les méthodes principales justifiant les choix méthodologiques effectués.

#### 4.1.2 Méthodes analytiques pour le calcul des MNL

Parmi les méthodes analytiques de calcul de MNL, beaucoup sont issues des techniques de perturbation et reposent sur des développements asymptotiques. Parmi elles, on peut citer la méthode des échelles multiples, la méthode de Lindstedt-Poincaré, ou encore la méthode de la moyenne [Nayfeh 1973]. Bien que ces méthodes se cantonnent généralement aux systèmes avec peu de degrés de liberté, elles sont encore largement utilisées [Nayfeh and Nayfeh 1994; Gendelman 2004; Li et al. 2006].

Une autre approche, reposant sur la notion de variété invariante, est utilisée dans les travaux de Shaw et Pierre [1991; 1992; 1993; 1994]. Les auteurs choisissent une paire de variables d'état (déplacement, vitesse) comme coordonnées maîtresses, en fonction desquelles toutes les autres variables sont paramétrées. Le paramétrage est ensuite reporté dans les équations du mouvement, ce qui permet d'obtenir un système ne dépendant plus explicitement du temps, et dont la résolution donne les équations des variétés invariantes.

Enfin, la méthode analytique de l'équilibrage harmonique [Nayfeh and Mook 1995]<sup>2</sup> utilise la définition de Rosenberg et développe la solution du problème en régime forcé sous la forme d'une série de Fourier d'ordre fini. Les modes non linéaires sont ensuite calculés en remplaçant cette série dans les équations de la dynamique et en égalisant les différents termes trigonométriques [Lewandowski 1987; Haterbouch and Benamar 2005]. Cette méthode est souvent comptée parmi les méthodes analytiques-numériques, car elle est utilisée en parallèle de méthodes de continua-

1. Pour un système à  $N$  degrés de liberté, l'espace des phases correspond à l'espace des déplacements et vitesses, de dimension  $2N$

2. *Harmonic Balance Method* (HBM) en anglais.

tion (voir section 4.1.3).

#### 4.1.2.1 Mise sous forme normale

Les méthodes analytiques évoquées ci-dessus pour le calcul des MNL sont restreintes en général à des systèmes possédant un nombre réduit de degrés de liberté. Une dernière méthode, utilisée dans cette étude, opère un lien entre les MNL et la théorie des formes normales [Guckenheimer and Holmes 1986; Wiggins 2003]. Cette approche, établie par Jézéquel et Lamarque [1991] et Nayfeh [1995] et formalisée complètement par Touzé *et al.* [2004a; 2004b], autorise le calcul analytique *direct* de la géométrie des variétés invariantes associées aux MNL d'un système possédant un nombre *quelconque* de degrés de liberté. En particulier, la dynamique du système sur les variétés invariantes est directement donnée par la forme normale du problème.

Conceptuellement, la mise sous forme normale d'un système a pour but de simplifier la dynamique du système (2.11) en distinguant les termes non linéaires qui sont importants pour la dynamique (appelés termes *résonnants*) de ceux qui ne le sont pas (termes *non-résonnants*). Plus précisément, les termes résonnants pour le  $p$ -ième oscillateur non linéaire du système (2.11) peuvent être interprétés comme des termes non linéaires qui forcent cet oscillateur proche de sa fréquence de résonance. *A contrario*, les termes non-résonnants pour cet oscillateur correspondent aux termes non linéaires dont les composantes fréquentielles se situent loin de la fréquence de résonance de l'oscillateur. Ces termes, en plus d'être peu importants pour la description de la dynamique, sont à l'origine de la perte de la propriété d'invariance de la base modale dans le régime non linéaire. L'objectif de la mise sous forme normale consiste à éliminer le plus de termes non-résonnants dans (2.11) afin de simplifier au maximum la dynamique<sup>3</sup>. Mathématiquement, la méthode repose sur le théorème de Poincaré [1899], qui stipule que pour un système dynamique ne présentant pas de résonances internes, il est possible de trouver un changement de variable non linéaire tangent à l'identité permettant de réduire la dynamique du système à sa partie linéaire. Dulac [1912] étend ce résultat et montre que dans le cas de résonances internes, un changement de variable non linéaire est toujours possible pour simplifier au maximum la dynamique du système ; cependant, les termes résonnants ne peuvent pas être éliminés et restent donc présents dans les équations après le changement de variable ; ces dernières équations constituent la *forme normale du système*.

Les calculs complets pour la mise sous forme normale sont détaillés dans [Touzé 2003; Touzé et al. 2004a] et sont résumés ci-après. Bien qu'un unique mode non linéaire soit considéré dans ce chapitre, les équations générales sont nécessaires à la compréhension du formalisme ainsi que du modèle développé au Chapitre 5, dans lequel les résonances internes seront considérées. On supposera dans ce qui suit qu'il n'y a pas de résonances internes, et on s'intéresse à l'équation (2.11), tronquée à  $N_0$  modes<sup>4</sup>, soit pour tout  $p \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$  :

$$\ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p = \epsilon_q \left( - \sum_{i,j=1}^{N_0} \beta_{ij}^p q_i q_j \right) + \epsilon_c \left( - \sum_{i,j,k=1}^{N_0} \Gamma_{ijk}^p q_i q_j q_k \right) \quad (4.1)$$

Le changement de variable pour la mise sous forme normale est choisi tangent à l'identité<sup>5</sup> et est tronqué à l'ordre 3 afin d'éviter des développements analytiques trop importants. Il s'écrit pour tout  $p \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$  :

3. Pour comprendre le concept de termes résonnants et non-résonnants, un exemple simple à deux degrés de liberté peut être trouvé dans [Thomas 2011, p.71].

4. En pratique, on peut trouver  $N_0$  en déterminant la banque fréquentielle d'intérêt, comme dans le cas linéaire. Il est aussi possible de simuler la réponse du système en faisant croître le nombre de modes  $N$  en s'arrêtant à la valeur  $N = N_0$  à partir de laquelle la réponse du système converge.

5. Ceci permet de retrouver, pour les petites amplitudes, la variété correspondant aux modes propres du système.

$$\begin{aligned}
q_p &= R_p + \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j \geq i}^{N_0} a_{ij}^p R_i R_j + b_{ij}^p S_i S_j + \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j \geq i}^{N_0} \sum_{k \geq j}^{N_0} r_{ijk}^p R_i R_j R_k + s_{ijk}^p S_i S_j S_k + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k \geq j}^{N_0} u_{ijk}^p R_i S_j S_k \\
\dot{q}_p &= S_p + \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j \geq i}^{N_0} \gamma_{ij}^p R_i S_j + \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j \geq i}^{N_0} \sum_{k \geq j}^{N_0} \mu_{ijk}^p S_i S_j S_k + \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k \geq j}^{N_0} \nu_{ijk}^p S_i R_j R_k
\end{aligned}$$

où les nouvelles coordonnées  $(R_p, S_p = \dot{R}_p)_{p \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket}$  sont appelées *coordonnées normales* du système. Une fois ce changement de variable introduit dans le système (2.11), les coefficients  $(a_{ij}^p, b_{ij}^p, u_{ijk}^p, \gamma_{ij}^p, \mu_{ijk}^p, \nu_{ijk}^p)$  sont définis de manière à annuler le plus de termes non-résonnants possible. La forme normale finale du système s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{R}_p &= S_p \\
\dot{S}_p &= -\omega_p R_p + (A_{ppp}^p + \epsilon_c \Gamma_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p S_p^2 \\
&\quad + R_p \left[ \sum_{j > p}^{N_0} [(A_{jpp}^p + A_{ppj}^p + \Gamma_{ppj}^p) R_j^2 + B_{ppj}^p S_j^2] + \sum_{i < p}^{N_0} [(A_{ipi}^p + A_{pii}^p + \Gamma_{pii}^p) R_i^2 + B_{pii}^p S_i^2] \right] \\
&\quad + \dot{R}_p \left[ \sum_{j > p}^{N_0} B_{jpp}^p R_j S_j + \sum_{i < p}^{N_0} B_{iip}^p R_i S_i \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

avec :

$$A_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^{N_0} g_{il}^p a_{jk}^l + \sum_{l \leq i}^{N_0} g_{li}^p a_{jk}^l, \quad B_{ijk}^p = \sum_{l \geq i}^{N_0} g_{il}^p b_{jk}^l + \sum_{l \leq i}^{N_0} g_{li}^p b_{jk}^l$$

Le système de la forme normale (4.2) paraît complexe au premier abord ; il est néanmoins plus simple que le système (4.1) exprimé avec les coordonnées physiques  $(q_i, \dot{q}_i)_{1 \leq i \leq N_0}$ . En effet, la propriété d'invariance est retrouvée : dans le cas de l'oscillateur non linéaire  $p$  gouverné par les variables  $R_p$  et  $S_p$  dans (4.2), tous les termes polynomiaux contenant les couples  $(R_j, S_j)$ ,  $j \neq p$  sont en facteurs de  $R_p$  et  $S_p$ .

#### 4.1.2.2 Réduction au mode non linéaire fondamental

La propriété d'invariance retrouvée, il est possible de tronquer la dynamique (4.2) afin d'obtenir l'équation d'un unique mode non linéaire, associé au mode fondamental du gong *xiaoluo*. En pratique, cela revient à faire comme dans le cas linéaire : il suffit d'imposer des conditions initiales non-nulles à *un* oscillateur  $p$ , et des conditions initiales nulles aux autres oscillateurs :

$$\begin{aligned}
(R_p, S_p) &\neq (0, 0) \\
(R_k, S_k) &= (0, 0) \text{ si } k \neq p
\end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient (cf. (4.2)) :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + (A_{ppp}^p + h_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p S_p^2 = 0 \tag{4.3}$$

ce qui correspond à une collection d'oscillateurs non linéaires *découplés* et *invariants*. Les termes  $A_{ppp}^p$  et  $B_{ppp}^p$  prennent en compte les influences de tous les autres oscillateurs  $k$  ( $k \neq p$ ) dans la dynamique de l'oscillateur  $p$ .

### 4.1.2.3 Remarques importantes

A ce stade, quelques remarques importantes méritent d'être mentionnées pour l'étude expérimentale qui va suivre en section 4.2 :

- Les développements précédents ne concernent que le cas conservatif. La prise en compte de l'amortissement dans la mise sous forme normale est traitée dans [Touzé and Amabili 2006]. Les auteurs montrent que la prise en compte d'un amortissement modal visqueux directement dans la formulation dans l'espace physique - c'est-à-dire, en rajoutant pour chaque oscillateur  $p$  le terme  $2\xi_p\omega_p\dot{q}_p$  dans (2.11) - engendre dans l'équation du mode non linéaire (4.3) l'apparition de deux termes d'amortissement : un terme linéaire  $2\xi_p\omega_p\dot{R}_p$  et un terme non linéaire  $C_{ppp}^p R_p^2 \dot{R}_p$  (l'expression de  $C_{ppp}^p$  est donnée dans [Touzé and Amabili 2006]). On obtient ainsi, pour tout  $p \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$  :

$$\ddot{R}_p + 2\xi_p\omega_p\dot{R}_p + \omega_p^2 R_p + (A_{ppp}^p + h_{ppp}^p)R_p^3 + B_{ppp}^p R_p S_p^2 + C_{ppp}^p R_p^2 \dot{R}_p = 0 \quad (4.4)$$

En particulier, le terme  $C_{ppp}^p$  prend en compte l'influence des amortissements modaux de tous les autres oscillateurs  $k$  ( $k \neq p$ ). Les auteurs montrent également que de fortes valeurs d'amortissement peuvent changer la tendance de non-linéarité du MNL. Dans le cas du gong, la structure est peu amortie (Chapitre 2, Table 3.3). On supposera par la suite que  $C_{ppp}^p = 0$  et l'amortissement sera modélisé par un unique terme linéaire  $2\xi_p\omega_p\dot{R}_p$ .

- Les calculs précédents sont développés pour le cas où il n'y pas de résonances internes. Si une résonance interne est présente, d'après le théorème de Poincaré-Dulac [1912], les termes non linéaires quadratiques et/ou cubiques correspondant à ces résonances internes apparaissent comme des termes supplémentaires dans la forme (4.3). L'ajout de résonances internes à la modélisation du mode fondamental sera considéré dans le Chapitre 5.

### 4.1.3 Méthodes numériques pour le calcul des MNL

Le calcul des modes non linéaires par la forme normale repose sur des développements asymptotiques, ce qui limite son champ d'application à des amplitudes restreintes, au voisinage de points d'équilibre du système. Dans cette étude, le recours à des méthodes numériques a ainsi été rendu nécessaire afin de rendre compte d'effets d'ordre élevés dans la caractérisation du mode non linéaire fondamental par un oscillateur de Duffing (voir section 4.2.1).

Les méthodes numériques de calcul des MNL les plus répandues utilisent la définition de Rosenberg. Les méthodes de tir<sup>6</sup> [Slater 1996] permettent de trouver de manière itérative les conditions initiales de la variété invariante et sa période afin de garantir une condition de périodicité et de phase. On trouve également des méthodes de discrétisation qui, au lieu d'effectuer une intégration temporelle des équations comme pour les méthodes de tir, cherchent une solution périodique en utilisant une base de fonctions tests. On trouve parmi ces méthodes la méthode de collocation orthogonale [Dhooge et al. 2003; Doedel et al. 2000] qui utilise des polynômes de Lagrange, ou la méthode de l'équilibrage harmonique qui utilise une base de fonctions polynomiales [Cameron and Griffin 1989; Cochelin and Vergez 2009] permettant de calculer la période d'un régime périodique.

Le développement de méthodes de continuation a récemment permis d'ajouter à ces méthodes de discrétisation un paramètre de contrôle permettant de suivre l'évolution de la solution en fonction d'un paramètre de contrôle (typiquement l'amplitude de forçage). Plusieurs logiciels ont ainsi vu le jour ; ils utilisent la combinaison de méthodes de continuation, type prédicteur-correcteur, et de méthodes de collocation [Dhooge et al. 2003], de tir [Peeters et al. 2009] ou encore d'équilibrage harmonique. Récemment, une alternative aux méthodes prédicteur-correcteur

---

6. "shooting methods" en anglais

s'est développée avec la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [Cochelin et al. 2007], qui a donné naissance à MANLAB [Arquier 2007], un logiciel interactif de continuation programmé dans MATLAB. L'association de la MAN et de l'équilibrage harmonique a été développé relativement récemment dans MANLAB [Cochelin and Vergez 2009; Karkar et al. 2013]. Avec cette dernière implémentation, il est possible de calculer des réponses dynamiques "de référence" de systèmes non linéaires, en utilisant un grand nombre d'harmoniques (typiquement plusieurs dizaines). C'est le logiciel MANLAB que nous utiliserons par la suite dans la section 4.2.1.

#### 4.1.4 Méthodes d'identification des MNL

Dans le but d'introduire l'identification du mode non linéaire fondamental du gong, dont l'équation (4.3) a été précédemment déterminée, on expose dans cette dernière sous-partie les méthodes d'identification reliées au formalisme des MNL.

L'identification des modes non linéaires est un domaine de recherche récent et en pleine évolution. Les premières études d'identification expérimentale de systèmes non linéaires réalisées dans les années 2000 s'intéressent à l'identification de modes de vibration dont le comportement non linéaire ne peut plus être négligé dans la réponse de certaines structures. Parmi ces méthodes, la *Force Appropriation of NonLinear systems* (FANS) [Atkins et al. 2000], propose une extension de la méthode d'appropriation modale linéaire [Wright et al. 1999] au cas non linéaire. Par ailleurs, la *NonLinear Resonant Decay Method* (NLRDM) [Wright et al. 2001b] s'emploie à exciter un nombre réduit de modes par une excitation *sine burst*<sup>7</sup>. Dans le cas où le mode d'intérêt est couplé non linéairement à d'autres modes, la réponse de ceux-ci apparaît en plus de celle du mode excité dans la réponse libre. Une régression sur l'espace modal est ensuite réalisée par une méthode RFS<sup>8</sup> [Crawley and Aubert 1986; Crawley and O'Donnell 1986]. Cependant, l'appropriation du mode non linéaire est souvent réalisée de manière approximative.

Le formalisme des modes non linéaires a permis de fournir un cadre rigoureux pour le développement de méthodes d'identification expérimentale non linéaires, s'appuyant notamment sur la mesure de *backbone curves*. Une extension non linéaire de la méthode à résonance de phase [Platten et al. 2009], la méthode à résonance de phase non linéaire<sup>9</sup> a ainsi été proposée par Peeters et al. [2011a]. Cette méthode suit une procédure en deux étapes :

- Premièrement, un forçage multi-harmonique en plusieurs points est appliqué à la structure afin d'isoler un unique mode non linéaire. L'appropriation du mode concerné est vérifiée par un critère non linéaire de quadrature de phase [Peeters et al. 2011a] et un indicateur non linéaire [Peeters et al. 2011b]. Les auteurs montrent que la condition linéaire de résonance de phase, c'est-à-dire la condition de quadrature entre excitation mono-harmonique et réponse qui permet de compenser les termes d'amortissement en régime forcé, peut être étendue au cas non linéaire, en utilisant une excitation multi-harmonique et en imposant une quadrature de phase entre chaque harmonique de l'excitation et de la réponse. Une fois cette condition remplie, le système vibre théoriquement sur le mode non linéaire conservatif considéré.
- La deuxième étape consiste ensuite à stopper l'excitation. Le système, vibrant auparavant sur le mode non linéaire *conservatif*, évolue en régime libre sur le même mode non linéaire jusqu'au retour à l'équilibre. C'est la propriété d'invariance des modes non linéaires qui est invoquée ici : pour un mouvement initié sur la variété du mode non linéaire (appropriation de la première étape), la dynamique reste confinée sur cette variété. En réalité, le système

7. Il n'existe pas de traduction française à la connaissance de l'auteur.

8. Cette méthode a été succinctement décrite dans l'introduction générale.

9. *Nonlinear phase resonant testing* en anglais.

en régime libre évolue sur le mode non linéaire *amorti*. Cependant, pour de faibles valeurs d'amortissement, les variétés du mode non linéaire conservatif et non-conservatif peuvent être considérées comme égales [Kerschen et al. 2009].

Les dépendances fréquence-amplitude (*backbone curve*) et fréquence-temps (glissement fréquentiel) peuvent ensuite être déterminées par des méthodes temps-fréquences, telles que les transformées en ondelettes ou la transformée de Hilbert.

Une deuxième famille de méthodes est constituée des méthodes de continuation expérimentale, inspirées des méthodes de continuation numériques introduites au paragraphe précédent. Parmi elles, des méthodes utilisant des boucles à verrouillage de phase<sup>10</sup> permettent de suivre la *backbone curve* de modes non linéaires isolés. Une boucle à verrouillage de phase est utilisée dans notre étude et sa description est détaillée section 4.2. Les premières applications du contrôle de phase sont dues à Sokolov & Babitsky [2001], qui ont exploré en simulation les relations amplitude-fréquence de systèmes non linéaires auto-excités à un ou deux degrés de liberté. Ils utilisent l'injectivité de la relation fréquence-phase d'un oscillateur non linéaire pour stabiliser les zones habituellement instables dans la relation amplitude-fréquence - qui elle, n'est pas injective et dont les "sauts" sont bien connus sur le plan théorique [Nayfeh and Mook 1995]. Le principe est illustré sur la Figure 4.1, tirée de [Mojrzisch and Twiefel 2015]. Sur cette figure,

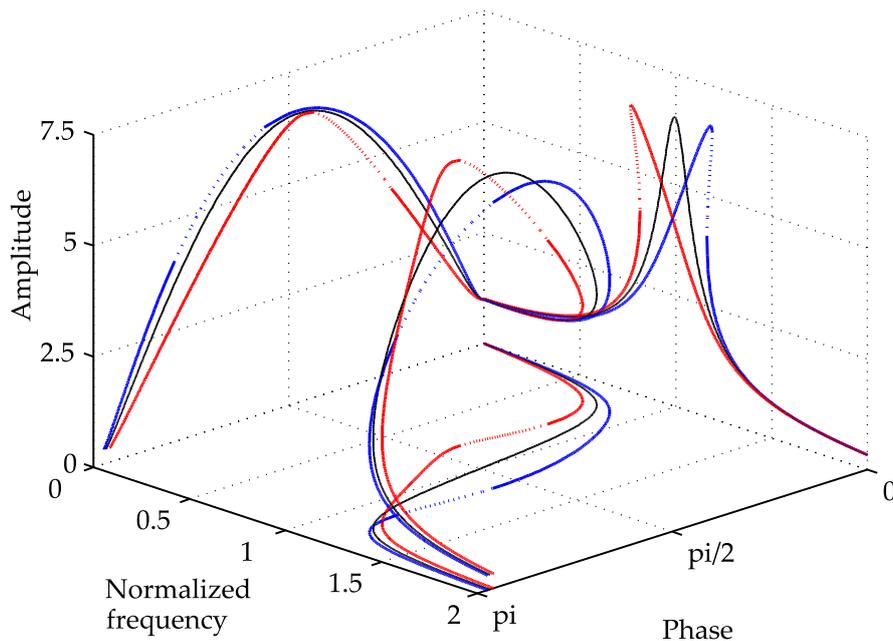


FIGURE 4.1 – Relation amplitude-phase-fréquence pour un oscillateur de Duffing assouplissant (rouge)-, linéaire (noir)-, et raidissant (bleu). Le facteur d'amortissement n'est pas le même pour les trois oscillateurs. Les zones instables sont indiquées en pointillés (d'après [Mojrzisch and Twiefel 2015]).

la stabilité du contrôle de phase peut être simplement appréhendée en considérant la relation amplitude-phase : l'amplitude, multi-valuée dans le cas de la relation amplitude-fréquence, ne l'est plus dans la relation amplitude-phase : pour chaque valeur d'amplitude, il existe une unique valeur de phase. Le travail de Sokolov & Babitsky a été étendu au cas des systèmes forcés par Mojrzisch et Twiefel [2015]. Les auteurs ont alors mesuré des courbes amplitude-fréquences *complètes* en modifiant la phase entre l'excitation et la vibration. Enfin, Peter et al. [Peter et al.

10. *Phase-Locked-Loop* en anglais.

2016] utilisent le même dispositif pour suivre directement la *backbone curve* de systèmes non linéaires en simulation. Une application expérimentale est présentée, mais aucune identification n'est faite à partir des résultats. La première identification expérimentale de *backbone curve* utilisant une boucle à verrouillage de phase a été récemment effectuée dans notre étude sur des gongs d'opéra chinois, mais également sur une plaque circulaire et une poutre encastrée [Denis et al. 2017]. Elle est décrite en Annexe D. L'un des gros avantages de l'identification par boucle à verrouillage de phase est qu'elle autorise la mesure de *backbone curve* en régime forcé, contrairement à la méthode à résonance de phase non linéaire qui effectue la mesure en régime libre ; elle s'affranchit ainsi des méthodes temps-fréquences nécessaires à l'analyse du régime libre.

## 4.2 Identification expérimentale du MNL fondamental

La deuxième partie de ce chapitre s'intéresse à l'identification expérimentale du mode non linéaire associé au mode fondamental de l'instrument. Cette identification est réalisée en mesurant la *backbone curve* du mode non linéaire fondamental, au moyen d'une boucle à verrouillage de phase (BVP). Les étapes successives pour cette identification sont décrites successivement : tout d'abord, le mode non linéaire fondamental (4.5) est caractérisé par un oscillateur de Duffing afin de réduire le nombre de coefficients à identifier (section 4.2.1). Dans un second temps, le principe de la BVP est exposé en section 4.2.2. Le dispositif expérimental qui lui est associé est ensuite présenté en section 4.2.3. Deux applications possible de la BVP (mesure de *backbone curve* et de courbes de résonances non linéaires) sont exposées en section 4.2.4. L'évaluation de la BVP est ensuite réalisée par comparaison avec une autre méthode de mesure de *backbone curve*, exposée en section 4.2.5. Enfin, les résultats de l'identification expérimentale sont présentés et évalués en section 4.2.6, puis discutés en section 4.2.7.

### 4.2.1 Caractérisation théorique du MNL fondamental

#### 4.2.1.1 Équation dynamique

L'identification expérimentale par BVP s'effectuant en régime forcé, on s'intéresse dans cette section au cas non-conservatif et forcé de l'équation (4.3), soit :

$$\ddot{R}(t) + 2\xi\omega_0 R(t) + \omega_0^2 R(t) + \Gamma_1 R^3(t) + \Gamma_2 R(t)R'(t)^2 = Q(t) \quad (4.5)$$

où  $\Gamma_1 = A_{111}^1 + h_{111}^1$ ,  $\Gamma_2 = B_{111}^1$  sont les paramètres à identifier,  $Q(t)$  désigne le forçage,  $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot 450$  et  $\xi = 0.013$  (voir Chapitre 3, Table 3.2). L'identification du mode non linéaire (4.5) revient à identifier les coefficients  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ; cette identification est réalisée en mesurant la *backbone curve* du mode non linéaire fondamental, dont l'expression est calculée à la section suivante.

#### 4.2.1.2 Relation amplitude-fréquence (*backbone curve*)

L'identification du mode non linéaire fondamental (4.5) étant réalisée à partir de la *backbone curve* du système, il est nécessaire de calculer l'expression de celle-ci. Ce calcul s'effectue ici par la méthode des échelles multiples [Nayfeh and Mook 1995], à partir du cas conservatif libre associé (cas des systèmes très peu amortis) :

$$\ddot{R}(t) + \omega_0^2 R(t) + \epsilon\Gamma_1 R^3(t) + \epsilon\Gamma_2 R(t)R'(t)^2 = 0 \quad (4.6)$$

où  $\epsilon \ll 1$  est un petit paramètre de perturbation. La méthode des échelles multiples est appliquée de la même manière qu'au Chapitre 2. Les étapes de calcul étant les mêmes, elles sont omises

ici. La solution de (4.6) au premier ordre s'écrit :

$$R(t) = \epsilon a_1 \cos(\omega_{NL}t + \phi) + O(\epsilon^2) \quad (4.7)$$

où  $\omega_{NL}$  est la pulsation,  $a_1$  l'amplitude de la composante à  $\omega_{NL}$  du mode non linéaire, et  $\phi$  la phase. L'expression de  $\omega_{NL}$  est gouvernée par la *backbone curve* du système (4.6) qui s'écrit au premier ordre [Touzé et al. 2004a] :

$$\omega_{NL} = \omega_0(1 + \epsilon T_{p1} a_1^2) \quad (4.8)$$

avec :

$$T_{p1} = \frac{3\Gamma_1 + \Gamma_2 \omega_0^2}{8\omega_0^2} \quad (4.9)$$

D'après l'équation (4.8), la mesure de la *backbone curve* reliant la pulsation  $\omega_{NL}$  et l'amplitude de la composante  $a_1$  permet d'identifier le coefficient non linéaire  $T_{p1}$  en ajustant les données expérimentales de  $\omega_{NL}$  avec un polynôme d'ordre 2. En revanche, la donnée du coefficient  $T_{p1}$  ne permet pas de remonter aux coefficients  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  dans l'équation (4.9). Pour remédier à cette difficulté, la section suivante propose de caractériser le mode non linéaire fondamental (4.5) au premier ordre par un unique oscillateur de Duffing équivalent.

#### 4.2.1.3 Caractérisation par un oscillateur de Duffing équivalent

Dans ce travail, on se propose de caractériser au premier ordre le MNL (4.5) par l'oscillateur de Duffing suivant :

$$\ddot{R}(t) + \omega_0^2 R(t) + \epsilon \Gamma_0 R^3(t) = 0 \quad (4.10)$$

On a vu au Chapitre 2 que la *backbone curve* de l'oscillateur (4.10) est :

$$\omega_{NL} = \omega_0(1 + \epsilon T_{duff} a_1^2) \quad (4.11)$$

avec :

$$T_{duff} = \frac{3\Gamma_0}{8\omega_0^2} \quad (4.12)$$

Le coefficient non linéaire  $T_{duff}$  est à rapprocher du coefficient  $T_{p1}$  obtenu précédemment dans (4.9) : les deux coefficients sont identiques à condition que le coefficient cubique  $\Gamma_0$  du Duffing vérifie :

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 \omega_0^2}{3} \quad (4.13)$$

Si la condition (4.13) est remplie, alors les oscillateurs (4.6) et (4.10) sont équivalents au premier ordre - les expressions (4.9) et (4.12) proviennent d'une méthode de perturbation au premier ordre. Il est alors possible de caractériser le mode non linéaire fondamental par l'oscillateur de Duffing (4.10), dont le coefficient  $\Gamma_0$  englobe les effets des coefficients  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sur la tendance de non-linéarité.

Cette caractérisation permet de réduire le nombre de coefficients à identifier de deux ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ) à un ( $\Gamma_0$ ). Une fois  $\Gamma_0$  identifié expérimentalement, une infinité de couples de valeurs ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) peut vérifier l'équation (4.13). Au premier ordre, la valeur du couple ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) n'a pas d'importance (les oscillateurs (4.6) et (4.10) sont strictement équivalents car leur *backbone curves* sont égales). Cependant, aux ordres supérieurs les *backbone curves* des deux oscillateurs peuvent différer, et ce d'autant plus que l'amplitude  $a_1$  du mode fondamental augmente. Ceci est illustré sur la Figure 4.2, où dix courbes de résonances du MNL (4.5) sont calculées à l'aide du logiciel MANLAB (avec la méthode HBM/ANM). Trente harmoniques sont utilisées dans le calcul, si

bien que les résultats de la Figure 4.2 peuvent être considérés comme un résultat de référence. Les dix courbes correspondent à différentes valeurs du couple  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , vérifiant toutes l'équation (4.13), où le paramètre  $\Gamma_0$  est fixé<sup>11</sup>. On remarque que pour de faibles amplitudes de forçage, les différences entre les dix courbes sont qualitativement négligeables. En revanche, des différences nettes apparaissent aux grandes amplitudes de vibration. La caractérisation proposée ici n'est donc valable que dans une gamme de valeurs d'amplitude donnée, typiquement  $a_1 < 0.4$ .

Notons que le modèle de Duffing (4.10) est censé englober le comportement assouplissant du mode non linéaire fondamental. La valeur identifiée de  $\Gamma_0$  sera donc *négative*. La validité physique de ce modèle de Duffing à coefficient négatif sera discuté dans les perspectives de ce travail (Chapitre 6).

## 4.2.2 Principe de la boucle à verrouillage de phase (BVP)

Cette section présente le concept de la boucle à verrouillage, utilisée dans ce chapitre pour identifier le mode non linéaire caractérisé par (4.10), auquel sont rajoutés un terme d'amortissement visqueux et un terme de forçage :

$$\ddot{R}(t) + 2\xi\omega_0\dot{R}(t) + \omega_0^2R(t) + \epsilon\Gamma_0R^3(t) = Q(t) \quad (4.14)$$

Une boucle à verrouillage de phase est un système de contrôle asservissant la différence de phase entre deux signaux. Le concept général de ce système est de fournir un signal harmonique, dont la fréquence est ajustée en fonction de la différence de phase entre un signal donné et un signal de référence qui constitue un paramètre de contrôle.

### 4.2.2.1 Fonctionnement général

Le schéma global du fonctionnement de la boucle à verrouillage de phase est indiqué sur la Figure 4.3. Le système en lui-même comprend trois éléments clés : un détecteur de phase, un contrôleur proportionnel-intégral et un oscillateur commandé en tension<sup>12</sup>. L'étape préliminaire accomplie par l'utilisateur consiste à choisir un niveau de forçage  $F$ , une pulsation de forçage initiale  $\Omega(t=0) = \omega_0$ <sup>13</sup> (destinée à être modifiée ensuite par la boucle à verrouillage de phase) et une commande de référence  $\phi_{ref}$  correspondant à la différence de phase souhaitée entre les deux signaux. La structure est mise initialement en vibration avec un forçage  $Q(t) = F \cos \omega_0 t$ .

L'amplitude et la phase de la réponse  $X$  du système ( $X$  peut être un déplacement ou une vitesse) et du forçage  $Q$  sont mesurées par un détecteur de phase utilisant une méthode de démodulation synchrone (Figure 4.4). Le détecteur de phase réalise une estimation  $\phi$  de la différence de phase entre  $X(t)$  et  $Q(t)$ , qui est comparée à la différence de phase cible  $\phi_{ref}$  déterminée au préalable par l'utilisateur-trice. L'erreur constatée  $e = \phi - \phi_{ref}$  est ensuite donnée en entrée d'un contrôleur proportionnel-intégral de gains  $K_p$  et  $K_I$  ; celui-ci définit une correction qui est sommée à la pulsation initiale  $\omega_0$  afin de donner une nouvelle pulsation de forçage  $\Omega$ . Le nouveau forçage  $F \cos \Omega t$  est ensuite envoyé à la structure. L'asservissement se poursuit jusqu'à converger vers une erreur  $e$  minimale. L'étude de stabilité complète du système de contrôle en fonction de la commande  $\phi_{ref}$  est consultable en Annexe D.

Dans le cadre de ce travail, la boucle à verrouillage de phase est utilisée afin de mesurer la *backbone curve* du mode fondamental de l'instrument ; la mesure de cette *backbone curve*

11. La valeur de  $\Gamma_0$  a été prise égale à celle mesurée à la section 4.2.6.

12. *Voltage Controlled Oscillator (VCO)* en anglais.

13. La valeur de la pulsation propre du système est ici prise comme valeur initiale pour la pulsation de forçage  $\Omega$  mais d'autres valeurs initiales peuvent être choisies dans une gamme raisonnable autour de la pulsation propre.

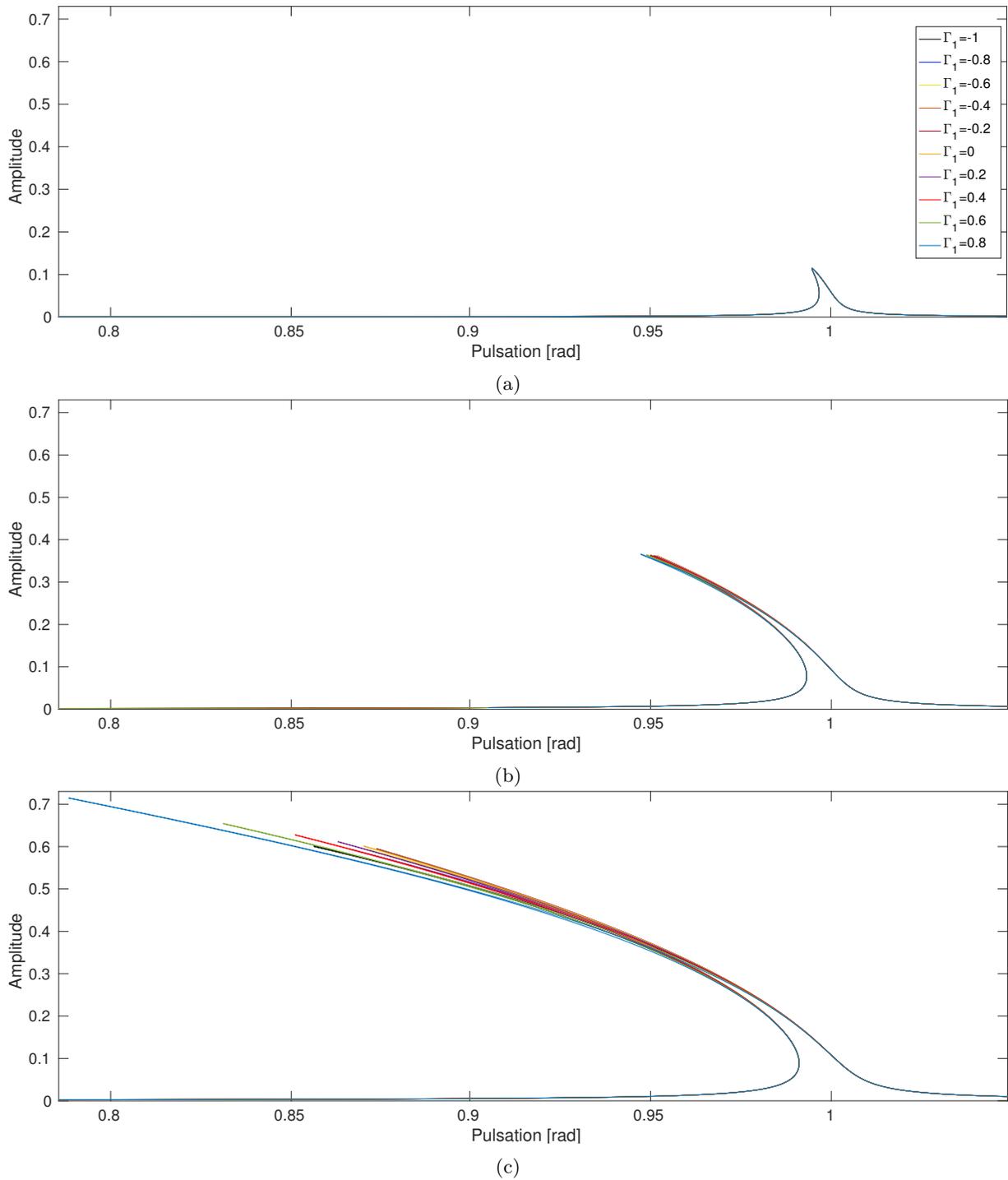


FIGURE 4.2 – Courbes de résonances non linéaires : amplitude  $a_1$  de la première harmonique du MNL (4.5) en fonction de la fréquence de forçage  $\Omega$  définie dans un forçage  $Q(t) = F \cos(\Omega t)$ . Dix valeurs différentes du couple  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  vérifiant  $\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 \omega_0^2}{3} = \Gamma_0 = 1$  sont étudiées. Les valeurs des paramètres sont :  $\xi = 0.013$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 450$ . Les courbes sont calculées avec la méthode HBM/ANM de MANLAB.

nécessite de forcer le système à osciller sur le mode non linéaire associé au fondamental. Ceci revient à imposer à l'instrument une condition de *résonance de phase*, qui est décrite ci-après.

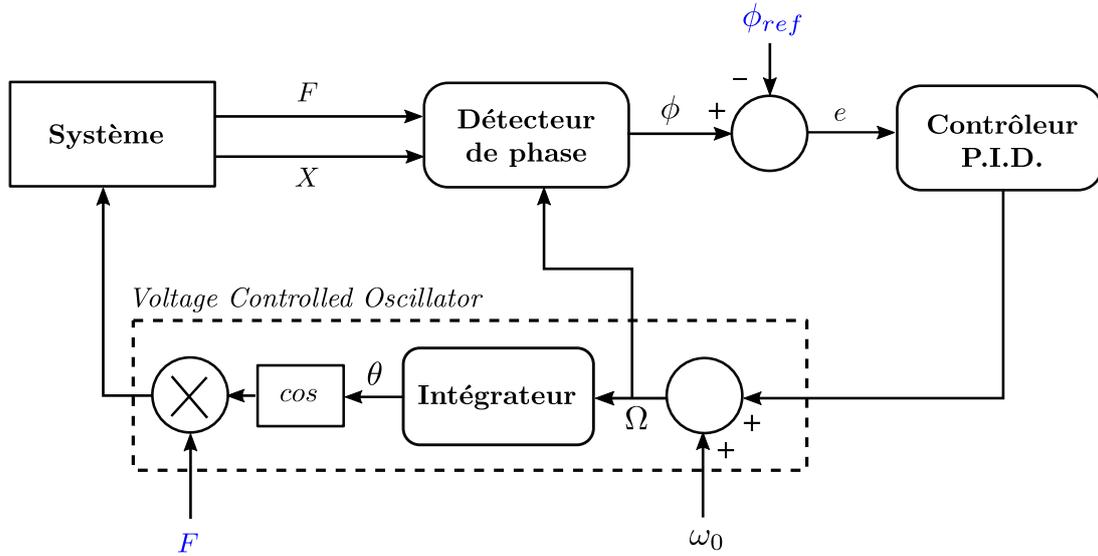


FIGURE 4.3 – Schéma des différents composants de la boucle à verrouillage de phase. Les paramètres de contrôle choisis par l'utilisateur (force d'excitation  $F$  et déphasage imposé  $\phi_{ref}$ ) sont indiqués en bleu.

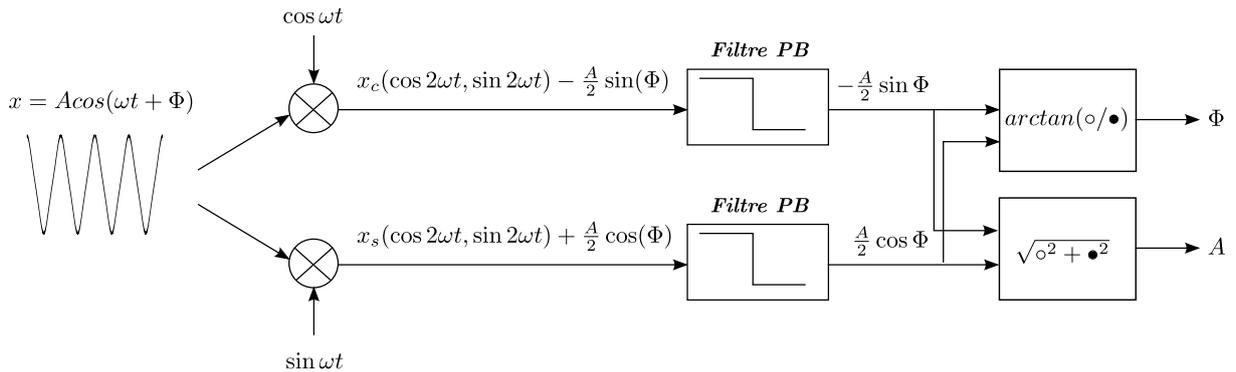


FIGURE 4.4 – Principe de la démodulation synchrone d'un signal  $v = A \cos(\omega t + \Phi)$ .

#### 4.2.2.2 Résonance de phase

D'un point de vue physique, forcer un système à vibrer sur un mode conservatif donné suppose d'amener celui-ci à la *résonance de phase*, par le biais d'un forçage qui vient *compenser les termes d'amortissement* dans la réponse. Dans le cas linéaire, la résonance de phase pour un oscillateur est réalisée quand le déphasage entre le forçage et la réponse du système est de  $\phi_{ref} = -\pi/2$  (si la réponse mesurée est le déplacement), ou  $\phi_{ref} = 0$  (si la réponse mesurée est la vitesse).

Dans le cas non linéaire, la résonance de phase (compensation des termes d'amortissement dans la réponse) est obtenue par le biais d'une excitation multi-harmonique [Peeters et al. 2011a], en établissant un même critère de déphasage : pour chaque harmonique du signal présent à la fois dans l'excitation et la réponse de la structure, un critère de déphasage  $\phi_{ref} = -\pi/2$  (si la réponse mesurée est le déplacement), ou  $\phi_{ref} = 0$  (si la réponse mesurée est la vitesse) est imposé entre la composante à l'harmonique considérée de l'excitation et la composante à l'harmonique considérée de la réponse. D'un point de vue plus formel, la résonance de phase non linéaire est

atteinte lorsque, sous un forçage multi-harmonique de la forme :

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} F_k \sin(k\Omega t)$$

la solution de l'équation du mode non linéaire fondamental (4.14) est, pour chaque harmonique, en quadrature de phase par rapport à cette excitation :

$$R(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Omega t) \quad (4.15)$$

ce qui est vérifié si le forçage  $Q$  est choisi de telle sorte que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, F_k = -2k\xi\omega_0\Omega a_k$$

Les détails pour l'obtention de cette dernière équation sont donnés en Annexe D. En pratique, le calcul par la méthode des échelles multiples des termes harmoniques d'ordres supérieurs dans la réponse  $R(t)$  (4.15) montre que ceux-ci sont de plusieurs ordres de grandeur inférieurs aux termes d'ordre 1 correspondant à la fondamentale. En effet la réponse  $R(t)$  du mode non linéaire (4.14) à l'ordre 3 s'écrit [Nayfeh and Mook 1995] :

$$R(t) = \epsilon a_1 \cos(\Omega t) + \epsilon^3 a_3 \cos(3\Omega t) + O(\epsilon^4)$$

L'harmonique cubique est en  $\epsilon^3$  par rapport à l'harmonique fondamentale d'ordre 1 en  $\epsilon$ . Ceci justifie le fait de pouvoir restreindre la condition de résonance de phase non linéaire à cette seule harmonique fondamentale, et d'employer une excitation mono-harmonique dans les applications expérimentales : cette condition est supposée suffisante pour obtenir une appropriation correcte du mode non linéaire.

En pratique, l'appropriation du mode non linéaire fondamental est donc réalisée en imposant un déphasage  $\phi_{ref} = -\pi/2$  entre la première harmonique de la réponse du système  $a_1 \cos(\Omega t)$  et le forçage, mono-harmonique :

$$Q(t) = -2\xi\omega_0\Omega a_1 \sin(\Omega t)$$

La *backbone curve* du mode non linéaire fondamental est ensuite obtenue en traçant l'amplitude  $a_1$  en fonction de la fréquence de forçage  $\Omega = \omega_{NL}$ .

### 4.2.3 Mise en oeuvre de la BVP

Le dispositif expérimental associé à la boucle à verrouillage de phase est représenté sur la Figure 4.5. Le gong est suspendu à la verticale et mis en vibration par un système bobine-aimant, dont la première conception a été réalisée par O. Thomas lors de sa thèse [2001; 2003]. Le système est constitué d'un petit aimant (diamètre 8 mm, hauteur 4 mm, masse 1.5 grammes), autour duquel est placée une bobine. L'aimant est collé sur le gong au moyen de cire d'abeille. La bobine est alimentée par un courant sinusoïdal. Celui-ci exerce à l'intérieur de la bobine une force proportionnelle à son intensité. L'aimant est placé à l'intérieur de la bobine, dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la surface du gong (Figure 4.6). Il est situé verticalement au niveau de l'extrémité de la bobine, et radialement sur son axe central. Cette position garantit à la fois un facteur force/intensité maximal, mais surtout une variation minimale de la force en fonction de la position de l'aimant [Thomas 2001] : en effet, à l'approche de la résonance, la structure excitée peut osciller, modifiant la position de l'aimant à l'intérieur de la bobine et donc l'amplitude de la force sinusoïdale appliquée - qui, rappelons-le, est souhaitée constante.

Nous verrons dans la discussion des résultats section 4.2.7 que la position du système d'excitation influence la valeur de  $\Gamma_0$  identifiée. Pour cette expérience, le système d'excitation est placé sur la partie centrale de l'instrument, et décentré (Figure 4.7). Cette position permet d'exciter efficacement le régime non linéaire du mode fondamental, tout en minimisant son invasivité dans le processus d'identification.

L'excitation forcée est envoyée au système bobine-aimant par l'ordinateur, après avoir été préalablement amplifiée par un amplificateur de puissance. L'intensité du courant dans la bobine est directement mesurée après l'amplificateur à l'aide d'une pince à courant. Celle-ci permet en sus de vérifier que la sortie de l'amplificateur n'est pas saturée aux grandes amplitudes de forçage. Le lien entre intensité du courant dans la bobine et force d'excitation du gong n'a pas été mesuré; la quantification du forçage sera donc par la suite indiquée en ampères (A); la conversion de l'intensité en force a été réalisée par O. Thomas [2001] avec la même bobine que celle de notre étude, mais un aimant légèrement plus gros. Par ailleurs, la vitesse de vibration du mode

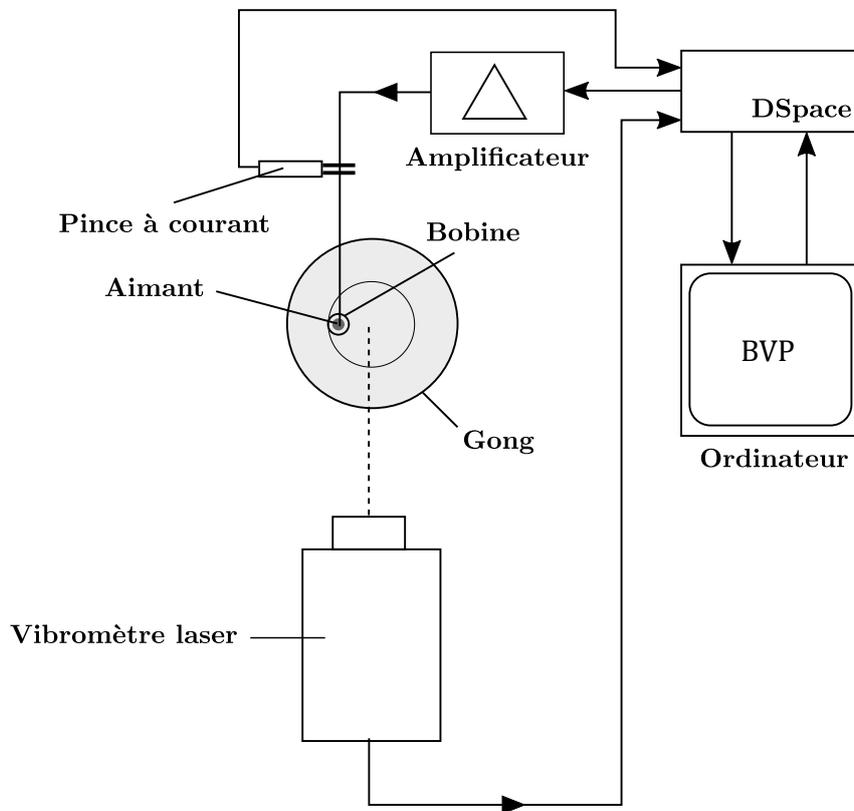


FIGURE 4.5 – Schéma du dispositif expérimental pour la boucle à verrouillage de phase (BVP).

non linéaire est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser, qui mesure par effet Doppler la vitesse au point où le laser est dirigé, sans contact avec la structure. La mesure est réalisée au centre de l'instrument, au niveau du maximum de la déformée opérationnelle (voir Chapitre 2, Figure 2.8).

L'aspect temps-réel de la boucle de contrôle est géré par un dSpace MicroLabBox. Le schéma de contrôle de la boucle à verrouillage de phase est implémenté sur MATLAB/Simulink et est décrit dans son intégralité en Annexe C. Les mesures sont réalisées à une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz, avec un pas pour l'amplitude de forçage de 0.001V. La fréquence de coupure du filtre passe-bas utilisé dans le détecteur de phase est à 20 Hz. Par ailleurs, les gains intégral  $K_I$  et proportionnel  $K_P$  du contrôleur PID sont  $K_I = 30$  et  $K_P = 8$ . Ils ont été définis de manière

empirique, afin d'obtenir un bon compromis entre la précision et la vitesse de convergence de la boucle de contrôle. Des photos du dispositif complet sont présentées Figure 4.8. Les références des différents éléments constituant le dispositif expérimental sont également disponibles dans la Table 4.1.

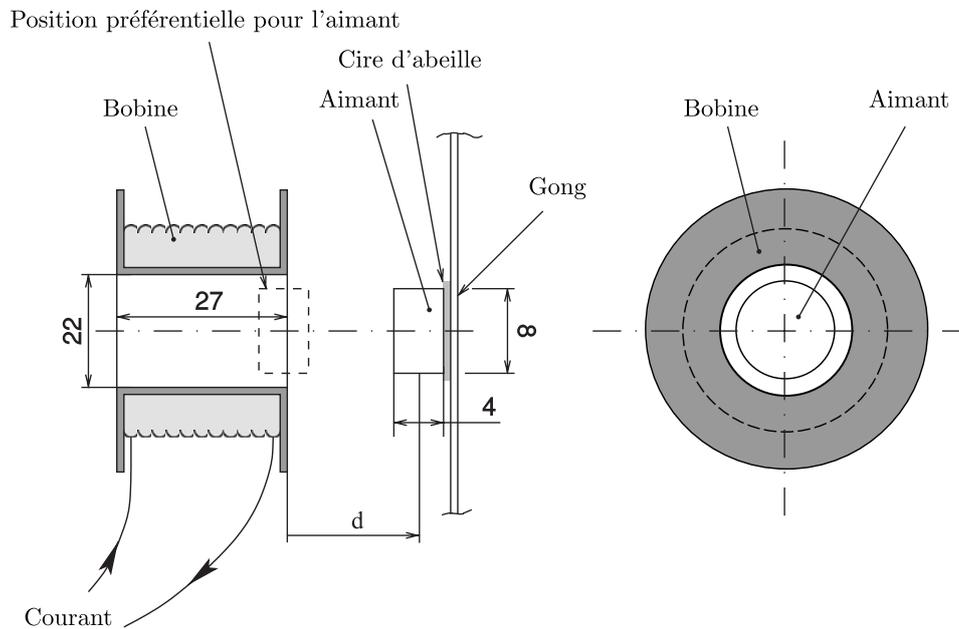
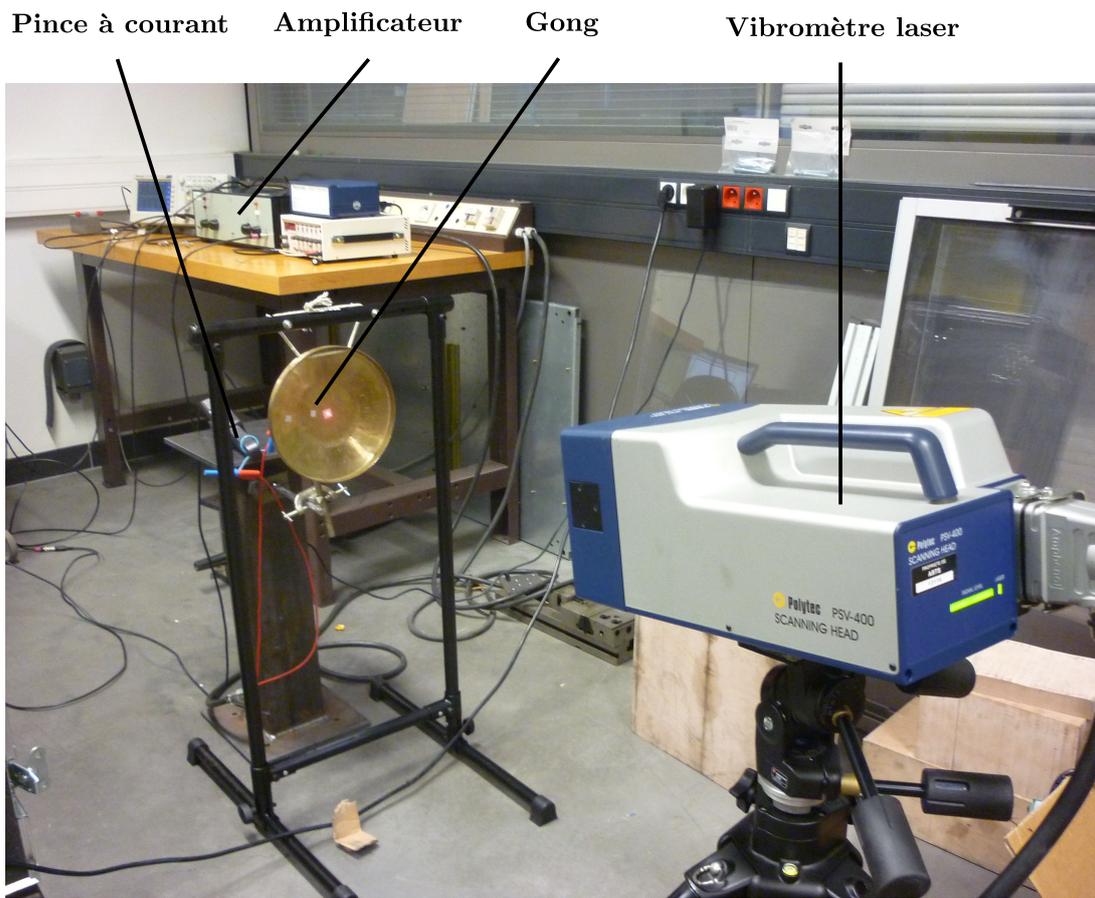


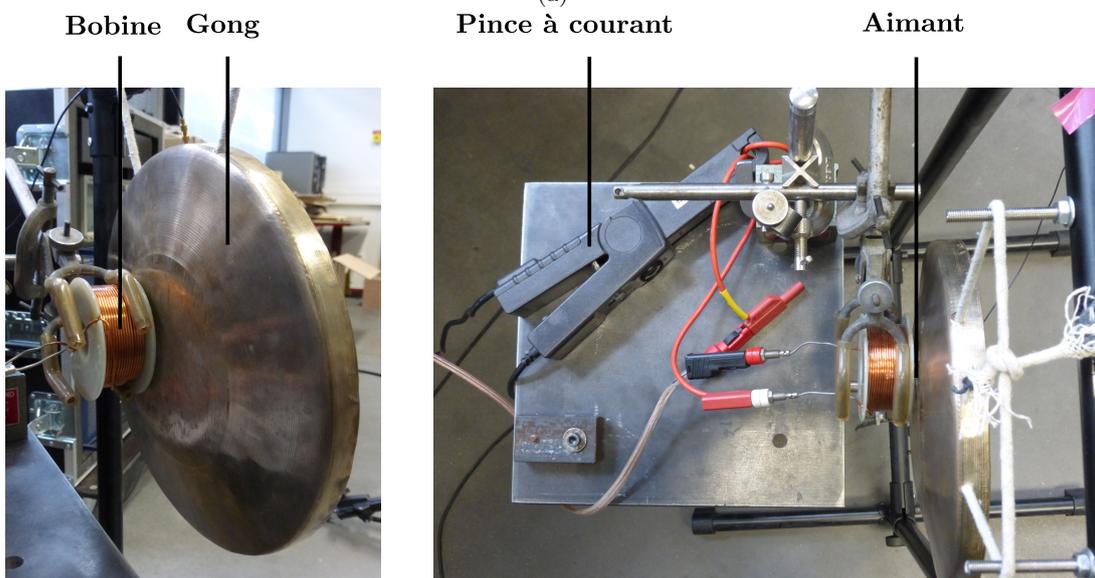
FIGURE 4.6 – Schéma du système d'excitation constitué de la bobine et de l'aimant. Les dimensions sont en millimètres. La position optimale pour l'aimant correspond à  $d \sim 0$ . Gauche : vue de profil. Droite : vue de face. Figure modifiée d'après [Thomas 2001].



FIGURE 4.7 – Photo du gong et de l'aimant, placé décentré sur la partie centrale.



(a)



(b)

FIGURE 4.8 – Photos du dispositif décrit Figure 4.5. (a) Dispositif global. (b) Système d'excitation bobine-aimant.

Composant	Référence
Aimant	Eclipse N809
Vibromètre	Polytech PSV-400
Amplificateur	Brüel & Kjaer Type 2712
Acquisition et contrôle	dSpace MicroLabBox

TABLE 4.1 – Références pour les différents éléments du dispositif expérimental de la Figure 4.5.

#### 4.2.4 Deux applications de la BVP

Deux applications peuvent être envisagées avec la boucle à verrouillage de phase, en fonction des variables de déphasage  $\Phi_{ref}$  et de forçage  $F$ .

##### 4.2.4.1 Mesure de *backbone curve* ( $\Phi_{ref}$ constante, $F$ variable)

La première application de BVP consiste à garder la différence de phase  $\phi_{ref}$  constante dans le temps, et de faire varier l'amplitude  $F$  de forçage pas à pas (Figure 4.9a). Avec cette configuration, la boucle à résonance de phase est utilisée pour tracer la *backbone curve* d'un mode non linéaire (Figure 4.9c). Cela suppose, à chaque pas d'amplitude de forçage, de placer le système à la résonance de phase du mode fondamental, c'est-à-dire d'imposer un déphasage  $\phi_{ref}$  entre excitation et réponse *qui permette de compenser l'amortissement du système* dans (4.14). Comme expliqué précédemment, le système atteint la résonance de phase non linéaire correspondant au mode fondamental lorsque excitation et réponse du système sont en quadrature de phase (ou en phase si la réponse du système est sa vitesse). La *backbone curve* du système est ainsi tracée pas à pas : à chaque fois que l'amplitude de forçage est incrémentée, la boucle à verrouillage de phase ajuste la fréquence de forçage afin de remplir le critère de déphasage  $\phi_{ref} = 0$  (le vibromètre mesure la vitesse). L'ajustement de la fréquence par la boucle à verrouillage de phase est représenté Figure 4.9b. Sur la Figure 4.9c, les pas réalisés par la boucle à verrouillage de phase sont visibles sous la forme des petits amas de points dans la *backbone*, correspondant à l'étape de convergence de la boucle à verrouillage de phase (voir encadré bleu).

Par ailleurs, la *backbone curve* représentée Figure 4.9 est mesurée sur une plage fréquentielle réduite ( $\sim 5$  Hz). Cette plage fréquentielle est imposée par l'apparition de résonances internes quand la fréquence de forçage se trouve autour de 440 Hz. Cela est probablement dû à une résonance interne 1:2 ( $\omega_2 = 2\omega_1$ ) intervenant entre le mode fondamental et un mode autour de 880 Hz<sup>14</sup>. Lorsque l'amplitude du forçage continue d'augmenter, les échanges d'énergie dus à la résonance interne rendent invalide la condition de résonance de phase imposée par la boucle à verrouillage de phase, et la fréquence de forçage stagne. Pour cette raison, toutes les mesures effectuées dans ce chapitre sont effectuées dans des plages de fréquences dont la borne inférieure est strictement supérieure à 440 Hz.

##### 4.2.4.2 Mesure de courbes de résonances ( $\Phi_{ref}$ variable, $F$ constante)

Une deuxième application possible de la BVP, que l'on montre ici à titre d'exemple, consiste à fixer l'amplitude de forçage  $F$  et à faire varier la valeur de la commande de phase  $\phi_{ref}$  entre 0 et  $\pi$ . Avec cette configuration, il est possible de tracer *toute* la courbe reliant l'amplitude de vibration du mode non linéaire fondamental  $a_1$  à la fréquence de forçage  $f = \Omega/2\pi$ . La partie théoriquement instable de la courbe amplitude-fréquence (voir Chapitre 2 Figure 2.13d) est ainsi stabilisée par la boucle à verrouillage de phase (Figure 4.10).

14. Cet aspect est abordé au Chapitre 5.

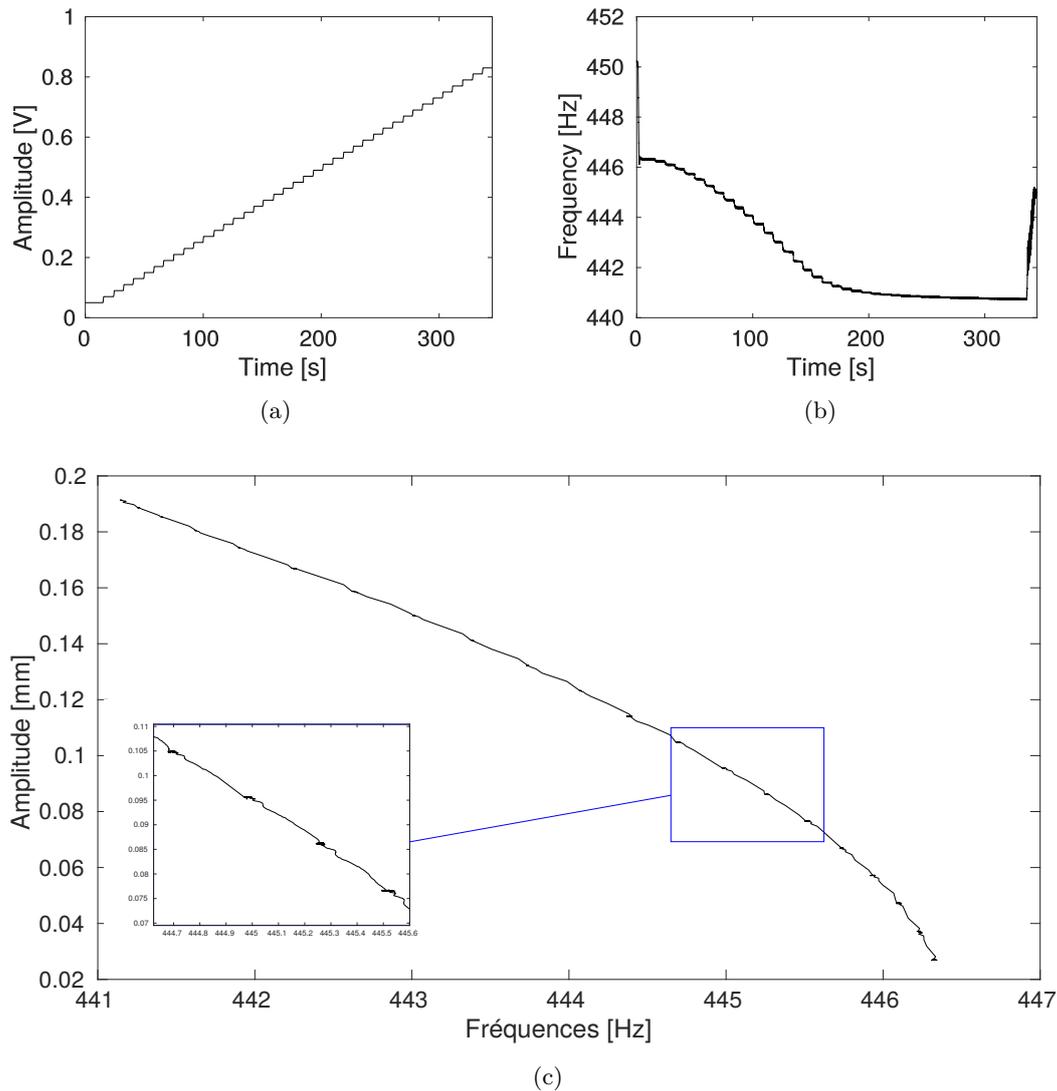


FIGURE 4.9 – Exemple de mesure de *backbone curve* du mode non linéaire fondamental avec le système de la boucle à verrouillage de phase. (a) Amplitude de forçage en fonction du temps. (b) Fréquence de forçage en fonction du temps. (c) Amplitude de la première harmonique du mode non- linéaire fondamental en fonction de la fréquence de forçage.

#### 4.2.5 Évaluation de la BVP par une méthode de mesure alternative

La mesure de la *backbone curve* du mode fondamental par la boucle à verrouillage de phase est comparée à une méthode classique de mesure des *backbone curves* des systèmes non linéaires. Cette deuxième méthode consiste à mesurer les courbes de résonances du mode non linéaire pour différentes amplitudes de forçage. Une courbe de résonance non linéaire est obtenue en balayant pas à pas la bande de fréquence de forçage, pour une amplitude de forçage donnée (voir Chapitre 2 Figure 2.13). Il suffit ensuite de relever le maximum d'amplitude de plusieurs courbes de résonances non linéaires pour remonter à la *backbone curve* (Figure 2.13c). C'est par exemple la méthode utilisée par Thomas [2001]. En pratique, cette méthode est beaucoup plus longue que la méthode de la boucle à verrouillage de phase : la mesure d'une seule courbe de résonance non linéaire dure environ 5 minutes, durée qu'il faut ensuite multiplier par le nombre de courbes correspondant aux différents niveaux de forçage (environ une dizaine). À l'inverse,

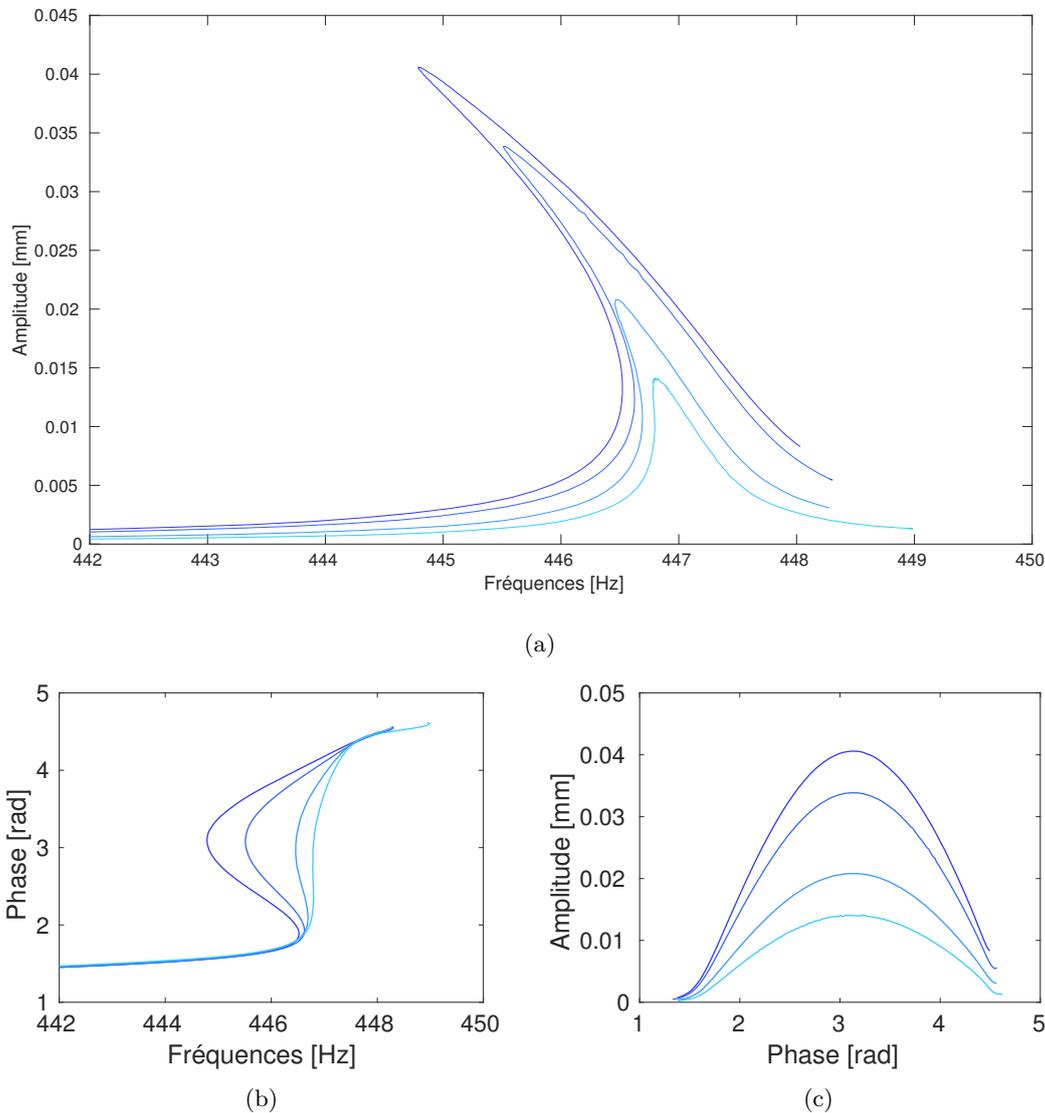


FIGURE 4.10 – Courbes de résonances non linéaires mesurées avec la boucle à verrouillage de phase, en modifiant pas à pas la commande  $\phi_{ref}$  entre 0 et  $\pi$ . (a) Amplitude de la première harmonique du mode non linéaire fondamental en fonction de la fréquence de forçage. (b) Phase de la première harmonique du mode non linéaire fondamental en fonction de la fréquence. (c) Amplitude de la première harmonique du mode non linéaire fondamental en fonction de sa phase.

une mesure de *backbone curve* avec la boucle à verrouillage de phase ne prend qu'environ 5 minutes (voir Figure 4.9a et b).

Pour mesurer les courbes de résonances non linéaires du mode fondamental du gong, les éléments du dispositif expérimental sont similaires à ceux utilisés pour la boucle à verrouillage de phase, à la différence que, en l'absence de boucle de contrôle, le dSpace est remplacé par une carte d'acquisition standard National Instruments PXIe-1071 (Figure 4.11). La mesure d'une courbe de résonance non linéaire suit la procédure d'acquisition suivante : la fréquence de forçage est modifiée pas à pas en parcourant une bande de fréquences située autour de la fréquence propre du mode concerné. Pour chaque valeur de fréquence de forçage, 10 secondes d'acquisition de signal du vibromètre sont réalisées, pendant lesquelles le tampon de la carte d'acquisition

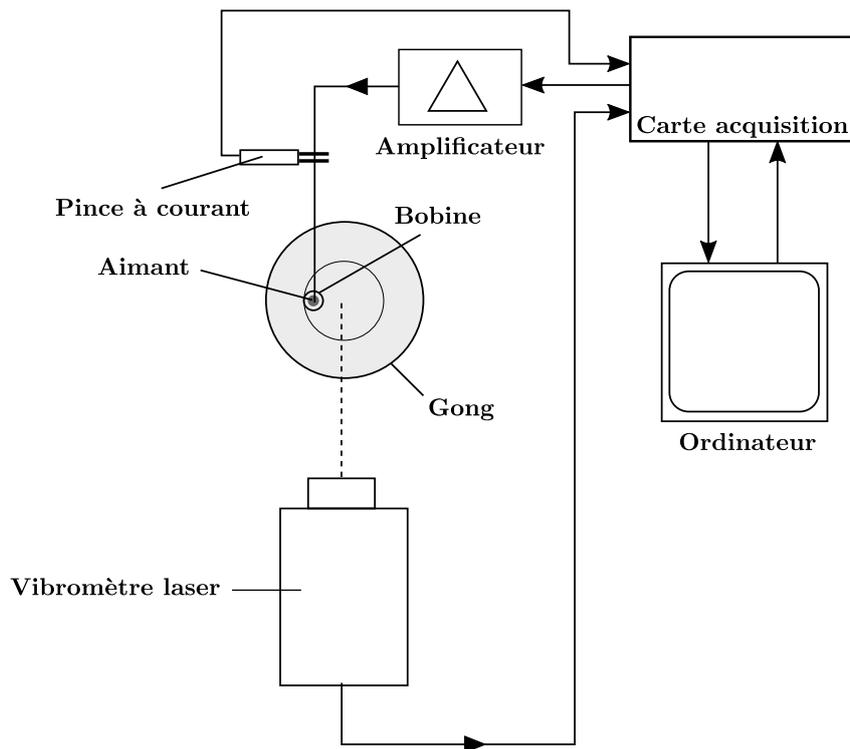


FIGURE 4.11 – Schéma du dispositif expérimental pour la mesure des courbes de résonance non linéaires.

enregistre 10 portions de signal de vibromètre d'une durée de 1 seconde chacune. Une fois les 10 secondes écoulées, la fréquence de forçage change, et ainsi de suite jusqu'à ce que toute la bande de fréquence de forçage d'intérêt soit entièrement parcourue. Pour une fréquence de forçage donnée, l'amplitude du mode non linéaire correspond à la moyenne de l'amplitude mesurée sur les 10 portions de signal de 1 seconde. Les phénomènes d'hystérésis et de saut caractéristiques des résonances non linéaires qui ont été discutés au Chapitre 2 sont mis en évidence en parcourant la bande fréquentielle à la fois de manière ascendante *et* descendante.

On peut souligner ici qu'au premier ordre, le lieu des maxima des différentes courbes de résonances correspond à la *backbone curve*, c'est-à-dire au lieu des points où le déphasage excitation/déplacement est de  $\pi/2$ . Les deux méthodes sont donc équivalentes au premier ordre. En revanche, un calcul précis avec MANLAB aux ordres plus élevés montre que les deux courbes sont différentes, et ce d'autant plus que l'amortissement est grand. Cette différence est visible sur la Figure 2 de l'article en Annexe D. Le système ici étant relativement peu amorti ( $\xi \sim 1 \cdot 10^{-3}$ ), on suppose cette différence négligeable.

#### 4.2.6 Résultats

Les résultats de l'identification expérimentale du mode non linéaire fondamental du gong *xiaoluo* sont présentés dans l'ordre suivant : premièrement, les résultats des mesures de *backbone curves* avec la boucle à verrouillage de phase sont exposés, et la reproductibilité de l'expérience démontrée. Ensuite, ces résultats sont comparés à des mesures de *backbone curve* réalisées à partir des courbes de résonances non linéaires. Notons que les deux expériences sont effectuées dans les mêmes conditions expérimentales - en particulier, la position de l'aimant reste la même. La discussion des résultats s'effectue dans la section 4.2.7, où l'influence de l'aimant ainsi que les effets thermiques sont notamment mis en évidence.

### 4.2.6.1 Identification du coefficient $\Gamma_0$

Quatre mesures de *backbone curves* ont été réalisées à partir du dispositif de la boucle à verrouillage de phase (Figure 4.5). Elles sont représentées sur la Figure 4.12 en traits pleins. La reproductibilité des mesures est bonne, hormis un léger décalage en fréquence de 1 Hz entre la première courbe mesurée et les autres. Ce décalage provient probablement d'effets thermiques qui seront mis en évidence dans la section 4.2.7 et au Chapitre 5. En effet, plus l'amplitude de forçage augmente, plus l'aimant est susceptible de chauffer et d'induire des modifications de fréquence dans la partie centrale de l'instrument. La valeur expérimentale de  $\Gamma_0$  est identifiée en ajustant les *backbone curves* mesurées par un polynôme d'ordre 2. Ces ajustements sont visibles en tirets sur la Figure 4.12. La valeur de  $\Gamma_0$  identifiée pour chaque courbe est répertoriée dans la Table 4.2. La moyenne des quatre mesures donne le résultat :

$$\Gamma_0 = -6.7 \cdot 10^6 \pm 3.1 \cdot 10^5 \text{ mm}^{-2}\text{s}^{-2} \quad (4.16)$$

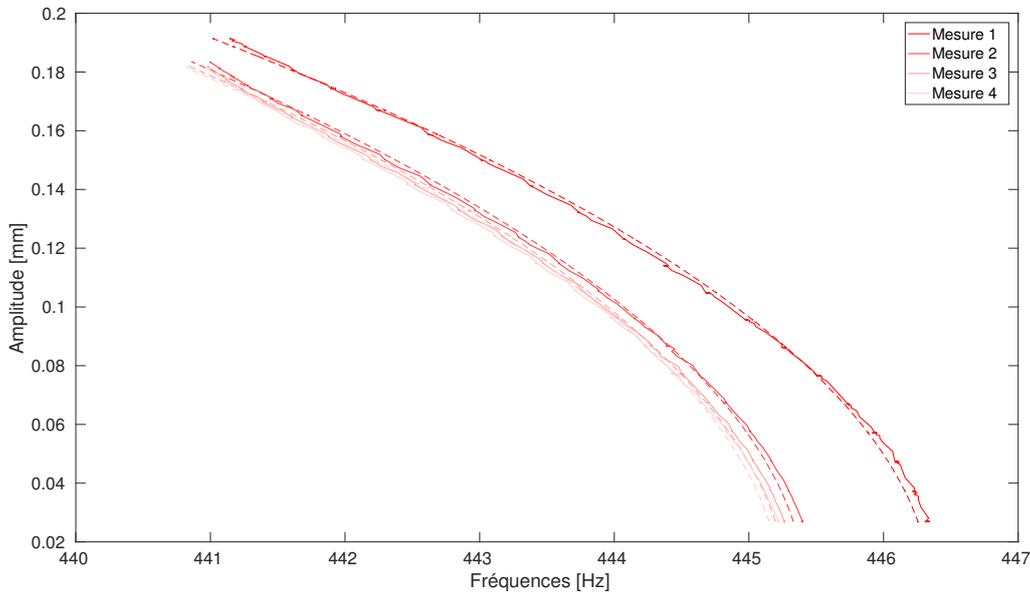


FIGURE 4.12 – *Backbone curves* du mode fondamental obtenues pour 4 mesures avec la boucle à verrouillage de phase. Les données expérimentales sont indiquées en traits pleins. Pour chacune d'elles, l'ajustement avec le polynôme d'ordre 2 est représenté en tirets.

Paramètres identifiés	Mesure 1	Mesure 2	Mesure 3	Mesure 4
Fréquence propre	446.4 Hz	445.5 Hz	445.3 Hz	445.3 Hz
Paramètre non linéaire $\Gamma_0$ ( $\text{mm}^{-2}\text{s}^{-2}$ )	$-7.2 \cdot 10^6$	$-6.6 \cdot 10^6$	$-6.7 \cdot 10^6$	$-6.5 \cdot 10^6$

TABLE 4.2 – Valeurs de la fréquence propre et du paramètre non linéaire  $\Gamma_0$  identifiés sur les *backbone curves* représentées Figure 4.12.

### 4.2.6.2 Évaluation de la BVP

Les mesures précédentes sont comparées à celles obtenues par la méthode de mesure utilisant les courbes de résonances non linéaires, introduite en section 4.2.5. Comme expliqué auparavant, la procédure expérimentale consiste à mesurer différentes courbes de résonances à différentes amplitudes de forçage, et à relever les sommets de chaque courbe afin d'obtenir la *backbone curve*. Un exemple de ce processus est donné Figure 4.13.

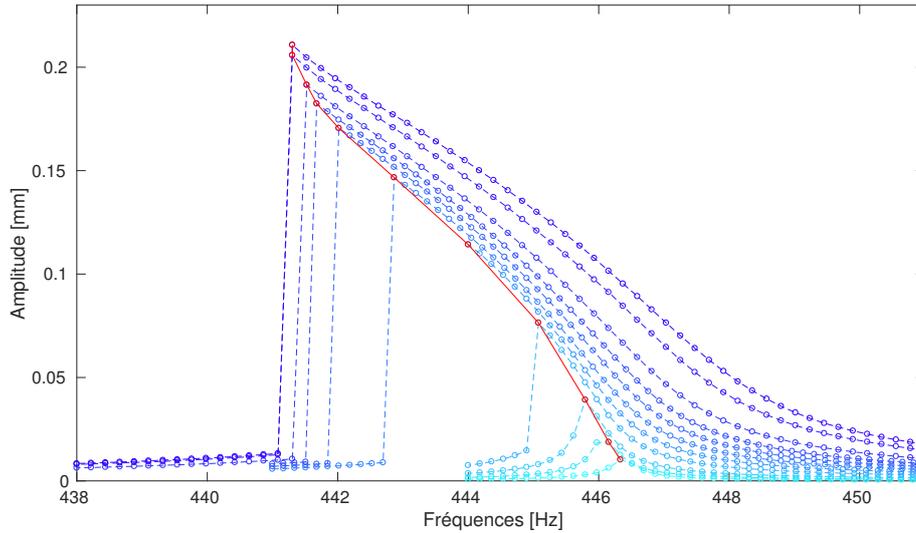


FIGURE 4.13 – Exemple de *backbone curve* du mode fondamental (en rouge) obtenue à partir du maximum de 11 courbes de résonances à différentes amplitudes (en nuances de bleu).

Trois *backbone curves* ont été mesurées par cette méthode. Elles sont représentées Figure 4.14 en traits pleins. La valeur de  $\Gamma_0$  est mesurée de la même manière que précédemment, en ajustant chaque courbe avec un polynôme d'ordre 2 (courbes en tirets sur la Figure 4.14). Les valeurs de  $\Gamma_0$  obtenues pour chaque courbe sont référencées dans la Table 4.3. La moyenne de ces valeurs donne :

$$\Gamma_0 = -6.5 \cdot 10^6 \pm 4.0 \cdot 10^5 \text{ mm}^{-2}\text{s}^{-2} \quad (4.17)$$

La comparaison des résultats obtenus avec la boucle à verrouillage de phase et la méthode des courbes de résonance non linéaires est illustrée sur la Figure 4.15.

Paramètres identifiés	Mesure 1	Mesure 2	Mesure 3
Fréquence propre (Hz)	446.1	445	446.3
Paramètre non linéaire $\Gamma_0$ ( $\text{mm}^{-2}\text{s}^{-2}$ )	$-6.4 \cdot 10^6$	$-6.9 \cdot 10^6$	$-6.1 \cdot 10^6$

TABLE 4.3 – Valeurs de la fréquence propre et du paramètre non linéaire  $\Gamma_0$  identifiés sur les *backbone curves* de la Figure 4.14.

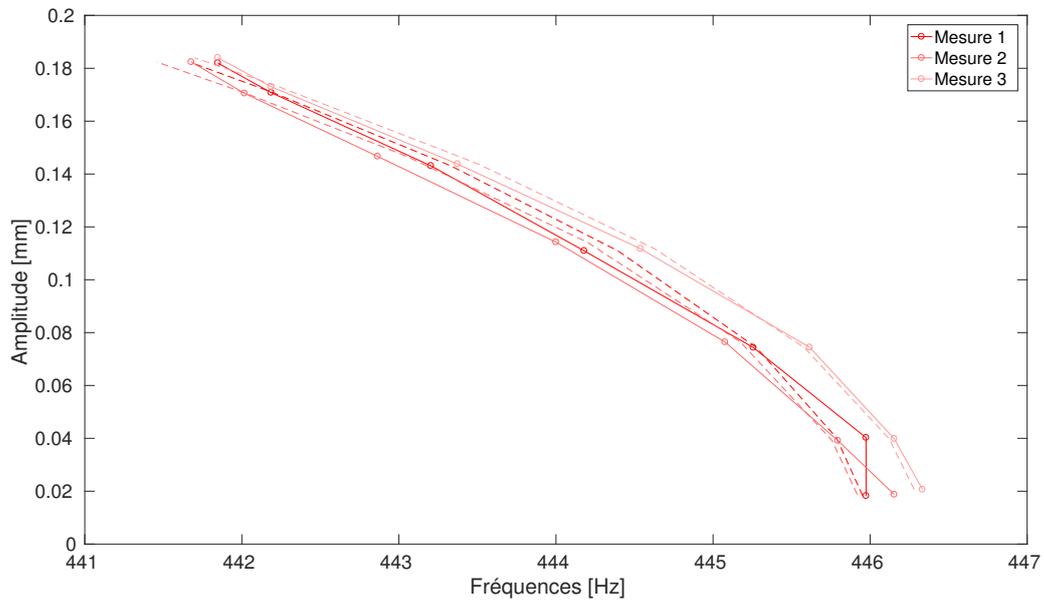


FIGURE 4.14 – *Backbone curves* du mode fondamental obtenues à partir de 3 mesures de ses courbes de résonances à différentes amplitudes. Les mesures sont montrées en traits pleins. Pour chacune d'elles, l'ajustement avec le polynôme d'ordre 2 est représenté en tirets.

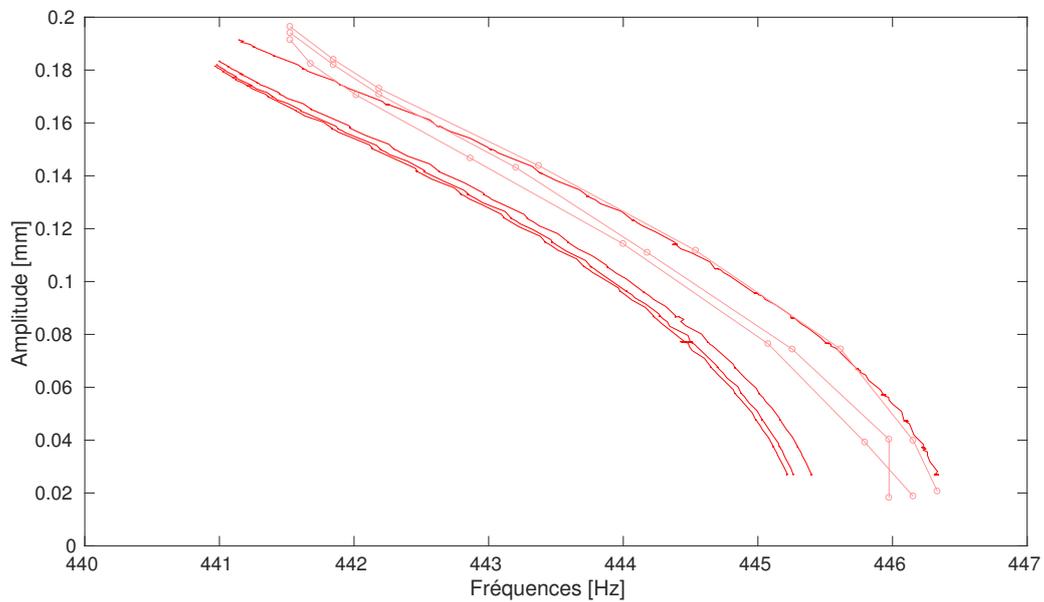


FIGURE 4.15 – *Backbone curves* obtenues avec la boucle à verrouillage de phase (en rouge, voir aussi Figure 4.12), et avec la méthode des courbes de résonance (en rose, voir aussi Figure 4.14).

### 4.2.7 Discussion

Les résultats présentés amènent plusieurs points de discussion.

#### 4.2.7.1 Identification de $\Gamma_0$

L'utilisation de la boucle à verrouillage de phase pour la mesure de la *backbone curve* a été comparée à la méthode des courbes de résonances non linéaires. Les valeurs moyennes de  $\Gamma_0$  mesurées dans les deux méthodes (voir (4.16) et (4.17)) sont sensiblement égales - ou, du moins, leur différence est incluse dans l'écart-type de chacune. Néanmoins, l'écart-type associé à la mesure des *backbone curves* par la méthode des courbes de résonances est légèrement plus élevé que dans le cas de la boucle à verrouillage de phase. L'ajustement des *backbone curves* avec le polynôme d'ordre 2 est également de moins bonne qualité pour cette méthode, au vu des Figures 4.12 et 4.14. Ceci peut provenir de qualités de résolution différentes entre les deux méthodes de mesures : là où la boucle à verrouillage permet une résolution d'amplitude d'environ 0.01mm (voir Figure 4.9), la résolution de la méthode des courbes de résonances est environ quatre fois inférieure - voir la Figure 4.14.

#### 4.2.7.2 Influence de la position de l'aimant

Les expériences menées dans ce chapitre ont été réalisées avec le système d'excitation bobine/aimant placé sur la partie centrale du gong, décentrée (Figure 4.7). Ce choix n'est pas sans raison : il a été en effet constaté que la masse de l'aimant, quoique faible (1.5 grammes) influence de manière significative la valeur de  $\Gamma_0$  mesurée. Ainsi, la méthode des courbes de résonances a été employée pour mesurer trois *backbone curves* correspondant à trois positions différentes de l'aimant : centré sur l'instrument, décentré sur la partie centrale, et sur la couronne (Figures 4.16 et 4.17). Les résultats d'identification de  $\Gamma_0$  (Table 4.4) suggèrent que la valeur de  $\Gamma_0$  augmente avec la distance de l'aimant par rapport au centre - ce qui n'est pas étonnant étant donné que la masse de l'aimant a tendance à raidir la partie centrale où est localisé le mode fondamental. La fréquence propre du mode fondamental, de manière tout aussi logique, diminue drastiquement (de plus de 20 Hz) quand l'aimant passe de la couronne au centre de l'instrument (Figure 4.16). La position de l'aimant choisie pour cette étude correspond en réalité à un compromis entre l'invasivité de celui-ci et les effets thermiques induits par la position couronne, évoqués ci-après.

Paramètres identifiés	Aimant centré	Aimant décentré	Aimant couronne
Fréquence propre	428.2 Hz	448.2	449.5
Paramètre $\Gamma_0$	$-5.9 \cdot 10^6$	$-5.0 \cdot 10^6$	$-1.5 \cdot 10^7$

TABLE 4.4 – Valeurs de la fréquence propre et du paramètre non linéaire  $\Gamma_0$  identifiés sur les *backbone curves* de la Figure 4.16.

#### 4.2.7.3 Effets thermiques

Les remarques précédentes suggèrent que la position de l'aimant permettant une identification *réelle* du coefficient  $\Gamma_0$  est la couronne : à cette position, la fréquence propre est peu perturbée par rapport à la fréquence modale mesurée sur le gong seul au Chapitre 2 (voir Table 4.4) et le coefficient  $\Gamma_0$  est maximal. Cette remarque peut être mise en défaut en considérant le fait que plus la distance de l'aimant au centre de l'instrument est grande, moins le forçage de l'instrument est efficace. Autrement dit, pour une même amplitude de forçage, l'excitation du mode non linéaire est moindre si l'aimant est placé en couronne par rapport à la partie centrale.

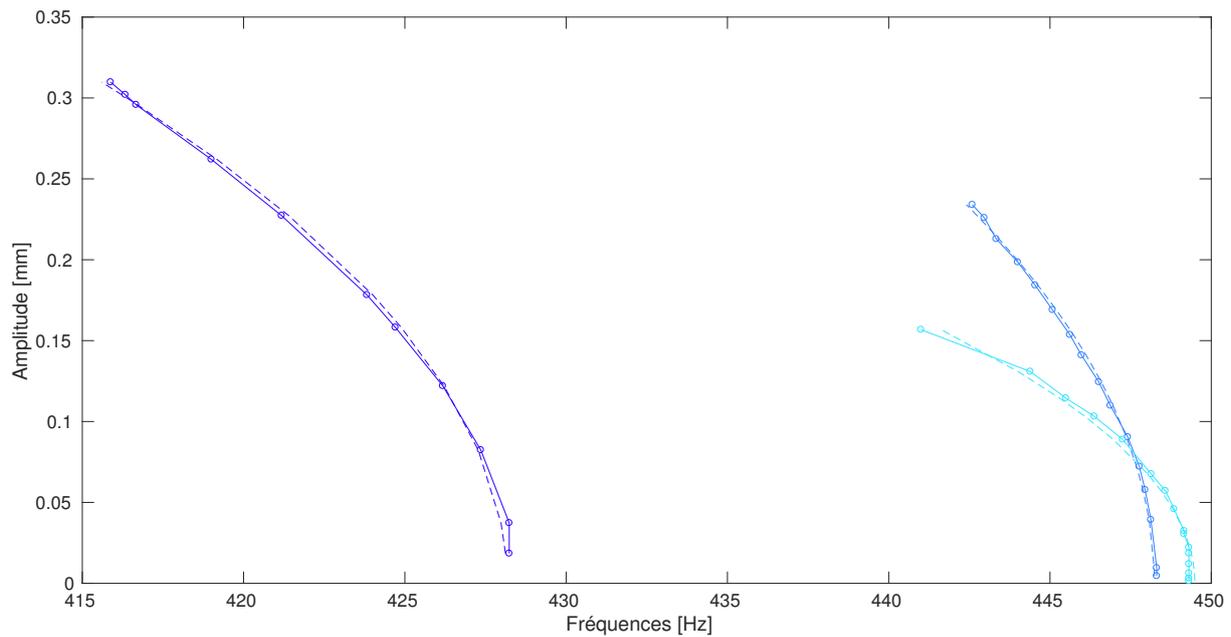


FIGURE 4.16 – *Backbone curves* du mode fondamental pour trois positions de l'aimant sur le gong. — : aimant au centre, — : aimant décentré et — : aimant sur la couronne . Les mesures sont indiquées en traits pleins, les ajustements avec un polynôme d'ordre 2 en tirets. Les positions précises de l'aimant sont indiquées Figure 4.17.

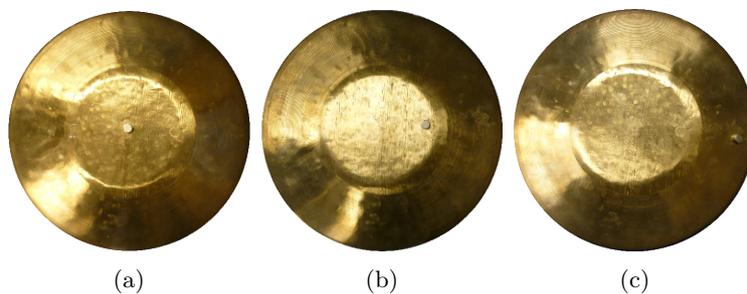


FIGURE 4.17 – Différentes positions de l'aimant testées pour les expérimentations. (a) aimant au centre (b) aimant décentré (c) aimant sur la couronne.

Ces effets sont illustrés sur la Figure 4.18. Pour une faible amplitude de forçage (Figure 4.18a), l'amplitude de vibration correspondant à un aimant localisé sur la couronne est environ quatre fois inférieure à celle correspondant à une position de l'aimant décentrée, et vingt fois inférieure à celle correspondant à une position au centre. Pour les grandes amplitudes de forçage (Figure 4.18b), ces deux valeurs passent à sept et douze, respectivement. Une mesure depuis la couronne nécessite donc d'augmenter considérablement l'amplitude de forçage pour exciter le mode fondamental dans son régime non linéaire. Cela peut engendrer, à très fortes amplitudes, des courants de Foucault dans la bobine qui se dissipent dans l'aimant sous forme de chaleur. Une des conséquences est l'augmentation locale de température, qui peut donner lieu à d'importants décalages en fréquence. Ce phénomène est illustré sur la Figure 4.19, où des courbes de résonances avec l'aimant sur la couronne sont représentées pour différentes amplitudes de forçage. La bande de fréquences est parcourue de manière descendante (en bleu) et ascendante (en rouge), l'une après l'autre. Outre le traditionnel phénomène d'hystérésis déjà mentionné au Chapitre 2, on

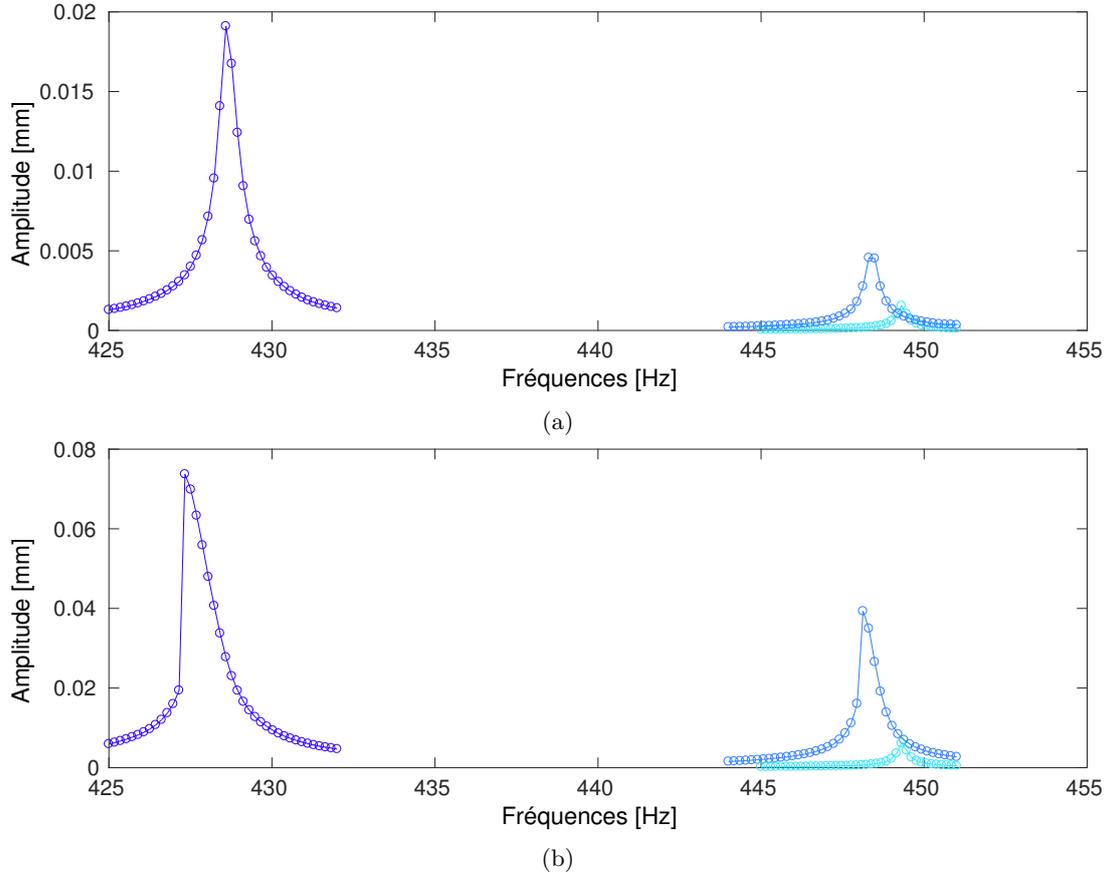


FIGURE 4.18 – Amplitude du mode non linéaire fondamental en fonction de la fréquence, pour trois positions de l’aimant sur le gong. — : aimant au centre, — : aimant décentré et — : aimant sur la couronne, pour une même amplitude de forçage. (a) Intensité de 0.24A dans la bobine (b) Intensité de 0.96 A dans la bobine.

observe que les courbes correspondant aux deux sens de parcours du forçage se décalent en fréquence quand l’amplitude de forçage augmente. On peut alors raisonnablement supposer qu’une augmentation de température - corroborée par la fonte, aux grandes amplitudes, de la cire collant l’aimant à l’instrument, est responsable de ce décalage en fréquence.

Ainsi, la position de l’aimant sur la couronne, bien que peu invasive, entraîne des effets thermiques venant décaler en fréquence les mesures de *backbone curves*. Par conséquent, déterminer une position optimale pour le système d’excitation revient à effectuer un compromis entre (i) l’invasivité de la masse de ce système sur le mode non linéaire fondamental et (ii) les effets thermiques induits par l’amplitude de forçage nécessaire à l’excitation efficace du régime non linéaire du mode fondamental.

#### 4.2.7.4 Ordre de grandeur du déplacement

Enfin, les mesures présentées précédemment mettent en lumière le fait que l’amplitude du déplacement du mode fondamental est de l’ordre de  $a_1 \sim 2 \cdot 10^{-4}$  m. Cette valeur est à comparer avec l’ordre de grandeur de  $h^3/a_0^2$  où  $h$  est l’épaisseur du gong et  $a_0$  son demi-diamètre, qui a été utilisé au Chapitre 2 pour imposer  $\epsilon \ll 1$  dans le calcul des échelles multiples. D’après le Chapitre 2, on a :

$$\frac{h^3}{a_0^2} = \frac{(0.9)^3 \cdot 10^{-9}}{(11.3)^2 \cdot 10^{-4}} \sim 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

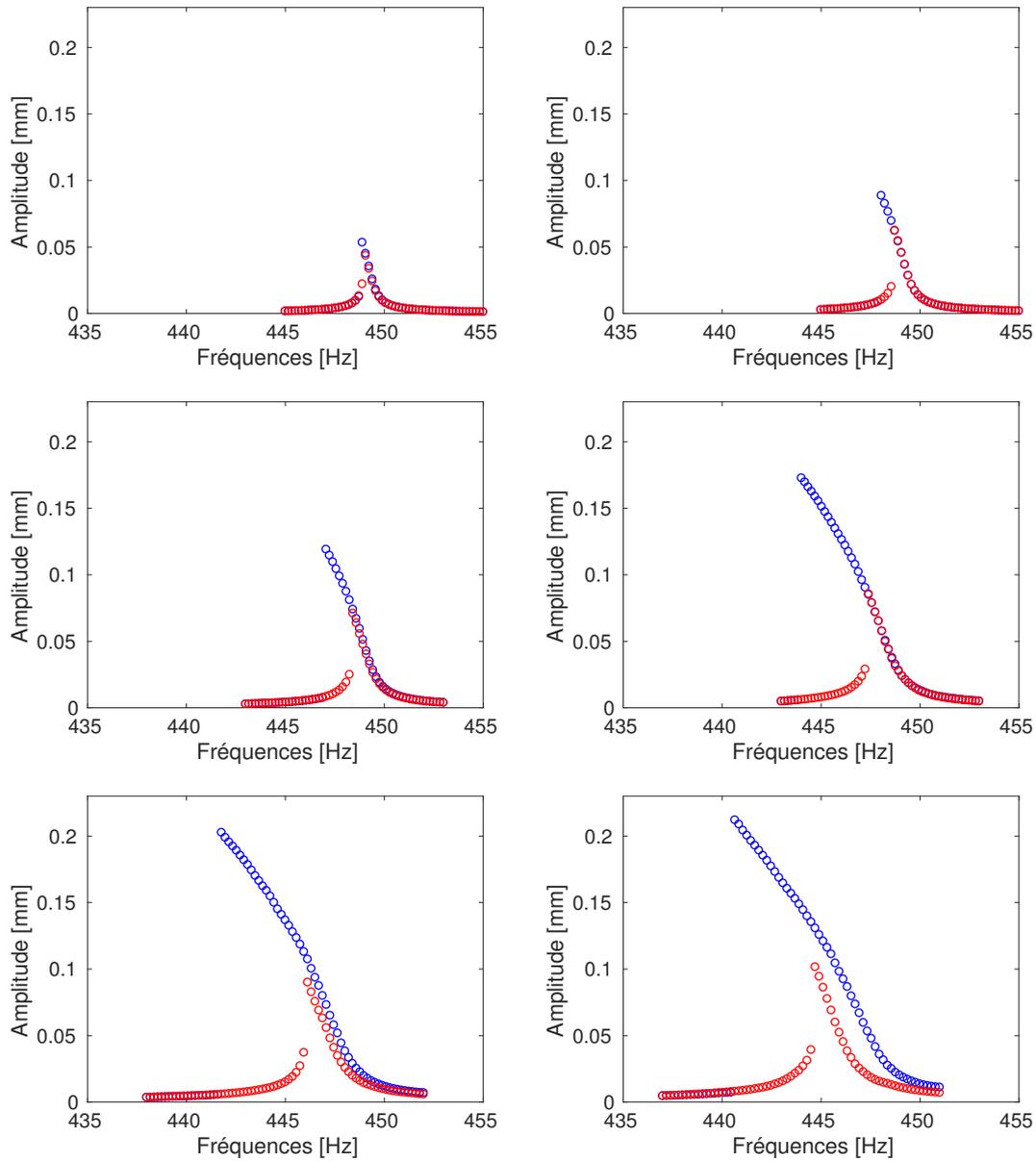


FIGURE 4.19 – Courbes de résonances non linéaires obtenues en faisant diminuer progressivement la fréquence de forçage (courbes bleues) ou en la faisant augmenter (courbes rouges). De gauche à droite et de haut en bas, l’amplitude de forçage augmente.

Ainsi, on a  $a_1 \sim 1000 \frac{h^3}{a_0^2}$ , ce qui ne remplit pas l’hypothèse, assez restrictive, de  $a_1 \sim \frac{h^3}{a_0^2}$  (dans le cas d’une coque) ou même  $a_1 \sim \frac{h^2}{a_0^2}$  (cas des plaques) utilisée dans la méthode des échelles multiples au début de ce chapitre. La méthode perturbative, qui impose l’ordre de grandeur restrictif  $a_1 \sim \frac{h^3}{a_0^2}$  au niveau *mathématique*, prédit néanmoins, dans notre cas, des comportements *expérimentaux* allant jusqu’à  $a_1 \sim h/5$ .

### 4.3 Conclusion

Un protocole expérimental complet a été présenté pour l'identification expérimentale du mode non linéaire fondamental du gong *xiaoluo*. Tout d'abord, deux éléments ont été identifiés à partir du modèle de Von Kármán effectué au Chapitre 2 :

- La présence de couplages non linéaires quadratiques et cubiques dans les équations modales du problème non linéaire brise l'invariance des modes propres du système linéaire associé. Cela peut engendrer des difficultés dans des protocoles d'identification expérimentaux car il devient difficile, à partir de ces équations seules, d'isoler des comportements dynamiques ne faisant intervenir qu'un nombre réduit de modes.
- Se pose alors le problème de la troncature du système (quels modes garder dans la modélisation ?) et de l'identification des différents coefficients de couplages associés aux modes retenus.

Ces deux difficultés sont contournées par l'emploi du formalisme des modes non linéaires, permettant de (i) construire analytiquement, par la mise sous forme normale du système dynamique, des variétés invariantes dans l'espace des phases du système non linéaire et (ii) d'effectuer des troncatures exactes dans la dynamique et d'isoler ainsi un unique mode non linéaire, comportant 2 coefficients à identifier ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , cf. Eq. (4.6)).

La mesure de la *backbone curve* du mode non linéaire fondamental ne permettant pas d'isoler ces deux coefficients, celui-ci a été caractérisé par un oscillateur de Duffing à coefficient cubique  $\Gamma_0 < 0$ . L'oscillateur de Duffing a un comportement équivalent au premier ordre au mode non linéaire fondamental, permettant de réduire le nombre de coefficients à identifier de deux à un. Il est démontré que cette équivalence au premier ordre est valable tant que l'amplitude de vibration est inférieure à un certain seuil d'amplitude respectée dans les mesures effectuées.

Dans un second temps, le mode non linéaire fondamental est identifié par la mesure de sa *backbone curve*. Le protocole utilise une boucle à verrouillage de phase, dont l'utilisation en identification non linéaire est récente d'après la littérature. Cette méthode permet de verrouiller le système sur un mode non linéaire donné en respectant un critère de quadrature de phase entre excitation et réponse de la structure. Cette étude ainsi que celle décrite dans l'article de l'Annexe D, constituent les premières applications de la boucle à verrouillage de phase pour l'identification quantifiée de modes non linéaires. La méthode est comparée à une méthode classique de mesure de *backbone curves* utilisant la mesure de plusieurs courbes de résonances non linéaires.

La limite principale des résultats exposés concerne le positionnement de l'aimant sur la structure, qui influence significativement la valeur de  $\Gamma_0$  identifiée. La position choisie pour cette étude correspond à un compromis entre :

- l'invasivité due à la masse de l'aimant lorsque celui-ci est placé sur la partie centrale de l'instrument.
- les effets thermiques dus au chauffage de l'aimant aux grandes amplitudes de forçage. Ces effets interviennent principalement lorsque l'aimant est situé loin du maximum de la déformée opérationnelle du mode à exciter et qu'il est nécessaire d'augmenter l'amplitude d'excitation pour exciter le mode concerné dans le régime non linéaire. La conséquence principale de l'augmentation de température est l'incurvation de la *backbone curve* mesurée. Ce dernier aspect sera rencontré également au chapitre suivant.

Enfin, les résultats de ce chapitre ne concernent qu'une modélisation non linéaire uni-modale ne prenant pas en compte le phénomène de résonances internes - celles-ci ont d'ailleurs été soigneusement évitées. Le chapitre suivant s'intéresse à la prise en compte de ces résonances

dans la modélisation du glissement fréquentiel du mode non linéaire fondamental.



## Chapitre 5

# Influence des résonances internes sur le glissement fréquentiel en situation de jeu

### Préambule

Ce chapitre s'inscrit dans le prolongement du Chapitre 4 et interroge la pertinence de la réduction du modèle à un mode pour décrire le glissement fréquentiel du mode fondamental en régime de jeu. Il met notamment en évidence le rôle de résonances internes quadratiques 1:2, introduites au Chapitre 2, et dont l'existence a déjà été supposée. L'étude est basée sur une étude en régime libre du mode non linéaire fondamental *seul*, dont la dynamique est isolée grâce au système de la boucle à verrouillage de phase présenté au Chapitre 4. Une deuxième étude du régime libre du mode fondamental est ensuite réalisée en régime de jeu, où des résonances internes impliquant le mode fondamental sont susceptibles de se mettre en place ; les résultats des deux études sont finalement comparés.

# Effects of internal resonances in the pitch glide of Chinese gongs

Marguerite Jossic

*Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS,  
UMR 7190 Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France\**

Vivien Denis and Olivier Thomas<sup>†</sup>

*Arts et Métiers Paristech, LSIS, UMR CNRS 7296, 8 bd. Louis XIV, 59046 Lille, France.*

Baptiste Chomette

*Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS,  
UMR 7190 Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France;*

Adrien Mamou-Mani

*Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, IRCAM, CNRS,  
UMR 9912 Science and Technology of Music and Sound lab, F-75004, Paris, France.*

David Roze

*Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, IRCAM, CNRS,  
UMR 9912 Science and Technology of Music and Sound lab, SEAM Team, F-75004, Paris, France.*

(Dated: December 15, 2017)

The framework of nonlinear normal modes gives a remarkable insight into the dynamics of nonlinear vibratory systems exhibiting distributed nonlinearities. In the case of Chinese opera gongs, geometrical nonlinearities lead to a pitch glide of several vibration modes in playing situation. This study investigates the relationship between the nonlinear normal modes formalism and the ascendant pitch glide of the fundamental mode of a xiaoluo gong. In particular, the limits of a single nonlinear mode modeling for describing the pitch glide in playing situation is investigated. For this purpose, the amplitude-frequency relationship (backbone curve) and the frequency-time dependency (pitch glide) of the fundamental nonlinear mode is measured with two excitation types, in free vibration regime: first, only the fundamental nonlinear mode is excited, by an experimental appropriation method resorting to a phase-locked loop; second, all the nonlinear modes of the instrument are excited with a mallet impact (playing situation). The results show that a single nonlinear mode modeling fails at describing the pitch glide of the instrument when played, because of the presence of 1:2 internal resonances implying the nonlinear fundamental mode and other nonlinear modes. Simulations of two nonlinear modes in 1:2 internal resonance confirm qualitatively the experimental results.

## I. INTRODUCTION

Musical instruments from the percussions family exhibit various nonlinear features which are typically those encountered in plates, shells and beams when geometrical nonlinearities are present [1]: amplitude-frequency dependence, internal resonances (strong energy coupling between modes), harmonic distortion and chaos are some typical nonlinear features that can be observed in such structures [2]. In the case of Chinese opera gongs, amplitude-frequency dependence can be considered as a true musical pattern [1]: the frequency changes as the vibration decreases, which is highlighted by a very characteristic “pitch glide” in playing situation. The pitch glide behavior can be either of softening type - frequency increases with time (*xiaoluo* gong) in free vibration - or

hardening type - frequency decreases with time (*daluo* gong) in free vibration.

Surprisingly, only four studies have been carried out about Chinese opera gongs: Rossing [3] experimentally studied the influence of radial tension or compression on the type of nonlinearity (hardening or softening). Fletcher [4] showed that the pitch glide phenomenon depends on the ratio between the thickness of the gong and the height of its central shell. Tsai *et al.* [5] performed an experimental and numerical linear analysis of a *daluo*. Jossic *et al.* [6] underlined the presence of internal resonances in the *xiaoluo* using modal active control. This small interest is all the more surprising since, as it will be shown, a single duffing oscillator is sufficient to describe the frequency-amplitude dependence; in contrast, many degree-of-freedom models are required to describe internal resonances and/or chaos phenomena which have received considerable interest in the case of gongs and cymbals [7–10] or the steelpan [11, 12].

Many previous studies on plates and shells (see *e.g.* [1, 2, 13]) have highlighted that geometrical nonlinearities lead to quadratically and/or cubically coupled modal

---

\* also at Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, IRCAM, CNRS, UMR 9912 Science and Technology of Music and Sound lab, SEAM Team, F-75004, Paris, France.

<sup>†</sup> Corresponding author; olivier.thomas@ensam.eu

equations; conversely, the linear case is characterized by uncoupled modal equations. In the nonlinear range, such couplings are responsible for the loss of the linear eigenspaces invariance property which in turn hinders finding nonlinear reduced order models. In particular, truncating directly the modal equations, i.e. keeping only one non-zero modal coordinate in the equations, may lead to erroneous results in the prediction of the nonlinearity trend [14, 15].

The concept of nonlinear modes allows to overcome some of these difficulties. The formalism relies on the normal form theory [15, 16] which enables to reduce the nonlinear dynamics to invariant manifolds in the phase space, by an asymptotic nonlinear change of variables of the initial (linear) modal coordinates. Each invariant manifold in the phase space corresponds to a *nonlinear normal mode* and is tangent to the linear corresponding eigenspace. When there is no internal resonance in the system dynamics, the behavior of the system can be described by a single nonlinear mode which is able to efficiently capture the nonlinearity trend (hardening/softening).

In this context, this paper investigates the relevance and limits of a single nonlinear mode modeling to describe the pitch glide of the fundamental mode of a *xiaoluo* gong in playing situation. In particular, one can wonder if the presence of internal resonances in these instruments [6] may impact the frequency-amplitude behavior leading to the characteristic pitch glide. For this purpose, this study compares the frequency-amplitude relationship (backbone curve) and frequency-time dependence (pitch glide) of the gong fundamental mode in free vibration in two experiments: (i) in the case of a single nonlinear mode excitation in a frequency range that avoids the appearance of internal resonances and (ii) in playing situation, where several nonlinear modes are excited and internal resonances may occur.

Two main techniques have been recently used for the measurement of backbone curves. First, the nonlinear phase resonance testing (NPR) is an extension of linear phase resonance testing [17] for nonlinear systems, and consists in (i) setting the system to a phase resonance for a given (nonlinear) mode by the mean of force appropriation [18], and (ii) turning off the excitation and measuring the free decay vibration regime. For lightly damped systems, the invariance property guarantees that the free regime stays on the conservative nonlinear mode manifold [18]. The backbone curve is then extracted from the free vibration regime using time-frequency analysis. The second and more recent technique is referred as experimental continuation, a concept that is inspired by numerical continuation methods. The first continuation technique is the control-based continuation [29][30], that uses a combination of a stabilizing feedback control and a path-following method. In the second continuation technique, which is used in this study, the tracking of the backbone is carried out in forced regime by setting the system at phase resonance using a Phase-Locked-Loop

(PLL) controller [19–22]. The forcing amplitude is set incrementally step by step and the forcing frequency is adjusted by the PLL in order to achieve the nonlinear phase resonance. The main advantage of continuation techniques is to directly obtain the backbone curve from forced regime, rather than relying on the free vibration frequency-time analysis which is performed in the NPR method.

In the first experiment, we combine nonlinear phase resonance testing and a PLL system to measure the backbone curve and the frequency-time dependence of the nonlinear fundamental mode of a *xiaoluo*. More precisely, the nonlinear mode appropriation is realized in forced regime using the PLL setup. Then, the excitation is stopped and the frequency-amplitude-time relationships are extracted from free decay, as in the nonlinear phase resonance testing. The main reason for using the free vibration regime is to avoid thermal effects that are induced by high-amplitude forced vibration at resonance. These effects will be experimentally demonstrated. Results from the first experiment are compared with estimation of the same frequency-amplitude-time curves obtained from mallet-strike excitation in the second experiment.

The paper is organized as follows: Section II provides some background on the nonlinear mode formalism and the PLL principle. Section III presents the experimental set-up for the two experiments. Measure of the backbone curve and associated thermal effects are reported in section IV. Empirical evidence of internal resonances are then presented in section V. The experimental results are qualitatively assessed by simulations. Finally, some conclusions and perspectives are given in section VI.

## II. METHODS

### A. Background on nonlinear modes

Only the main ideas are proposed here and the interested reader can refer to [21, 22] for further details. We consider the gong as an elastic shell with large amplitude vibration and thus subjected to geometrical nonlinearities. The transverse displacement  $w(\mathbf{x}, t)$  at time  $t$  and position  $\mathbf{x}$  is expanded onto a family of  $N$  eigenmodes of the linearized model:

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(\mathbf{x}) q_k(t), \quad (1)$$

where  $(\omega_k, \Phi_k(\mathbf{x}))$  are the  $k$ -th natural angular frequency and mode shape. The modal coordinates  $q_k(t)$  verify the following set of coupled nonlinear equations, for all  $k = 1, \dots, N$ :

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \sum_{i,j=1}^N \beta_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i,j,l=1}^N \gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l = 0, \quad (2)$$

where  $\beta_{ij}^k$  and  $\gamma_{ijl}^k$  are nonlinear coefficients stemming from the geometrical nonlinearities. Here, only the conservative unforced case is considered.

Using normal forms, as introduced in [14–16], it is possible to simplify model (2) by introducing the following nonlinear change of coordinates, for all  $k = 1, \dots, N$ :

$$q_k = u_k + \mathcal{P}_k^{(2)}(u_i, \dot{u}_i) + \mathcal{P}_k^{(3)}(u_i, \dot{u}_i), \quad (3)$$

where  $\mathcal{P}_k^{(p)}(u_i, \dot{u}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , is a polynomial function of  $(u_i, \dot{u}_i)$  containing monomial terms of order  $p$  only. A new dynamical system, function of the normal coordinates  $u_k(t)$ , is obtained, which has two properties: (i) it has less nonlinear coupling terms than the initial one (2) and (ii) each so-called normal oscillator is invariant if it is not involved in an internal resonance with another one. The latter property enables to associate each normal oscillator to a nonlinear normal mode (NNM) [14, 22–24]. It also means that in free vibrations, if the motion is initiated on the  $k$ -th normal oscillator, no energy is transferred to the others. In this particular case, namely if a motion on the  $i$ -th NNM is considered,  $u_j = 0, \dot{u}_j = 0, \forall j \neq i$ , the dynamics of the system is thus equivalent to:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i + \Gamma_1 u_i^3 + \Gamma_2 u_i \dot{u}_i^2 = 0, \quad (4)$$

where  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  are two coefficients depending on the nonlinear coefficients  $\beta_{ij}^k$  and  $\gamma_{ijl}^k$  of the initial dynamical system (2), that take into account the influence of other linear modes in the dynamics of the considered  $i$ -th NNM. [14].

A first order perturbation solution of (4) leads to:

$$u_i(t) = a \cos(\omega_{nl} t + \varphi), \quad (5)$$

with [14]

$$\omega_{nl} = \omega_i (1 + T a^2) \quad \text{and} \quad T = \frac{3\Gamma_1 + \Gamma_2 \omega_i^2}{8\omega_i^2}. \quad (6)$$

It shows that at first order, the oscillations of a given NNM are harmonic with a frequency  $\omega_{nl}$  that depends on the amplitude  $a$  of the motion. The so-called backbone curve is obtained by plotting  $\omega_{nl}$  as a function of  $a$  [2].

In practice, the  $T$  coefficient can be experimentally identified, but afterwards it is no longer possible to identify separately the coefficients  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ . Moreover, numerical simulations of Eq. (4), with several values of  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  that lead to the same value of  $T$ , show that for moderate amplitudes, all backbone curves are merged into a single parabola defined by Eq. (6). This result is valid for values of  $a$  corresponding to a change of frequency  $\omega_{nl}$  less than 10% [22]. Consequently, we propose to approximate the dynamics of a given NNM by a single Duffing oscillator:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i + \tilde{\Gamma}_0 u_i^3 = 0, \quad (7)$$

with

$$\tilde{\Gamma}_0 = \frac{8\omega_i^2 T}{3} = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 \omega_i^2}{3}. \quad (8)$$

In order to obtain the expression in the physical space of the NNM described in (7), we replace the expression (5) in the nonlinear change of variables (3). At first order, one obtains [22]:

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \Phi_i(\mathbf{x}) u_i(t).$$

This last equation allows to rewrite the NNM equation in the physical space:

$$\ddot{w} + \omega_i^2 w + \Gamma_0 w^3 = 0, \quad (9)$$

with:

$$\Gamma_0 = \tilde{\Gamma}_0 \Phi_i^2(\mathbf{x})$$

This last equation shows that if Eq. (9) is used for the experimental identification of the NNM, it leads to a value  $\Gamma_0$  of the nonlinear coefficient that depends on the location  $\mathbf{x}$  where the displacement  $w(\mathbf{x}, t)$  is measured. Otherwise, it is necessary to correct it by taking into account the mode shape  $\Phi_i(\mathbf{x})$  to estimate  $\tilde{\Gamma}_0$  of Eq. (7).

## B. Backbone identification

### 1. Nonlinear phase resonance testing

The rigorous formalism of NNM recalled in the previous section has recently contributed to the development of new nonlinear modal identification techniques based on backbone curve measurement. Among them, the nonlinear phase resonance method extends the concept of linear phase resonance [25] to nonlinear systems, and allows to identify single NNM. The nonlinear phase resonance procedure has been first detailed by Peeters *et al.* [18] and follows a two-step process.

First, the system is driven to a single nonlinear mode phase resonance by applying a multi-point harmonic excitation at the mode natural frequency. The quality of the nonlinear mode appropriation is theoretically guaranteed by a phase quadrature indicator, which is valid for linear systems and has been proved to be generalizable to nonlinear systems [18]. In particular, the nonlinear quadrature criterion is introduced using a multi-harmonic excitation. It is defined with respect to each harmonic that is present in the excitation and system response. When the phase resonance criteria is reached, the applied excitation compensates for the damping forces. As a result, the structure vibrates according to the NNM of the underlying conservative system.

In a second stage, the excitation is turned off and the free decay response of the NNM is measured. Due to the

invariance property of NNMs the system free vibration follows the nonlinear normal mode of the damped system. Specifically, in the case of lightly damped systems such as gongs [6], the dynamics of the damped NNM closely follows the underlying conservative NNM, whose dynamics is governed by Eq. (7). Tracking of the frequency-amplitude behavior of the free damped regime by time-frequency analysis is then performed in order to compute the backbone curve of the associated NNM.

In practice, an imperfect force appropriation resulting from a single-point mono-harmonic excitation may be sufficient for the NNM appropriation [18]. This approximation proves to be relevant as all the harmonics higher than the fundamental governing the NNM dynamics can be neglected [22]. The nonlinear phase resonance method has proved its robustness and accuracy in various experimental studies [18, 26, 27] and is therefore widely used for nonlinear modal testing. The problem of NNM appropriation in the case of internal resonances was also addressed in [28]. The principal disadvantage of the method lies in the excitation tuning: as the level of excitation energy increases, jump phenomena may occur in the system frequency response leading to a time-consuming tuning of the excitation.

## 2. Phase Locked-Loop (PLL) controller

The issue of excitation tuning has recently been overcome by experimental continuation techniques for backbone curve measurements. Among them, a major contribution have been made with the use of Phase-Locked-Loop (PLL) controllers [31]. The approach is based on the fact that phase-controlled self-excited systems do not exhibit unstable behavior of the vibration amplitude [22, 32]. More specifically, the amplitude-phase curve of single-degree-of-freedom systems is single-valued and flat near the resonance for many nonlinear systems, contrary to the traditional jump phenomenon encountered in the amplitude-phase relationship. This property remains valid as long as the frequency and amplitude ranges do not allow for internal resonances [20].

The PLL controllers are designed in order to guarantee a given phase lag between the forcing excitation of a system and a reference signal (e.g. the system response: displacement, velocity). The phase lag can be either variable or fixed. In the first configuration, the monotony of the frequency-phase relationship allows the PLL system to reconstruct the *complete* frequency-amplitude curves of a single nonlinear normal mode [19, 22]. In the second configuration, the backbone curve can be tracked in forced vibration by locking the system at the nonlinear phase resonance [20]. This latter configuration is used in the study.

The PLL controller consists in a phase detector, a PID controller and a voltage controlled oscillator (VCO) [20, 33] (see Figure 1). The overall PLL system is the same as the one previously developed in [22]. The first

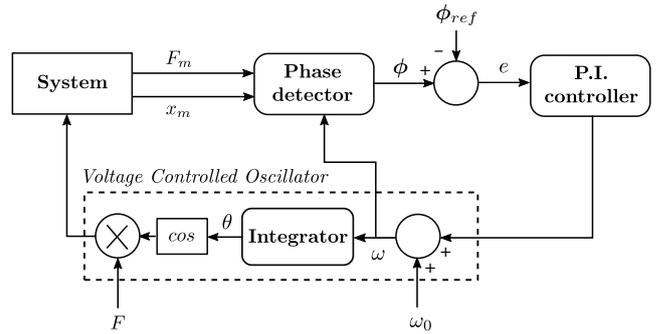


FIG. 1. Phase-Locked Loop principle. The forcing amplitude  $F$  and the phase lag  $\phi_{ref}$  are defined by the user.

step consists in choosing an initial forcing excitation amplitude  $F$ , an initial forcing frequency  $\omega_0$ , and a fixed phase lag command  $\phi_{ref}$ . The nonlinear mode response  $x_m$  is measured along with the forcing excitation  $F_m$ . The phase detector determines the phase shift  $\phi$  between  $x_m$  and  $F_m$  using a synchronous demodulation [33] that estimates the fundamental harmonic of  $x_m$  and  $F_m$  from the forcing excitation. The error  $e$  between the phase  $\phi$  and the phase command  $\phi_{ref}$  is then integrated by an integral controller which gives a correction to the initial forcing frequency  $\omega_0$ . The new forcing frequency is determined by the voltage controlled oscillator and leads to a new forcing excitation for the system. Note that the excitation amplitude  $F$  is kept constant during this process. The construction of the backbone curve is realized by iterating the process for increasing excitation amplitudes: at each amplitude step, the phase controller adjusts the excitation frequency in order to meet the phase resonance criterion  $\phi_{ref}$  (which is set to 0 or  $\pi/2$  if we measure the NNM velocity or displacement, respectively).

## C. Study protocol

Two experiments are carried out to test the validity of single NNM modeling for the description of the pitch glide in playing conditions.

The first experiment (Exp. A) measures the gong fundamental mode response in free vibration regime in the case of *single NNM excitation*. This is achieved by performing the fundamental nonlinear mode appropriation with the PLL controller. The single NNM appropriation is guaranteed by setting the initial forcing amplitude at a level that does not allow for internal resonances. For this reason, the experiment is performed over a limited frequency range ([440Hz 449Hz]). Beyond this frequency range, the frequency shift of the nonlinear normal mode allows for the appearance of 1:2 internal resonances between the nonlinear fundamental mode and other linear modes (see section V), breaking the single NNM appropriation. Once the phase resonance is achieved using the PLL controller, the excitation is shut down and the

free vibration regime of the single fundamental NNM is measured. The backbone curve and the frequency-time relationship are then extracted from the free vibration measurements.

The second experiment (Exp. B) is carried out in playing situation: the gong is struck with various mallet impacts. The pitch glide and the backbone curve of the fundamental nonlinear mode are extracted from the free vibration data, and compared to the results of Exp. A.

In both experiments, frequency-time post-processing is performed to extract the amplitude-frequency curve (backbone curve) and the frequency-time curve (pitch glide) from the fundamental free vibration regime. The measurement of the backbone curve in the free vibration regime using the PLL set-up set the first experiment (Exp. A) a bit apart from the previous PLL backbone curve measurements [20, 22] where the backbone curves were measured in forced regime. This *a priori* choice avoids thermal effects evidenced in section IV C. The details about the two experiments are given in the next section.

### III. SET-UP

The setup of Exp. A is displayed in Figure 2. The chinese gong ( $\sim 221$  mm large and  $\sim 1$  mm thick) is excited with a home made coil-magnet system fully described in [35] (Figure 3a) preceded by a power amplifier (B&K 2719). The magnet is located on the edge of the gong central area in order to (i) provide an efficient excitation of the fundamental mode located in the center of the instrument [6] and (ii) minimize the change of the fundamental mode frequency stemming from the added mass of the magnet. The excitation force is proportional to the current in the coil and is measured by a current clamp. In order to keep the same instrumentation in both experiments, the accelerometer used in Exp. B is also taped on the back of the instrument, co-localized with the magnet (Figure 3b). The velocity is measured by a laser vibrometer (Polytec PSV-400) at the same location as the accelerometer, so that the instrument responses can be compared between the two experiments. The PLL control diagram is implemented using Matlab/Simulink, and the overall phase control is driven by a DSpace MicroLabBox working at 10000 Hz. First, the system is set at phase resonance using the PLL controller. This is done by setting a relatively high excitation amplitude, and waiting for the PLL to adjust the forcing frequency in order to meet the resonance phase criterion  $\phi_{ref}$ . As we measure the nonlinear fundamental mode velocity,  $\phi_{ref} = 0$ . Then, the excitation is stopped, and the free decay vibration of the fundamental mode is measured. The backbone curve and the frequency-time dependency are extracted from the vibrometer data spectrograms.

The Exp. B set-up is represented in Figure 4. The gong is struck with various impact forces and impact

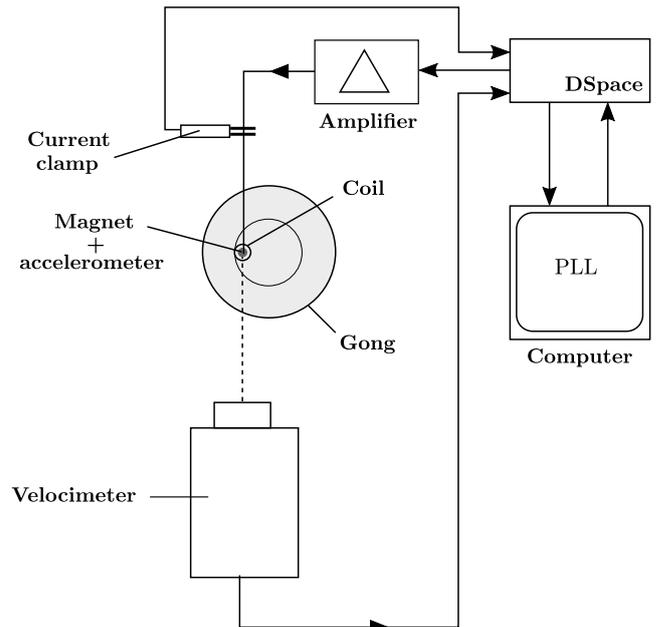


FIG. 2. Set up for Exp. A. (PLL measurements, single nonlinear mode excited).

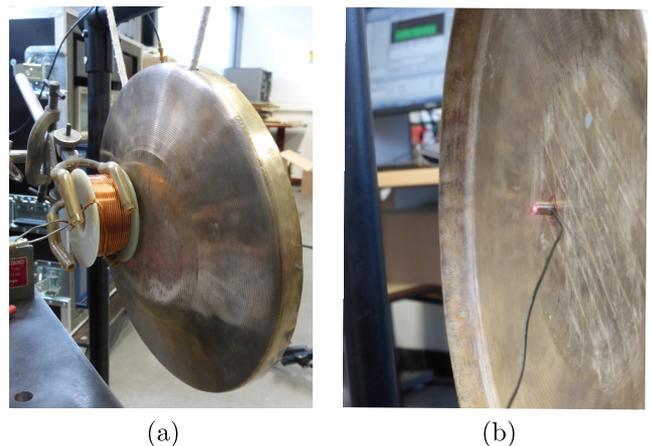


FIG. 3. Instrumentation of the gong. (a) Front of the *xiaoluo* gong with magnet-coil system. (b) Back of the gong with the accelerometer co-localized with the laser vibrometer.

locations using a mallet. The nonlinear normal mode acceleration is measured with the accelerometer (B&K 4374) pictured in Figure 3b. The use of an accelerometer for Exp. B is mandatory since the movements of the instrument prevents the vibrometer from correctly measuring the system velocity. Another accelerometer (B&K 4374) is taped to the mallet stick (Figure 5a) and is calibrated in order to recover the impact force. The calibration is realized by measuring the impact force of 50 mallet strikes on a PCB 208C02 force sensor (Figure 5b). The ratio between the force sensor and the accelerometer signals corresponding to an equivalent mass revealed to

be approximately constant ( $\sim 3$  kg) whatever the mallet impact force amplitude.

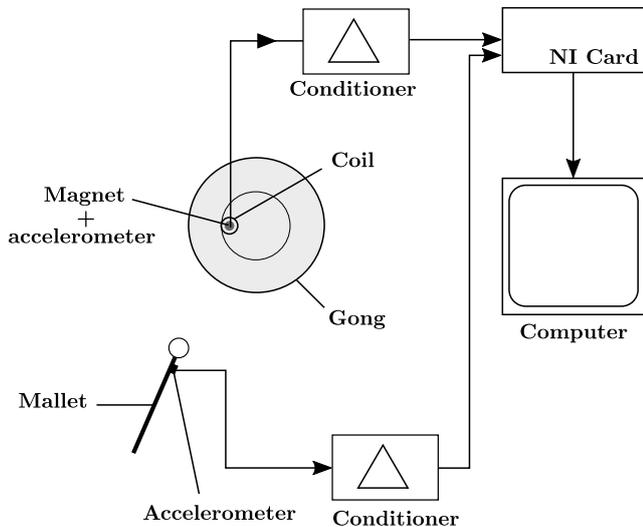


FIG. 4. Set up for Exp. B (mallet measurements, several nonlinear modes excited).



(a)

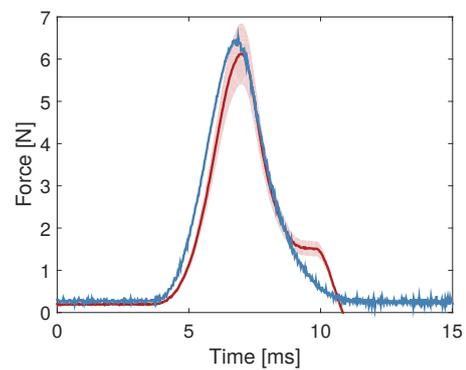


(b)

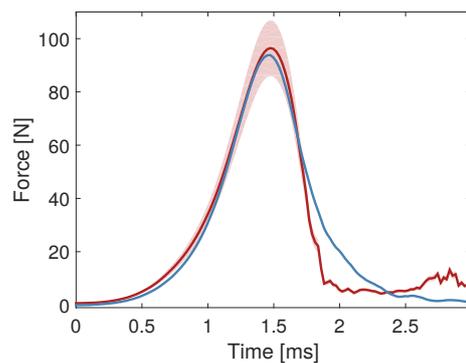
FIG. 5. Instrumentation for mallet calibration: (a) mallet instrumented with an accelerometer and (b) force sensor.

The mean of the equivalent mass measured for all the different mallet impacts is used to recover the impact force from the mallet accelerometer signal. This is exemplified in Figure 6, where the impact force measured by the force sensor (blue line) is compared to the reconstructed force obtained by the accelerometer signal

multiplied by the mean equivalent mass (red line). The pale red area represents the standard deviation of the reconstructed force due to the standard deviation of the equivalent mass calculation. Note that the impact force is included in the standard deviation of the reconstruction force, for both small value ( $\sim 7$ N) and high value ( $\sim 100$ N).



(a)



(b)

FIG. 6. Results of mallet calibration. Measured force (blue line) and reconstructed force (red line) are compared. Pale red area represents the standard deviation of the reconstructed force. (a) Low energy mallet strike ( $\sim 6$ N) (b) High energy mallet strike ( $\sim 95$ N).

The main parameters of Exp. A and Exp. B are summarized in Table I.

Experiment	A	B
Excitation type	Forcing excitation	Impulse
Excitation system	Coil-magnet system	Mallet
Numb. of modes excited	$n = 1$	$n > 1$
Response measurement	Vibrometer	Accelerometer

TABLE I. Summary of the excitation characteristics, the number of modes excited and the nonlinear mode response measurement for Exp. A and Exp. B.

## IV. RESULTS: PITCH GLIDE AND NONLINEAR MODE IDENTIFICATION

### A. Pitch glide of the fundamental mode

The pitch glide of the gong fundamental mode is highlighted in playing situation by striking the instrument with increasing mallet forces (Exp. B). Figure 7 shows four spectrograms of the accelerometer signal for increasing mallet impact forces  $F$  ( $F = 8\text{N}$ ,  $F = 13\text{N}$ ,  $F = 16\text{N}$ ,  $F = 32\text{N}$ ). These spectrograms highlight two points. First, one can see that the frequency-time dependence of the fundamental mode (around 450 Hz, black solid line in Figure 7), which is absent from the instrument response for a small impact force ( $F = 8\text{N}$ ), starts to appear from  $F = 13\text{N}$ , and gets wider as the impact force increases. The change of frequency versus time is directly related to the combination of the frequency-amplitude phenomenon due to geometrical nonlinearities and the damping of the system. It is also responsible for the characteristic “pitch glide” one can hear when the instrument is played. The frequency-amplitude behavior of the nonlinear mode associated to the fundamental mode is measured by Exp. A and the associated results will be exposed in section IV B.

Second, the frequency of second harmonic distortion around 900 Hz, black dotted line in Figure 7) which is twice the one of the fundamental mode, glides also upward and goes through two other linear modes at 859 Hz and 880 Hz (displayed in red dot lines in Figure 7). The experimental operational deflection shapes of the fundamental mode and these two modes were recorded from a modal analysis performed with the vibrometer used in section III, and are shown in Figure 8. This suggests the presence of an 1:2 internal resonance ( $f_2 = 2f_1$ ) between the fundamental mode and the other linear modes. The effects of these internal resonances will be further exposed in section V.

### B. Nonlinear mode identification

For experiments A and B, the backbone curves (amplitude-frequency relationship) of the NNM were extracted from the spectrogram of the free vibration regime. The (amplitude, frequency) couple of the NNM is obtained as follow: for each time, the amplitude is estimated by taking the maximum amplitude of the spectrogram in the frequency window [400 500] Hz around the fundamental harmonics of the signal, corrected by taking into account the length of the time window of the short time Fourier transform; the corresponding instantaneous frequency is then taken as equal to the window maximum frequency.

Computing the spectrogram was done from vibrometer data in the case of Exp. A, and from accelerometer data for Exp. B. The resulting velocity and acceleration backbone curves were then divided once or twice by the

frequency axis, respectively, in order to obtain the backbone curves in displacement (Figure 9). The backbone curve corresponding to Exp. A is plotted along with a standard deviation which corresponds to the standard deviation of five other PLL backbone curves measured at different times during the experimental process. Figure 9 shows that the values of the backbone curve measured in Exp. B are contained in the standard deviation of the backbone curves measured in Exp. A. This result highlights that, in a few Hertz frequency range around the modal frequency, the fundamental nonlinear mode is able to describe the frequency-amplitude behavior of the *xiaoluo* in free vibration regime. This result also demonstrates the link between the fundamental pitch glide in Chinese gongs and the nonlinearity trend of the associated nonlinear mode. This latter fact is an important result since this link has never been rigorously demonstrated in the literature on Chinese opera gongs.

The nonlinear coefficient  $\Gamma_0$  of the nonlinear mode characterized by Eq. (9) can also be identified using a second order polynomial fit of the frequency-amplitude relationship (see Eq. (6)). The result of the polynomial fit is represented with a red dot line in Figure 9. The estimation of  $\Gamma_0$  gives:

$$\Gamma_0 = -8.1 \cdot 10^7 \text{ mm}^{-2}\text{s}^{-2}.$$

Notice that, as explained at the end of section II A, the above value of  $\Gamma_0$  depends on the measuring point, here at the edge of the gong central area.

### C. Thermal effects in the coil-magnet system

This section underlines the thermo-mechanical effects encountered in the experiments when measuring the backbone curves with the PLL set-up. These thermal effects made the backbone curve measurements delicate and justify that the measures were performed in free vibration regime instead of forced regime, as explained in the protocol (see section II C). The main drawbacks of PLL backbone curve measurements in forced vibration is that the process is longer than in free vibration ( $\sim 3$  minutes in forced regime versus  $\sim 30$  seconds in free vibration). As a consequence, the coil-magnet system, which is used during the whole experiment, is more likely to heat-up. This is illustrated in Figure 10, where three different backbone curves have been measured at different amplitudes. Each plot corresponds to a two step experiment: first, the backbone curve is measured in forced vibration until a maximum forcing amplitude (black solid line). Second, the forcing excitation is stopped and the system goes back to zero following the damped nonlinear normal mode. As the backbone curve corresponds to the locus of phase resonance, the frequency-amplitude curves obtained in the two steps should be the same. However, one can see that it is not always the case. For small vibration backbone curves, the two curves are identical

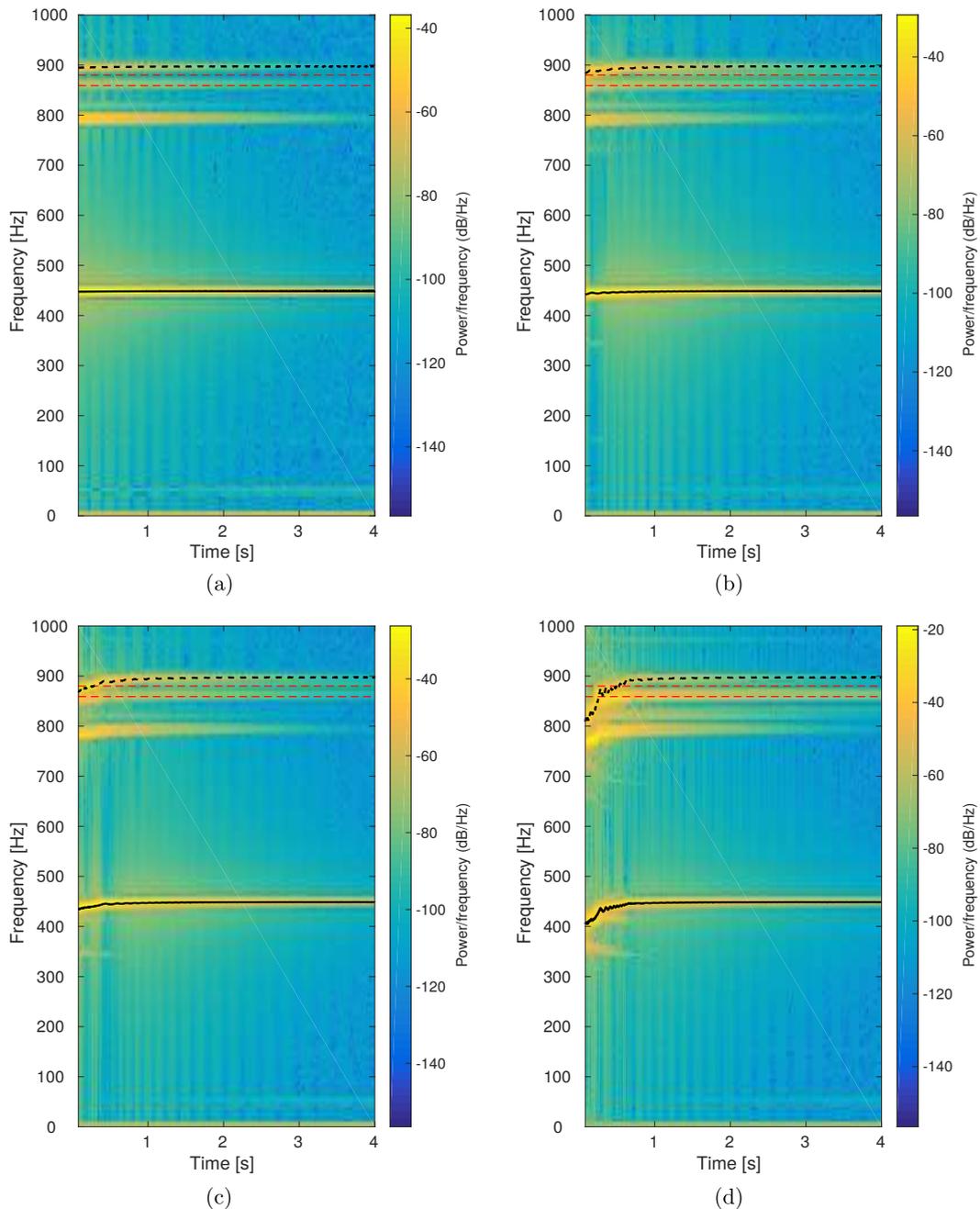


FIG. 7. Spectrograms of the accelerometer signal, for increasing mallet impact forces  $F$ . The instantaneous frequency of the fundamental mode acceleration (experimental, bold dark line), its quadratic harmonic distortion (dash dark line, plotted by multiplying by two the frequency of the fundamental), and the modes at 859 Hz and 880 Hz which are supposed linear (theoretical, dashed red lines), are also plotted for easy readability. (a)  $F = 8\text{N}$  (b)  $F = 13\text{N}$  (c)  $F = 16\text{N}$  (d)  $F = 32\text{N}$ .

(Figure 10a). If the maximum amplitude of the backbone curve is increased, one can see that the frequency-amplitude curves are not the same in forced regime and in free vibration regime (Figure 10b and 10c). The higher the backbone amplitude, the greater the frequency shift between the two curves.

The frequency shift can be assessed by exciting the system with a fixed excitation amplitude, and measuring the temporal evolution of the frequency of the fundamental nonlinear mode - which corresponds to the frequency  $\omega$  in the PLL diagram in Figure 1. Results show that the frequency increases with time (Figure 11) which confirmed

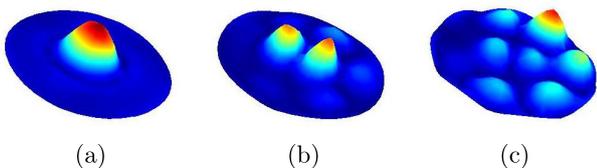


FIG. 8. Experimental operational deflection shapes of the linear modes involved in a 1:2 internal resonance. (a) Mode 1: axisymmetric mode (0,1) at 447 Hz. (b) Mode 2: asymmetric mode (1,1) at 859 Hz. (c) Mode 3: asymmetric mode (7,1) at 880 Hz.

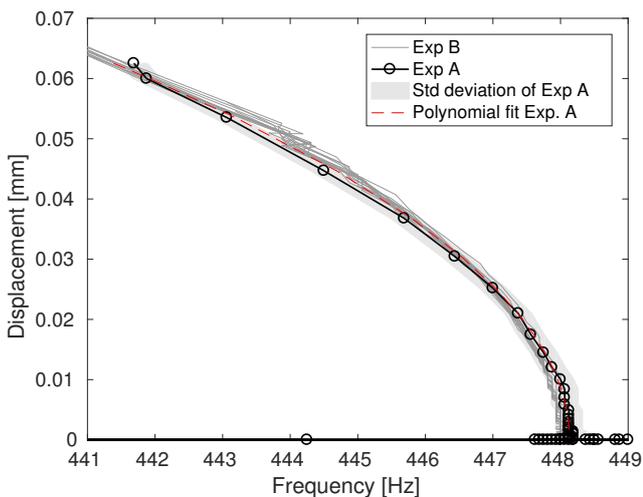


FIG. 9. Backbone curves of the fundamental nonlinear mode obtained from the free vibration regime in Exp. A (PLL system, black circles) and in Exp. B (mallet strikes, 15 data sets, grey lines). The standard deviation of Exp. A is indicated with a gray area. The polynomial fit performed on the backbone curve of Exp. A is also represented with a red dot line.

what has been observed in Figure 10: the longer the excitation, the larger the frequency shift between forced and free regime.

This frequency shift is interpreted by the heating of the magnet as the duration or the amplitude of the excitation increases. This hypothesis is confirmed by studying numerically the influence of a local temperature increase on modal frequencies of a shallow spherical shell using finite element analysis. We assume that the conical edge of the gong imposes a nearly rigid boundary condition to the central vibrating section [4]. Consequently, we consider a clamped spherical shell of thickness  $h$ , diameter  $D = 116$  mm, and slope at the edge  $\psi$  (Figure 12a). The finite element code Cast3M [36] is used with a thermo-mechanical conduction model discretized by COQ3 elements (6 degrees-of-freedom for rotation and translation, and 1 thermal degree-of-freedom). The mechanical characteristics are those of the bronze: Young modulus  $E = 110 \cdot 10^9$  Pa, Poisson's ratio  $\nu = 0.34$ , den-

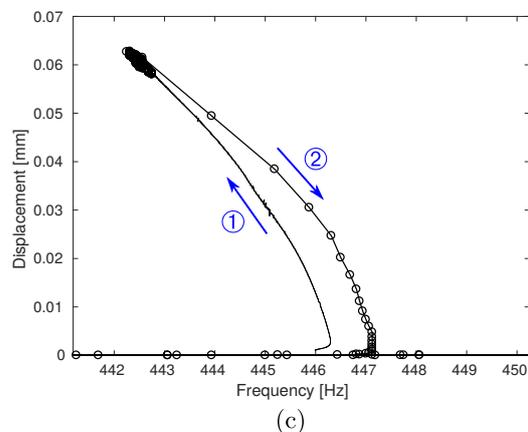
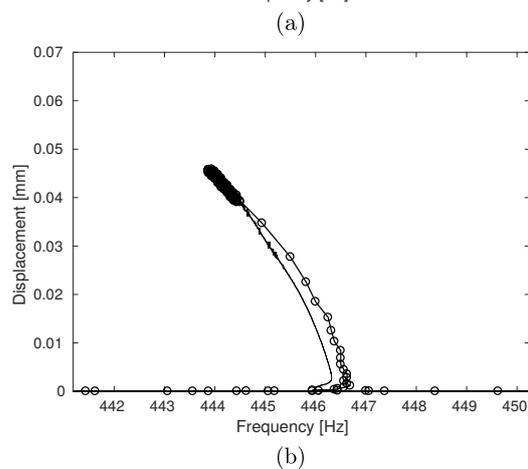
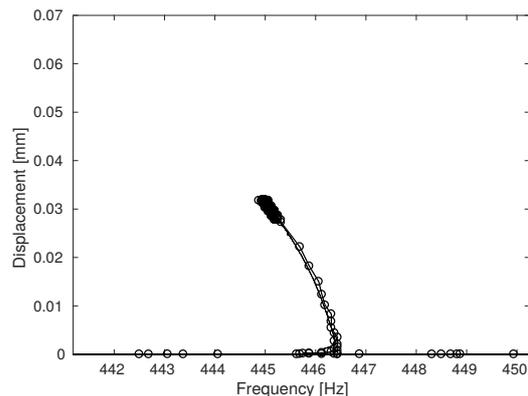


FIG. 10. Backbone curves obtained successively with the PLL setup in forced regime (black solid line, step ①) and in free regime (black circles, step ②), for increasing amplitude levels.

sity  $\rho = 8560$  kg.m<sup>-3</sup>, coefficient of thermal expansion  $\delta = 1.6 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup> and thermal conductivity  $K = 3.8$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. The temperature of the shell edges  $T_e$  is set constant with  $T_e = 20^\circ\text{C}$ . Various temperatures  $T_c$  ranging from  $T_c = 20^\circ\text{C}$  to  $T_c = 22.1^\circ\text{C}$  are imposed at the center of the shell.

The results for  $h = 0.95$ mm are exposed in Figure

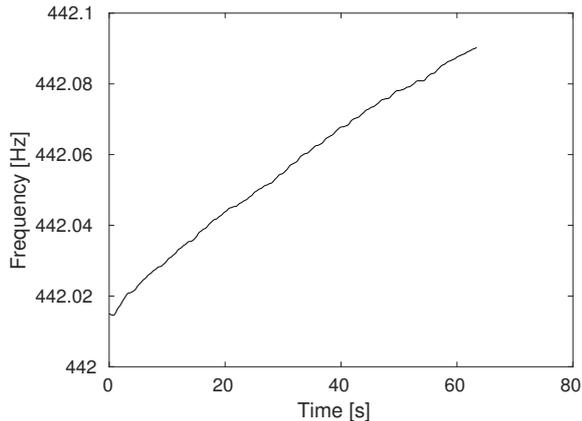


FIG. 11. Temporal evolution of the fundamental mode frequency when forcing the gong with a constant amplitude level 3, 1 A.

12b. The increase of the central section temperature results in a change of the fundamental mode frequency  $f_1$  that depends on the angle  $\psi$ . For plates and low curvature shells ( $\psi < 1.4$  deg), the fundamental frequency decreases with a temperature increase ( $\Delta f_1 < 0$ ). In this case, the temperature increase leads to a dilatation of the mean surface of the shell that is blocked by the clamped boundary conditions, resulting in a decreasing of the linear stiffness of the shell (a softening effect), and consequently of the fundamental frequency. For more curved shells, with  $\psi > 1.4$  deg, the dilatation leads to a deformation of the shell that increases its curvature, which has a stiffening effect, larger than the above cited softening effect. As a result, the fundamental frequency increases ( $\Delta f_1 > 0$ ). Other simulations with several shell thicknesses  $h$  have been carried out, leading in each case to a limit value of  $\psi$ , that depends on  $h$ .

In the present case of the *xiaoluo* gong, the temperature increase has a stiffening effect (Figs. 10, 11), whereas for a less curved *dalu* gong tested in [22], a softening effect has been noticed. Those results are fully consistent with the above numerical study.

## V. EFFECTS OF INTERNAL RESONANCES

### A. Frequency-time analysis

Internal resonances are energy exchanges that occur between modes that are strongly coupled by geometrical nonlinearities [2]. They have been reported in numerous studies that concern the nonlinear behavior of beams [34], plates [35], shells [13] and even other percussion instruments like large chinese tam-tams [10] and steel pans [12]. In the case of the chinese opera gongs, internal resonances have already been demonstrated using modal active control [6].

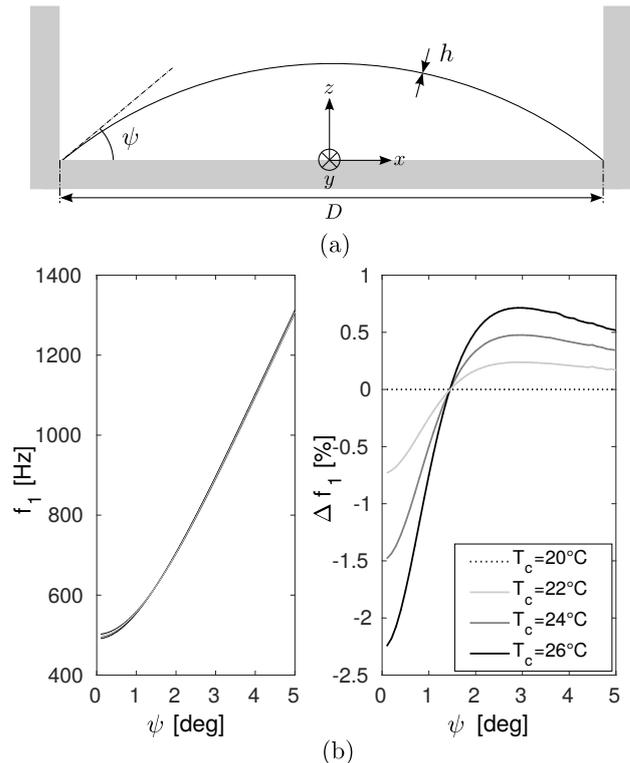


FIG. 12. Evolution of mode 1 frequency of a clamped spherical shell for a central temperature  $T_c$  ranging from 20°C to 26°C and a slope  $\psi$  ranging from 0.1° to 5°. (a) Parameters of the clamped spherical shell. (b) Frequency  $f_1$  (left) and relative frequency variation  $\Delta f_1$  (right) of mode 1 as a function of slope  $\psi$ .

As noticed in section IV A, Figure 7 suggests the presence of a 1:2 internal resonance between mode 1 whose frequency  $f_1$  is such that  $f_1(t) \in [380 \text{ Hz } 447 \text{ Hz}]$ , and modes 2 and 3 at  $f_2 = 859 \text{ Hz}$  and  $f_2 = 880 \text{ Hz}$ . For relatively small impact forces, the pitch glide is not so important but it is sufficient to make the second harmonic distortion reach the linear mode at 880 Hz (Figure 7b). As a result, a 1:2 internal resonance takes place between the fundamental mode and the mode at 880 Hz, and small frequency oscillations appear in both the fundamental mode and the second harmonic distortion. For high mallet momentum (Figure 7c and 7d), the fundamental pitch glide is larger and a 1:2 internal resonance also takes place between the fundamental mode and the mode at 859 Hz. Note that the frequency oscillations are initiated in the fundamental mode when the frequency of the second harmonic distortion (black dot line) is equal to the frequency of the linear mode (red dot line) - the synchronization of these two events is clearly highlighted in Figure 7d. The frequency beats are more evident by only looking at the time evolution of the fundamental mode frequency (Figure 13) of the spectrograms displayed in Figure 7. When the frequency range of mode 1 is large

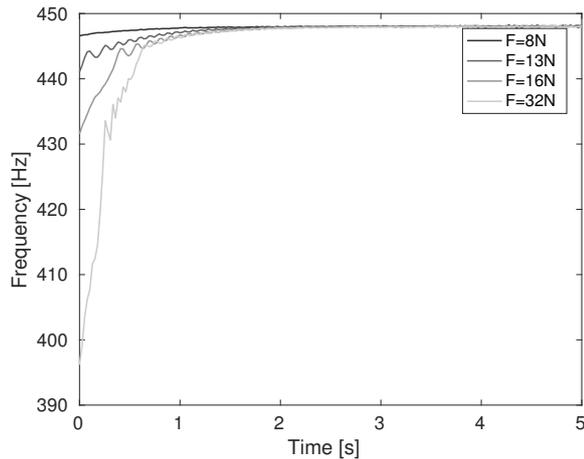


FIG. 13. Instantaneous frequency of the fundamental mode of the signals whose spectrograms are displayed in Figure 7.

- that is, when the impact force is sufficiently high - frequency beats occur when the upward pitch glide reaches  $f_1 \sim 430$  Hz (impact force: 32N) and  $f_1 \sim 440$  Hz (impact forces: 13N, 16N and 32N). These frequency values are exactly half the frequency values of modes 2 and 3.

Strikingly, this result is observed regardless of the impact force, providing that it allows a pitch glide in the range [460Hz 449Hz]. If the fundamental pitch glide of the mallet strikes performed in Exp. B (Figure 14a) are selected in the PLL frequency range [443 Hz - 449 Hz] (Figure 14b), and are then time-synchronized and merged (Figure 14c), then perfect synchronous frequency oscillations can be observed between them. Figure 14c also shows the frequency glide of the same nonlinear mode in the case of Exp. A (single nonlinear mode excitation, solid black line). Contrary to the playing situation of Exp. B., the frequency-time dependence of the fundamental mode in Exp. A does not display any frequency oscillations. This last result clearly highlights the limitation of a single nonlinear mode modeling for the description of the frequency-time dependency (pitch glide) in playing situation.

## B. Simulations

The effect of internal resonances on the pitch glide are qualitatively investigated using a simulation of a two degree-of-freedom system coupled with quadratic nonlinear terms. A cubic term is added to the first oscillator in order to reproduce the pitch glide phenomenon. The normal form of a two degree-of-freedom system with a 1:2 internal resonance ( $\omega_2 = 2\omega_1$ ) is [13]:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{u}_1 + \omega_1^2u_1 + \Gamma_0u_1^3 + \alpha u_1u_2 &= 0 \\ \ddot{u}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{u}_2 + \omega_2^2u_2 + \beta u_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

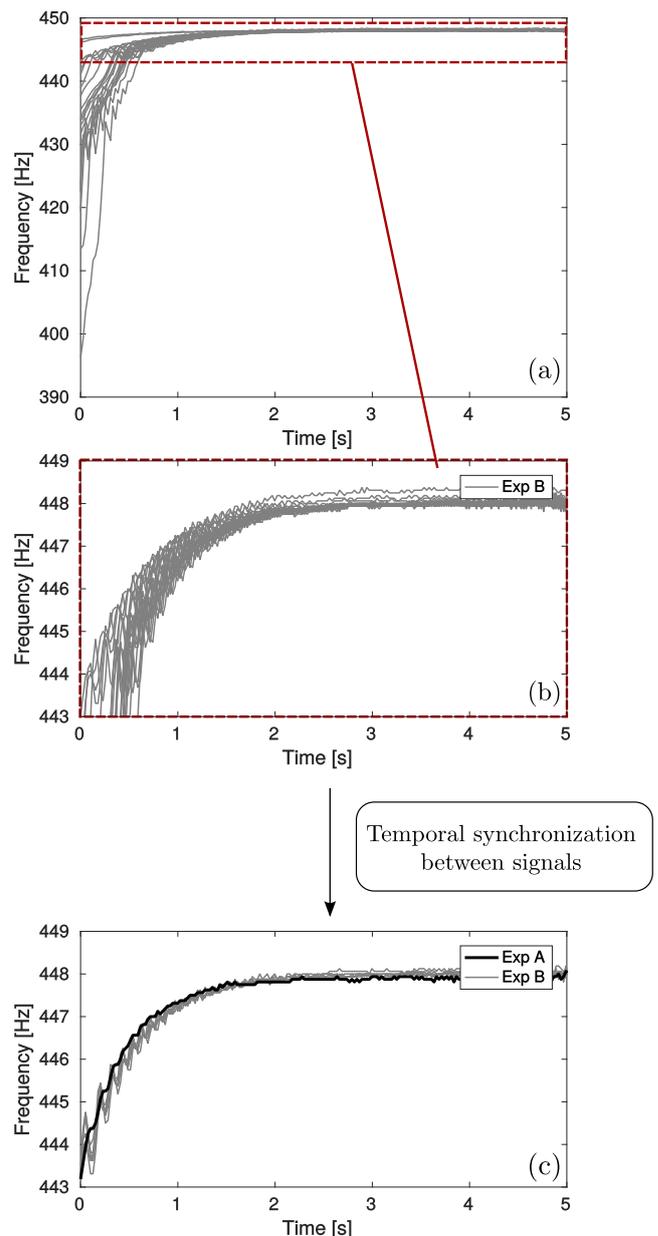


FIG. 14. (a) Pitch glides of the fundamental mode for the mallet strikes performed in Exp. B. (b) Selection of the pitch glides in the frequency range [443 Hz - 449 Hz] (c) Results of the temporal synchronization of the pitch glides displayed in (b). The nonlinear mode pitch glide of Exp. A (single nonlinear mode excitation, black line) is also plotted.

This two degree of freedom system aims at reproducing the 1:2 internal resonance between mode 1 and mode 2. The second 1:2 internal resonance reported in the previous section and implying mode 1 and mode 3 is not considered here for the sake of simplicity. The first oscillator corresponds to a nonlinear normal mode (Eq. (7))

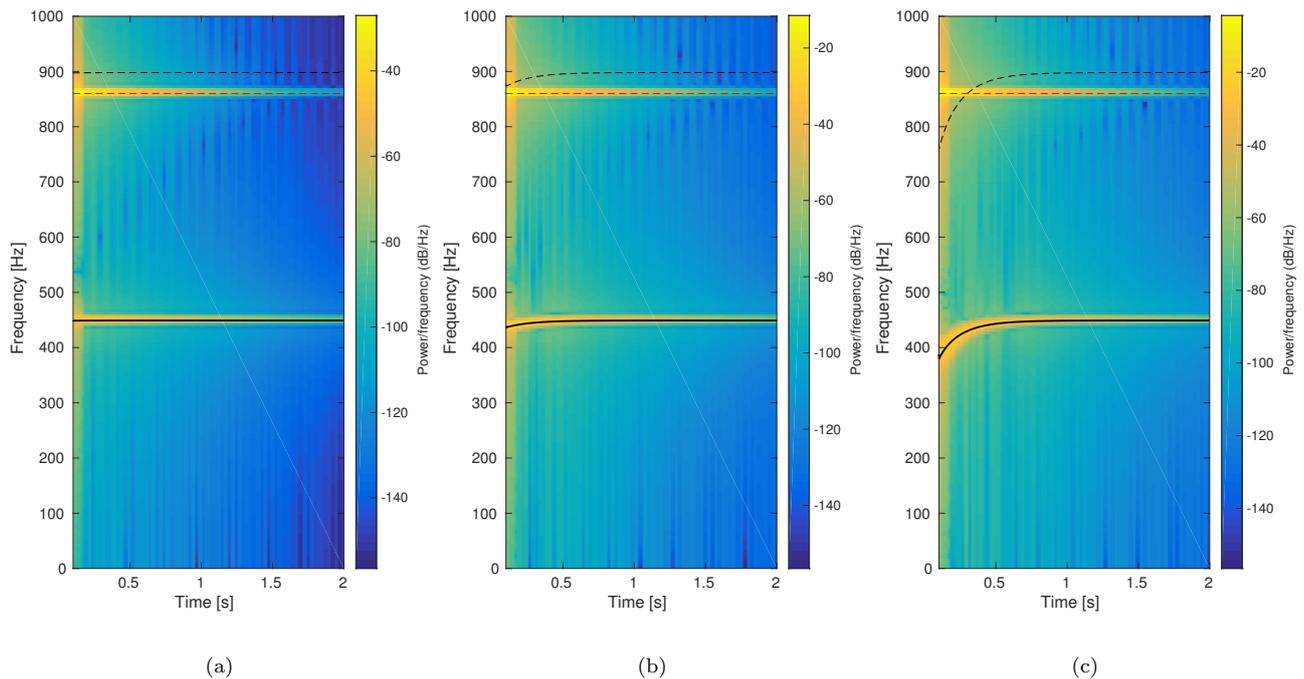


FIG. 15. Spectrograms of the simulated displacement  $u_1 + u_2$ , along with the instantaneous frequency of mode 1 (solid black line) and mode 2 (dash red line), and the quadratic harmonic distortion of mode 1 (black dash line, plotted by multiplying by two the frequency of mode 1). For all the spectrograms no coupling is present ( $\alpha = \beta = 0$ ) and  $x_{20} = 5 \cdot x_{10}$ . (a)  $x_{10} = 0.05$  mm (b)  $x_{10} = 0.30$  mm (c)  $x_{10} = 0.68$  mm.

with an added resonant quadratic coupling term. The second oscillator does not have any cubic nonlinear term because the frequency of mode 2 barely moves, as depicted in the experimental spectrograms (Figure 7). The two quadratic coupling terms correspond to the resonant terms that can not be canceled by the nonlinear change of variables (Eq. (3)) leading to the normal form. All other quadratic nonlinear terms have been canceled as they are non resonant: they do not drive one of the oscillators close to its resonance and are therefore not important in the system dynamics.

The simulation parameters are:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2\pi \cdot 447 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ \omega_2 &= 2\pi \cdot 859 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ \xi_1 &= \xi_2 = 10^{-3} \\ \Gamma_0 &= -6.7 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-2}\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

The value of the linear parameters  $\xi_1$  is extracted from a previous study [6]. The value of  $\Gamma_0$  is estimated by measuring the backbone curve with the vibrometer pointing at the center of the instrument. This measure leads to a value of  $\Gamma_0$  which is different from the value measured in section IV B, as explained at the end of section II A. The nonlinear quadratic coefficients  $\alpha$  and  $\beta$  are not known *a priori*. An extensive study of the influence of  $\alpha$  and

$\beta$  would be too consequent, but some interesting values can be extracted in order to assess their influence on the system dynamics (10). When  $\alpha = \beta = 0$ , no nonlinear coupling is present between the two oscillators, and the system dynamics follows the traditional Duffing response. This is confirmed by looking at the spectrograms of the simulated displacement  $u_1 + u_2$  in Figure 15.

The influence of the nonlinear parameter  $\alpha$  is investigated while keeping the nonlinear parameter  $\beta$  to zero. If  $\alpha < 10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ , no influence on the pitch glide is observed. In Figure 16, the spectrogram of the simulated displacement  $u_1 + u_2$  is plotted for increasing values of  $\alpha$  in high vibration amplitude (pitch glide range  $\sim 50$  Hz). One can see that increasing the  $\alpha$  parameter leads to a slope discontinuity in the pitch glide of the fundamental mode, as noticed in the experimental results in Figure 6 and 7. The effect of the change of the  $\beta$  parameter is illustrated in Figure 17, where spectrograms of the system response for increasing  $\beta$  values are displayed. The first direct effect of the  $\beta$  term is to change the behavior of the second oscillator with the source term  $\beta u_1^2$ . The modification of the second oscillator causes a second effect by modifying the first oscillator response with the term  $\alpha u_1 u_2$ . The greater  $\beta$  is, the greater are the energy exchanges between the two oscillators (Figure 17c).

However, an excessive increase of  $\beta$  also leads to a complex response in the second oscillator, which is not the

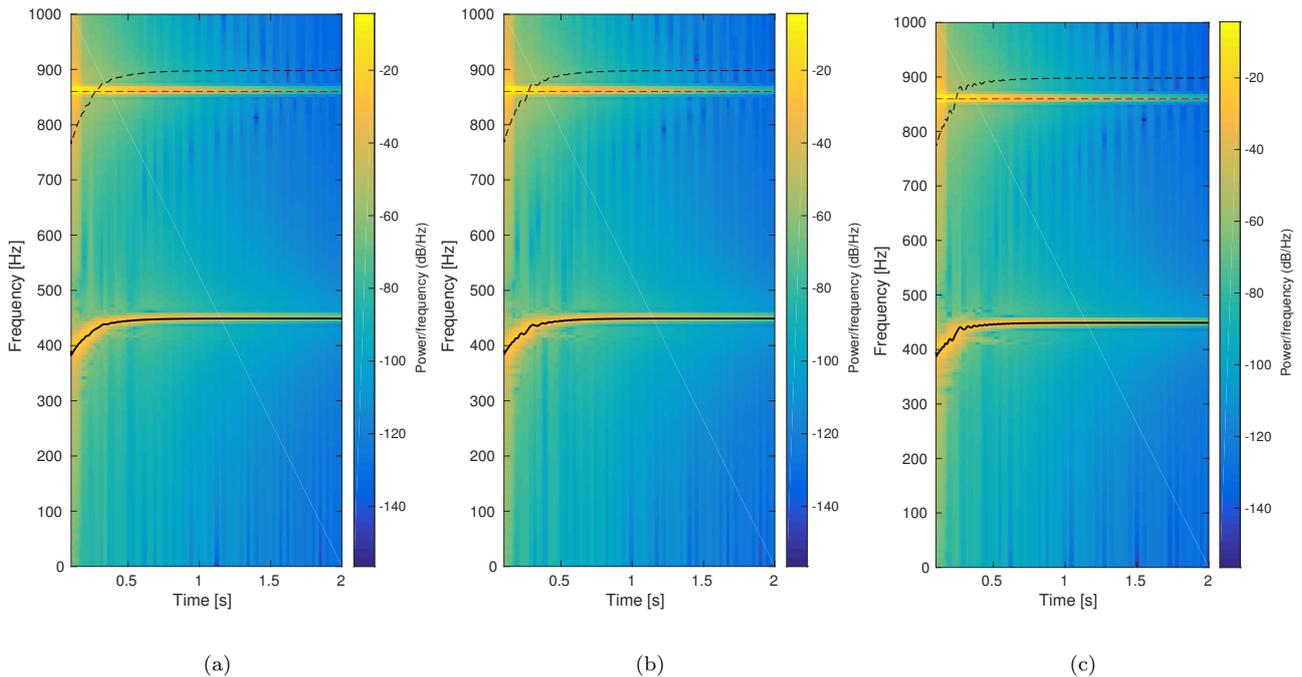


FIG. 16. Spectrograms of the simulated displacement  $u_1 + u_2$  for increasing  $\alpha$  values, with parameters  $\beta = 0 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ ,  $x_{10} = 0.68 \text{ mm}$  and  $x_{20} = 5 \times x_{10}$ . (a)  $\alpha = 3 \cdot 10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$  (b)  $\alpha = 5 \cdot 10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$  (c)  $\alpha = 8 \cdot 10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ . Legend is the same as in Figure 15.

case in the experiments (see Figure 7d).

Figure 18 shows a qualitative correct choice of  $\alpha$  and  $\beta$  for the description of the experimental results:  $\alpha = 8 \cdot 10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$  and  $\beta = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ . Note that this choice has been empirically identified, and reproduce the experimental results only qualitatively - for example, the temporal duration of the pitch glide in the experiments (Figure 7) and in the simulations (Figure 18) differs by a factor of 4. However, these simulations are able to reproduce the slope discontinuity as well as the oscillations in the pitch glide. Moreover, note that the oscillations start when the frequency of the second harmonic distortion is equal to the frequency of the mode at 860 Hz. This decisively points out the role of internal resonances in the pitch glide of the gong fundamental mode.

## VI. CONCLUSION

This paper investigates a reduced order model for the description of the fundamental pitch glide of a Chinese opera gong displaying an ascendant pitch glide. The study relies on the nonlinear modes formalism and the measure of the backbone curve and frequency-time relationship of the fundamental nonlinear mode, in free vibration regime. Two experiments were carried out. The first experiment (Exp. A) investigated a single nonlinear mode modeling by measuring the backbone curve and the

frequency-time dependency of the fundamental nonlinear mode *alone*, with no other nonlinear modes excited during the experiment. The experimental and original protocol combines the use of PLL set-up which is traditionally performed in forced vibration, and free decay vibration on a nonlinear mode manifold, which is the main idea of nonlinear phase resonance testing. The second experiment (Exp. B) performed the same measurements than the first experiment, this time by striking the gong with a mallet, allowing for a multi-modal excitation that leads to internal resonances between the nonlinear fundamental mode and higher frequency modes.

The comparison of the two experiments' results show that (i) in a small frequency range around the fundamental modal frequency ( $\sim 447 \text{ Hz}$ ), the single nonlinear mode model is able to reproduce the frequency-amplitude dependency (*i.e.* the pitch glide) of the fundamental mode in playing situation; (ii) the frequency-time analysis of the fundamental nonlinear mode reveals that internal resonances appear between the fundamental mode and other linear modes. These internal resonances happen when the frequency of the fundamental mode, gliding upward, is the half of the frequency of two other linear modes at 859 Hz and 880 Hz. The energy exchanges inherent to these resonances are highlighted by frequency beats in the fundamental mode pitch glide. This latter result was qualitatively demonstrated by simulating a quadratically coupled two-degree-of-freedom sys-

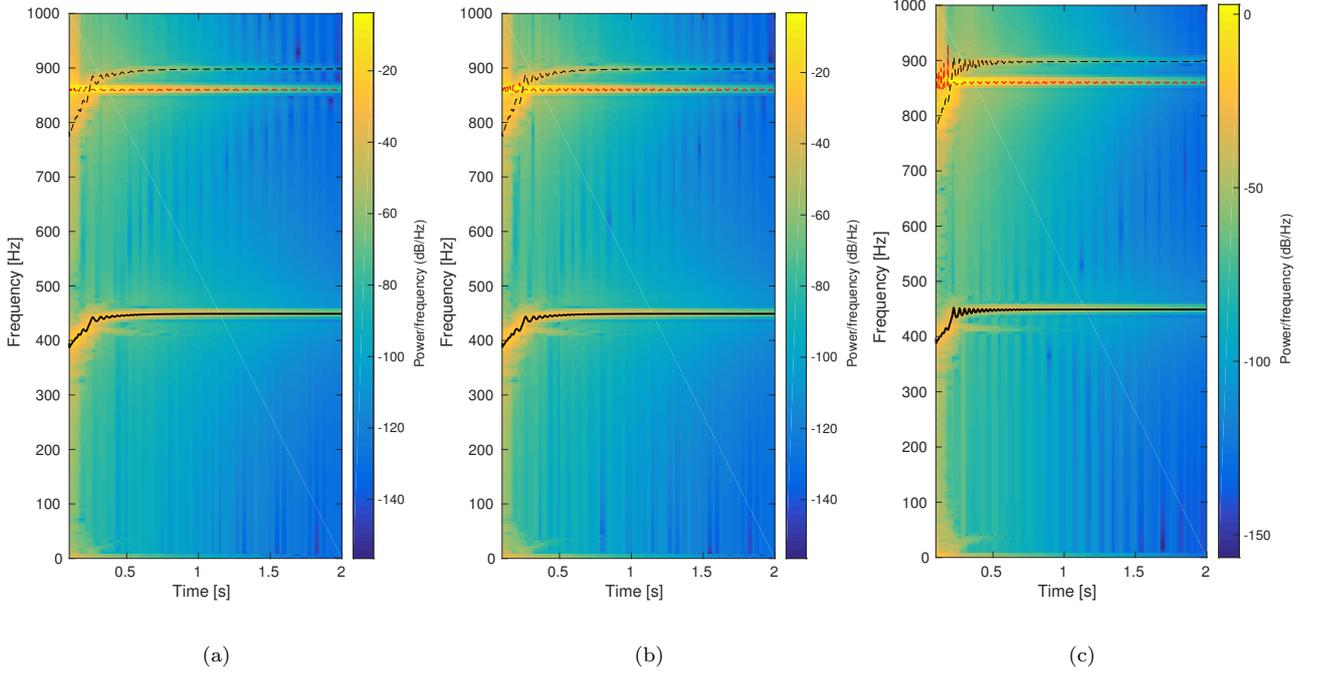


FIG. 17. Spectrograms of the simulated displacement  $u_1 + u_2$ , with parameters  $\alpha = 8 \times 10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ ,  $x_{10} = 0.30 \text{ mm}$  and  $u_{20} = 5 \times x_{10}$ . (a)  $\beta = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$  (b)  $\beta = 10^7 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$  (c)  $\beta = 5 \cdot 10^7 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ . Legend is the same as in Figure 15.

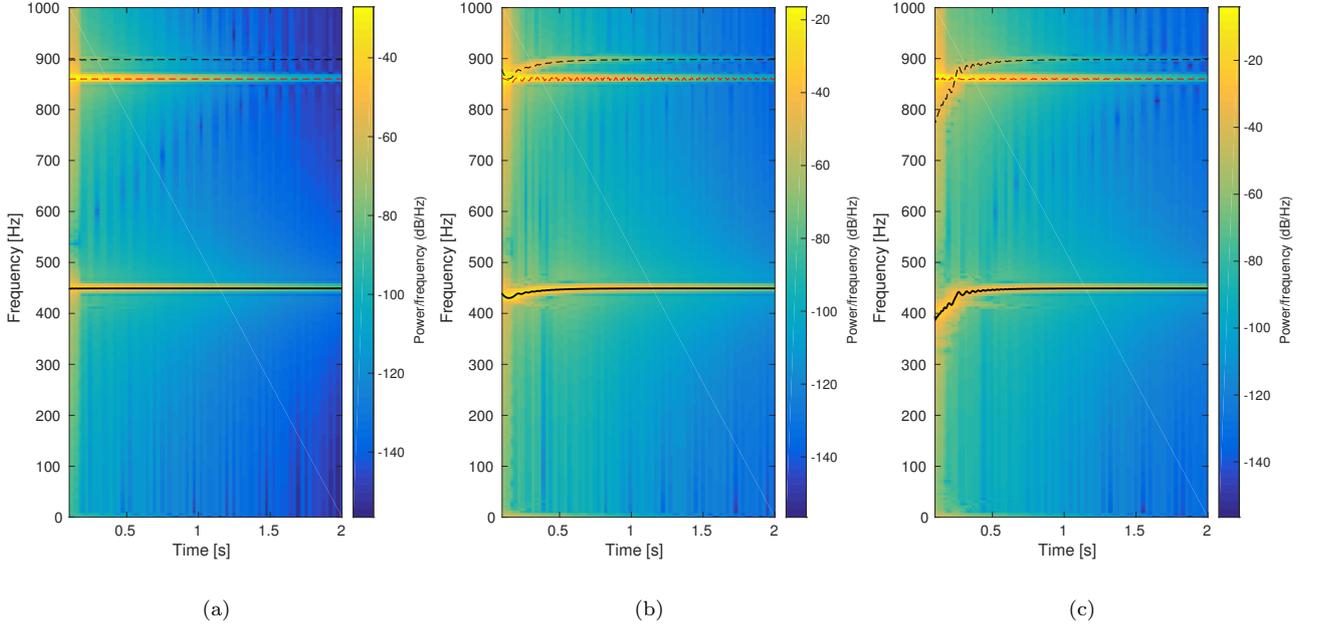


FIG. 18. Spectrograms of the simulated displacement  $u_1 + u_2$ , with parameters  $\alpha = 8.10^4 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ ,  $\beta = 3.10^6 \text{ mm}^{-1}\text{s}^{-2}$ ,  $u_{20} = 5u_{10}$ . (a)  $u_{10} = 0.05$  (b)  $u_{10} = 0.30$  and (c)  $u_{10} = 0.68$ . Legend is the same as in Figure 15

tem fulfilling a 1:2 resonance relationship ( $\omega_2 = 2\omega_1$ );  
 (iii) frequency shifts appear when measuring the *back-*

*bone curves*; they were interpreted as thermal effects due to the heating of the magnet used for the excitation.

These thermal effects were highlighted by a numerical study investigating the influence of temperature on the fundamental mode of a clamped spherical shell. Results show that the frequency variation can be either negative or positive, depending on the competition between a compression effect and the curvature increase.

Finally, this study experimentally highlights the inter-

action between the pitch glide phenomenon and internal resonances in free vibration regime. It also provides the first step for the detailed comprehension of the pitch glide in Chinese gongs. In the case of the *xiaohuo*, a three modes model could easily be determined by experimentally identifying the nonlinear coupling coefficients of each 1:2 internal resonance that have been highlighted in the study, as previously made for example in [12].

- 
- [1] N. Fletcher and T. Rossing, *The Physics of musical instruments*, pp. 649 (Springer-Verlag, 1998).
- [2] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, pp. 1-720 (Wiley-VCH, Weinheim, 1995).
- [3] T.D. Rossing and N.H. Fletcher, "Nonlinear vibrations in plates and gongs," *J. Acoust. Soc. Am.* **73**, 345-351 (1983).
- [4] N.H. Fletcher, "Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells: Pitch glide in Chinese gongs," *J. Acoust. Soc. Am.* **78**, 2069-2073 (1985).
- [5] G.-C. Tsai, B.-T. Wang, Y.-S. Lee, Z.-W. Chang, "Study of vibration and sound characteristics of a copper gong," *J. Chin. Inst. Eng.* **28**(4), 713-719 (2005).
- [6] M. Jossic, A. Mamou-Mani, B. Chomette, D. Roze, F. Ollivier, C. Jossierand, "Modal active control of Chinese gongs," *J. Acoust. Soc. Am.* **141**, 4567-4578 (2017).
- [7] K. Legge and N. Fletcher, "Nonlinearity, chaos, and the sound of shallow gongs," *J. Acoust. Soc. Am.* **86**(6), 2439-2443 (1989).
- [8] C. Touzé and A. Chaigne, "Lyapunov Exponents from Experimental Time Series: Application to Cymbal Vibrations," **86**(3), 557-567 (2000).
- [9] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, "Nonlinear behavior of gongs through the dynamics of simple rods systems," in *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics 1*, Perugia, Italy (September 1014, 2001), 178-179.
- [10] A. Chaigne, C. Touzé, O. Thomas, "Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals," *Acoustical Science and Technology* **26**, 403-409 (2005).
- [11] M. Monteil, C. Touzé, O. Thomas, S. Benacchio, "Non-linear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies: the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances," *Nonlinear Dynamics* **75**, 175-200 (2014).
- [12] M. Monteil, O. Thomas, C. Touzé, "Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan," *Applied Acoustics* **89**, 1-15 (2015).
- [13] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, "Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1: 1: 2 internal resonance," *International Journal of Solids and Structures* **42**, 3339-3373 (2005).
- [14] C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, "Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes," *Journal of Sound and Vibration* **273**, 77-101 (2004).
- [15] C. Touzé, O. Thomas, "Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells: Effect of the geometry," *International Journal of Non-Linear Mechanics* **41**(5), 678-692 (2006).
- [16] L. Jezequel, C. Lamarque, "Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory," *Journal of Sound and Vibration* **149**(3), 429-459 (1991).
- [17] M.F. Platten, J.R. Wright, G. Dimitriadis, J.E. Cooper, "Identification of multi-degree of freedom non-linear system using an extended modal space model," *Mech. Syst. Signal Process.* **23**, 8-29 (2009).
- [18] M. Peeters, G. Kerschen, J.C. Golinval, "Dynamics testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes," *Journal of Sound and Vibration* **330**(3), 486-509 (2011).
- [19] S. Mojrzisch, J. Twiefel, "Phase-controlled frequency response measurement of a piezoelectric ring at high vibration amplitude," *Archive of Applied Mechanics* **86**(10), 1763-1769 (2015).
- [20] S. Peter, R. Riethmüller, R.I. Leine, "Tracking of Backbone Curves of Nonlinear Systems Using Phase-Locked-Loop," *Nonlinear Dynamics* **1**, 107-120 (2016).
- [21] V. Denis, M. Jossic, A. Renault, C. Giraud-Audine, O. Thomas, "Robust measurement of backbone curves of a nonlinear piezoelectric beam," *ENOC 2017*, June 25-30, 2017, Budapest, Hungary.
- [22] V. Denis, M. Jossic, C. Giraud-Audine, B. Chomette, A. Renault, O. Thomas, "Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation". Submitted to *Mechanical Systems and Signal Processing* (2017)
- [23] S.W. Shaw and C. Pierre, "Nonlinear Normal Modes and invariant manifolds" *Journal of Sound and Vibration* **150**(1), 170-173 (1991).
- [24] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, A.F. Vakakis, "Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist," *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**(1), 170-194 (2009).
- [25] J.R. Wright, J.E. Cooper, M.J. Desforges, "Normal-mode force appropriation - Theory and Applications," *Mechanical Systems and Signal Processing* **13**(2), 217-240 (1999).
- [26] M. Peeters, G. Kerschen, J.C. Golinval, "Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes: Experimental demonstration," *Mechanical Systems and Signal Processing* **25**(4), 1227-1247 (2011).
- [27] J.M. Londono, S.A. Neild, J.E. Cooper, "Identification of backbone curves of nonlinear systems from resonance decay responses," *Journal of Sound and Vibration* **348**, 224-238 (2015).
- [28] D.A. Ehrhardt, M.S. Allen, "Measurement of nonlinear normal modes using multi-harmonic stepped force appropriation and free decay," *Mechanical Systems and Signal Processing* **76-77**, 612-633 (2016).
- [29] J. Sieber, B. Krauskopf, "Control based bifurcation analysis for experiments," *Nonlinear Dynamics* **51** (3), 365-377 (2008).





## Chapitre 6

# Conclusion générale

---

6.1 Contributions et résultats obtenus . . . . .	137
6.2 Perspectives . . . . .	139

---

Cette thèse s’est intéressée au contrôle actif de structures présentant des non-linéarités géométriques, appliqué à un instrument de musique : le gong d’opéra chinois *xiaoluo*. Ce travail s’est ainsi concentré sur deux objectifs :

- (O1) Evaluer les performances et limites du contrôle actif modal sur les non-linéarités géométriques présentes dans le comportement du gong *xiaoluo*.
- (O2) Identifier un modèle d’ordre réduit du mode fondamental de l’instrument.

Le travail présenté a abordé les objectifs (O1) et (O2) de cette problématique par la mise en relation de trois domaines distincts : l’acoustique musicale, le contrôle actif, et la mécanique non linéaire. Cette conclusion générale propose une synthèse des différents apports de cette étude et des résultats obtenus. Des perspectives pour la suite de ce travail sont suggérées en deuxième partie. Les différents points exposés ci-après sont en dernier lieu résumés dans une figure récapitulative, exposée à la fin de cette conclusion.

### 6.1 Contributions et résultats obtenus

L’objet d’étude, le gong *xiaoluo*, a tout d’abord été étudié dans son ensemble (Chapitre 2) : sa géométrie et sa composition ont été caractérisées, et des analyses modales expérimentale et en éléments finis ont été réalisées. Par ailleurs, le comportement dynamique du gong a été modélisé par un modèle de Von Kármán étendu au cas des coques. Ce modèle a mis en évidence, à l’ordre trois, le couplage quadratique et cubique des coordonnées modales de la structure. La présence de ces couplages a permis de caractériser et expliquer théoriquement certains phénomènes non linéaires présents dans le comportement de l’instrument : distorsion harmonique, résonances internes, glissement fréquentiel. La présence de distorsion harmonique et de glissement fréquentiel a ensuite été mise en évidence expérimentalement en régime de jeu.

L’implémentation d’un contrôle modal de l’amortissement du mode fondamental de l’instrument a ensuite été mise en place (Chapitre 3). Une identification expérimentale des paramètres modaux du système a été effectuée. Le positionnement du capteur et de l’actionneur a été déterminé par un compromis entre leur invasivité et la contrôlabilité/observabilité correcte du mode fondamental. Le contrôle modal en amortissement du mode fondamental a révélé de bonnes performances

qualitatives, avec des performances quantitatives moindres pour les forts taux d'amortissement du fait d'incertitudes sur l'identification de la phase de la fonction de transfert. Les performances du contrôle sur les non-linéarités ont été ensuite qualitativement et quantitativement évaluées : le contrôle modal permet de détecter les modes impliqués dans des phénomènes non linéaires de faibles amplitudes avec le mode contrôlé - distorsion harmonique, résonances internes. En revanche, le glissement fréquentiel n'est pas impacté par le contrôle modal, en raison des limites de l'observateur linéaire.

L'observateur linéaire étant limité (Chapitre 3), la modélisation du glissement fréquentiel a été initiée dans l'optique à terme de développer un observateur non linéaire (Chapitre 4). Le formalisme des modes non linéaires a été introduit afin de pouvoir réduire la dimension du modèle de Von Kármán. Un premier modèle réduit à un unique mode non linéaire a été proposé pour caractériser la relation amplitude-fréquence du mode fondamental de l'instrument. Afin de réduire le nombre de coefficients à identifier, le mode non linéaire fondamental a été caractérisé au premier ordre par un oscillateur de Duffing assouplissant, réduisant ainsi le nombre de coefficients de deux à un. Le coefficient non linéaire du mode non linéaire a ensuite été identifié à l'aide d'une méthode récente utilisant une boucle à verrouillage de phase. Celle-ci permet en régime forcé d'amener le mode d'intérêt à la résonance de phase non linéaire. La méthode de la boucle à verrouillage de phase a été validée par une autre méthode de mesure de la *backbone curve*, utilisant la mesure de courbes de résonances non linéaires. Les deux méthodes donnent des résultats concordants.

Les limites de l'approximation uni-modale (Chapitre 4) ont ensuite été explorées dans le but de décrire le glissement fréquentiel du gong *xiaoluo* en situation de jeu (Chapitre 5). La boucle à verrouillage de phase a été utilisée afin de mesurer la *backbone curve* du mode non linéaire fondamental *en régime libre*. Cette *backbone curve* a ensuite été comparée à la *backbone curve* du même mode en régime de jeu. Les deux résultats principaux obtenus sont les suivants :

- (i) la relation amplitude-fréquence du mode fondamental du gong en régime libre est *quantitativement reliée* à la relation amplitude-fréquence du mode non linéaire associé au fondamental. C'est la première fois à la connaissance de l'auteure qu'une explication rigoureuse et formelle est donnée pour décrire cette caractéristique majeure de l'instrument.
- (ii) la description du glissement fréquentiel (dépendance de la fréquence vis-à-vis du temps) du mode fondamental nécessite la prise en compte de modes non linéaires supplémentaires dans la modélisation. Ce point est mis en évidence par le fait que le glissement fréquentiel en régime libre présente des battements fréquents ; ceux-ci apparaissent temporellement au moment où la fréquence de la distorsion harmonique d'ordre 2 du fondamental est égale à la fréquence d'un mode plus haut en fréquence. Cet accord de fréquence permet la mise en place d'échanges d'énergie par résonance interne 1:2 ( $\omega_2 = 2\omega_1$ ) entre les modes concernés. Ce résultat est confirmé par la simulation de deux oscillateurs présentant une relation de résonance interne 1:2, durant laquelle l'influence des couplages par résonance interne sur le glissement fréquentiel du premier oscillateur est soulignée ; par ailleurs, le comportement expérimental du glissement fréquentiel du mode non linéaire fondamental est qualitativement retrouvé dans les résultats de simulation. A travers l'exemple du gong *xiaoluo*, ce dernier résultat correspond à la première mise en évidence de l'interaction des phénomènes de glissement fréquentiel et de résonances internes *dans un régime de vibration libre*.

Au total, ce travail fournit les bases pour comprendre (i) les limites du contrôle linéaire dans le cas de non-linéarités géométriques, et (ii) la modélisation et l'influence de ces non-linéarités dans

le comportement dynamique du gong *xiaoluo*. Ces bases constituent les préliminaires nécessaires à la mise en place d'un contrôle non linéaire de cet instrument.

## 6.2 Perspectives

Les résultats présentés précédemment suggèrent des perspectives de travail propres au domaine de la mécanique, du contrôle, et à leur interaction. Ces perspectives sont exposées ci-après.

### Modèle réduit du mode fondamental

Premièrement, une perspective directe à ce travail est l'identification expérimentale des termes de couplages quadratiques issus des résonances internes 1:2 entre le mode non linéaire fondamental et les modes à 860 Hz et 880 Hz (Chapitre 5). L'identification expérimentale de ces coefficients est réalisable soit (i) en régime forcé avec le système bobine-aimant (Chapitre 4) [Monteil et al. 2014, 2015]; ou (ii) en étudiant l'extension de la méthode à résonance de phase dans le cas de résonances internes; celles-ci ont été soigneusement évitées dans les mesures des Chapitres 4 et 5. L'identification de résonances internes 1:3 ( $\omega_2 = 3\omega_1$ ) induites par le glissement fréquentiel de la distorsion harmonique d'ordre 3 du mode fondamental pourrait être également réalisée. La connaissance des coefficients de couplage permettrait à terme d'obtenir un modèle réduit à quelques degrés de liberté décrivant le comportement du glissement fréquentiel du mode fondamental de l'instrument.

### Interaction en régime libre entre glissement fréquentiel et résonances internes

Ce travail a également abordé l'interaction, *en régime libre*, du phénomène de dépendance fréquence-amplitude (glissement fréquentiel), et du phénomène de résonance interne. Il est bien connu qu'*en régime forcé*, le phénomène de dépendance de la fréquence vis-à-vis de l'amplitude rend possible l'activation de résonances internes entre modes de la structure. Cependant, les modalités de ces échanges d'énergie n'ont, à la connaissance de l'auteure, pas encore été étudiées en régime libre.

### Contrôle modal et dynamique non linéaire

Le contrôle actif modal a montré sa capacité à détecter les modes impliqués dans des phénomènes non linéaires avec le(s) mode(s) contrôlé(s) (distorsion harmonique, résonances internes). Les possibilités qu'offre le contrôle modal vis-à-vis de la compréhension des phénomènes non linéaires méritent d'être approfondies. Dans le cas de résonances internes impliquant un mode contrôlé, la possibilité de modifier l'amortissement de ce mode peut donner des indications sur la manière dont l'énergie se transfère aux composantes fréquentielles impliquées dans ces résonances internes. Par ailleurs, certaines méthodes se sont développées pour le contrôle en régime forcé d'oscillateurs non linéaires 1D de type Duffing [Tehrani et al. 2013]. Augmenter l'amortissement d'un unique mode non linéaire *via* un contrôle en régime forcé permettrait de mettre en évidence expérimentalement les différences théoriques évoquées en Annexe D entre résonance de phase, résonance d'amplitude, et points de bifurcation.

### Aspects énergétiques et forme normale

Enfin, une dernière perspective consiste à regarder l'aspect énergétique du modèle uni-modal (Chapitre 4) et du modèle à deux ou trois degrés de liberté (Chapitre 5) obtenus à partir du

formalisme des modes non linéaires. Ces travaux, exploratoires, ont fait l'objet d'un acte de conférence [Jossic et al. 2017] et sont résumés ici.

L'analyse énergétique du modèle de l'oscillateur de Duffing assouplissant soulève un point physique important : contrairement à l'oscillateur de Duffing raidissant, dont l'énergie potentielle est positive (à une constante près), l'énergie potentielle du Duffing assouplissant n'est pas inférieurement bornée. Ceci lui confère une énergie totale *négative* [Johannessen 2017; Guckenheimer and Holmes 1986] aux grandes amplitudes de vibration, donnant lieu à un comportement *instable*. En effet, en travaillant avec une version adimensionnée de l'oscillateur (4.14) :

$$\ddot{\tilde{R}}(\tilde{t}) + \mu\dot{\tilde{R}}(\tilde{t}) + \tilde{R}(\tilde{t}) - \tilde{R}^3(\tilde{t}) = \tilde{Q}(\tilde{t}) \quad (6.1)$$

où  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{t}$  et  $\tilde{f}$  désignent respectivement les variables adimensionnées associées  $R$ ,  $t$  et  $Q$  dans (4.14), l'énergie potentielle  $H_{pot}$  associée au cas conservatif de cet oscillateur est ( $\tilde{R} = R$  pour plus de simplicité) :

$$H_{pot}(R) = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^4$$

Cette énergie potentielle est représentée sur la Figure 6.1. Comme attendu, elle possède un point d'équilibre stable en  $(0,0)$  et deux points d'équilibre instables en  $R = -1$  et  $R = +1$ , au delà desquels l'énergie se trouve non inférieurement bornée. Les zones physiquement non admises associées à ces deux points instables sont représentées en rouge sur la Figure 6.1.

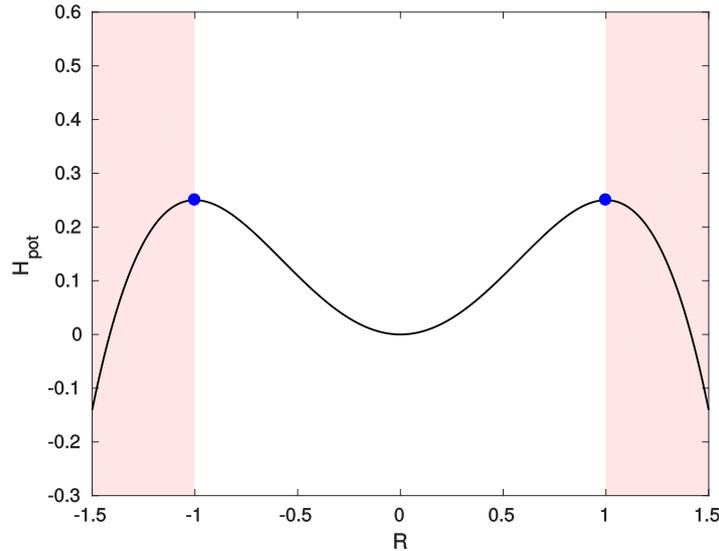


FIGURE 6.1 – Énergie potentielle  $H_{pot}$  associée à l'équation (6.1). Les points bleus désignent les points d'équilibre instables du système et les zones en rouge les zones non physiques qui leur sont associées.

Les mêmes considérations énergétiques peuvent être effectuées dans le cas de la forme normale du système à deux degrés de liberté défini à la section V B. du Chapitre 5. Le système considéré est alors :

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{R}_1 + \omega_1^2 R_1 + \Gamma_0 R_1^3 + \alpha R_1 R_2 &= 0 \\ \ddot{R}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{R}_2 + \omega_2^2 R_2 + \beta R_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'énergie potentielle  $H_{pot2}$  associée au problème conservatif, dans le cas où  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ , est alors :

$$H_{pot2} = \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{\Gamma_0}{4}q_1^4 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2 + \beta q_1^2 q_2 \quad (6.3)$$

Cette énergie est représentée Figure 6.2 pour la valeur  $\beta = 3 \cdot 10^6$ . De la même manière que l'énergie potentielle  $H_{pot}$ , l'énergie  $H_{pot2}$  est non inférieurement bornée pour les grandes amplitudes.

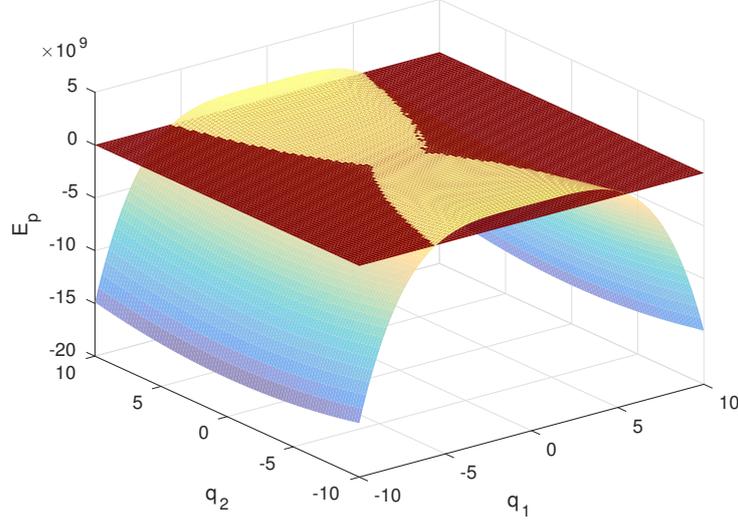


FIGURE 6.2 – Énergie  $H_{pot2}$  associée au système (6.2). Le plan horizontal rouge représente le plan  $H_{pot2} = 0$ .

Le fait que les énergies  $H_{pot}$  et  $H_{pot2}$  soient non inférieurement bornées n'est pas étonnant : elles sont issues des calculs de modes non linéaires reposant sur des développements asymptotiques tronqués. En conséquence, il est normal que les modèles qui en sont issus puissent poser à fortes amplitudes des problèmes de validité physique. De plus, en ce qui concerne la réalité physique du gong *xiaoluo*, la dynamique du mode fondamental est bien contenue dans la zone stable de  $H_{pot}$ . Ceci est confirmé en regardant la fréquence du Duffing (6.1) une fois redimensionnée (Figure 6.3). Les zones instables correspondant à l'énergie potentielle représentée Figure 6.1 sont représentées en fonction de la fréquence libre du système, obtenue en traçant la *backbone curve* (inversée). Les expériences sur le gong réalisées au cours de cette thèse ont montré que la fréquence du mode fondamental du gong *xiaoluo* ne descendait pas au delà de 380 Hz. Cette zone fréquentielle, tracée en rouge sur la Figure 6.3, est bien contenue dans la zone stable de l'énergie potentielle  $H_{pot}$ .

Cependant, dans une perspective de contrôle, la non-validité physique du modèle (6.1) aux grandes amplitudes de forçage pose problème, puisqu'un système de contrôle peut amener l'instrument dans ces régions dynamiques non physiques. Devant ce constat, est-il possible de *trouver une nouvelle énergie* telle que :

- (i) celle-ci reste positive ou du moins soit non inférieurement bornée ?
- (ii) celle-ci soit équivalente au second ordre à l'énergie du Duffing  $H_{pot}$  dans la zone de fonctionnement du gong (courbe rouge de la Figure 6.3) ?

La réponse est oui ; en effet, l'énergie  $H_{pot}^*$  définie par :

$$\forall R \in \mathbb{R}, H_{pot}^*(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n!(2n+1)(2n+2)} R^{2n+2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} p(\sqrt{3}R) - \frac{1}{6}$$

où  $p(x) = x \times \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$  est une primitive de la fonction  $\operatorname{erf}$ , est positive sur  $\mathbb{R}$  et vérifie bien :

$$H_{pot}^*(R) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} + O(R^6) = H_{pot}(R) + O(R^6)$$

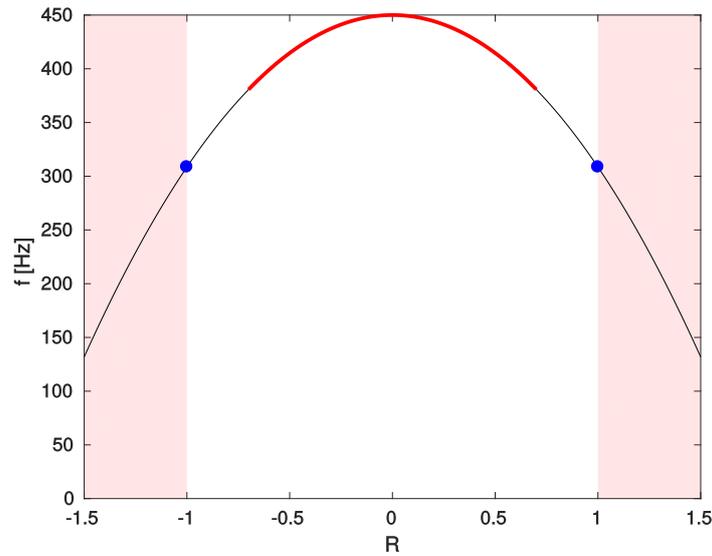


FIGURE 6.3 – Fréquence redimensionnée, en régime libre, en fonction de l’amplitude  $R$ . Les points bleus désignent les points d’équilibre instables du système et les zones en rouge les zones non physiques qui leur sont associées. La courbe rouge correspond à la zone dynamique du mode non linéaire fondamental du gong *xiaoluo*.

Cette énergie  $H_{pot}^*$  est représentée sur la Figure 6.4 : dans la zone dynamique du mode fondamental du gong *xiaoluo*, l’énergie  $H_{pot}^*$  constitue un équivalent correct de l’énergie  $H_{pot}$ . Par ailleurs, elle reste positive sur tout le domaine et n’est pas inférieurement bornée aux grandes amplitudes.

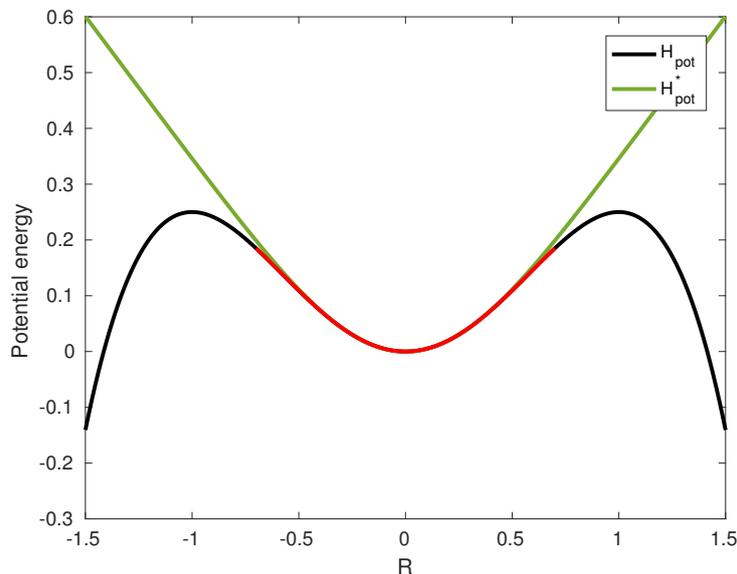


FIGURE 6.4 – Énergie potentielle  $H_{pot}^*$  (vert) comparée à l’énergie potentielle  $H_{pot}$  non inférieurement bornée (noir) et au régime de vibration du gong (rouge).

Ainsi, une perspective intéressante à ce travail consiste à utiliser un formalisme respectant la passivité du système global, directement - et non *a posteriori* comme les développements

précédents - à partir des équations de Von Kármán. Tout système physique est en effet supposé passif par nature, c'est-à-dire qu'il ne crée pas d'énergie ; les systèmes réels présentent même des éléments dissipatifs diminuant leur énergie vers la valeur nulle. Cette propriété de passivité des systèmes physiques garantit leur stabilité au temps continu. Dans une configuration de contrôle, elle garantit la stabilité du système en boucle fermée.

Dans cette optique, l'un des formalismes auquel s'intéresser est le formalisme des Systèmes hamiltoniens à Ports (SHP). Introduits au début des années 90 par Maschke et Van der Schaft [1992; 1994], les SHP constituent une extension des systèmes hamiltoniens classiques permettant de garantir et de reproduire la passivité de systèmes physiques. Le formalisme est capable de modéliser et contrôler des systèmes physiques ouverts, c'est-à-dire pouvant *échanger de l'énergie* avec leur environnement, au travers d'une structure garantissant la préservation du bilan total de puissance, et ainsi la passivité inhérente au système.

Par ailleurs, le formalisme des SHP est utilisé pour la mise en place de stratégies de contrôle par remodelage d'énergie<sup>1</sup>. Ces méthodes s'appuient sur une vision "énergétique" et non plus "signal" du système afin de *contrôler l'énergie* d'une structure donnée. Dans ce cas, le contrôleur est considéré comme un composant dynamique, dont l'interconnection avec le système physique à contrôler modifie l'énergie de celui-ci. Le contrôle à façonnement d'énergie est ainsi à l'origine du *contrôle basé sur la passivité*<sup>2</sup> [Ortega et al. 2001, 2002], garantissant la passivité des systèmes en boucle fermée. Le contrôle par remodelage d'énergie a déjà été réalisé pour le contrôle de l'oscillateur de Duffing (6.1) dans le cadre de cette thèse [Jossic et al. 2017], en utilisant des schémas de simulation à passivité garantie. Au total, la combinaison de ces outils autoriserait le développement d'un observateur non linéaire, ouvrant la voie vers un contrôle du glissement fréquentiel du gong d'opéra chinois *xiaoluo*.

---

1. *Energy shaping control* en anglais.

2. *Passivity Based Control* (PBC) en anglais.

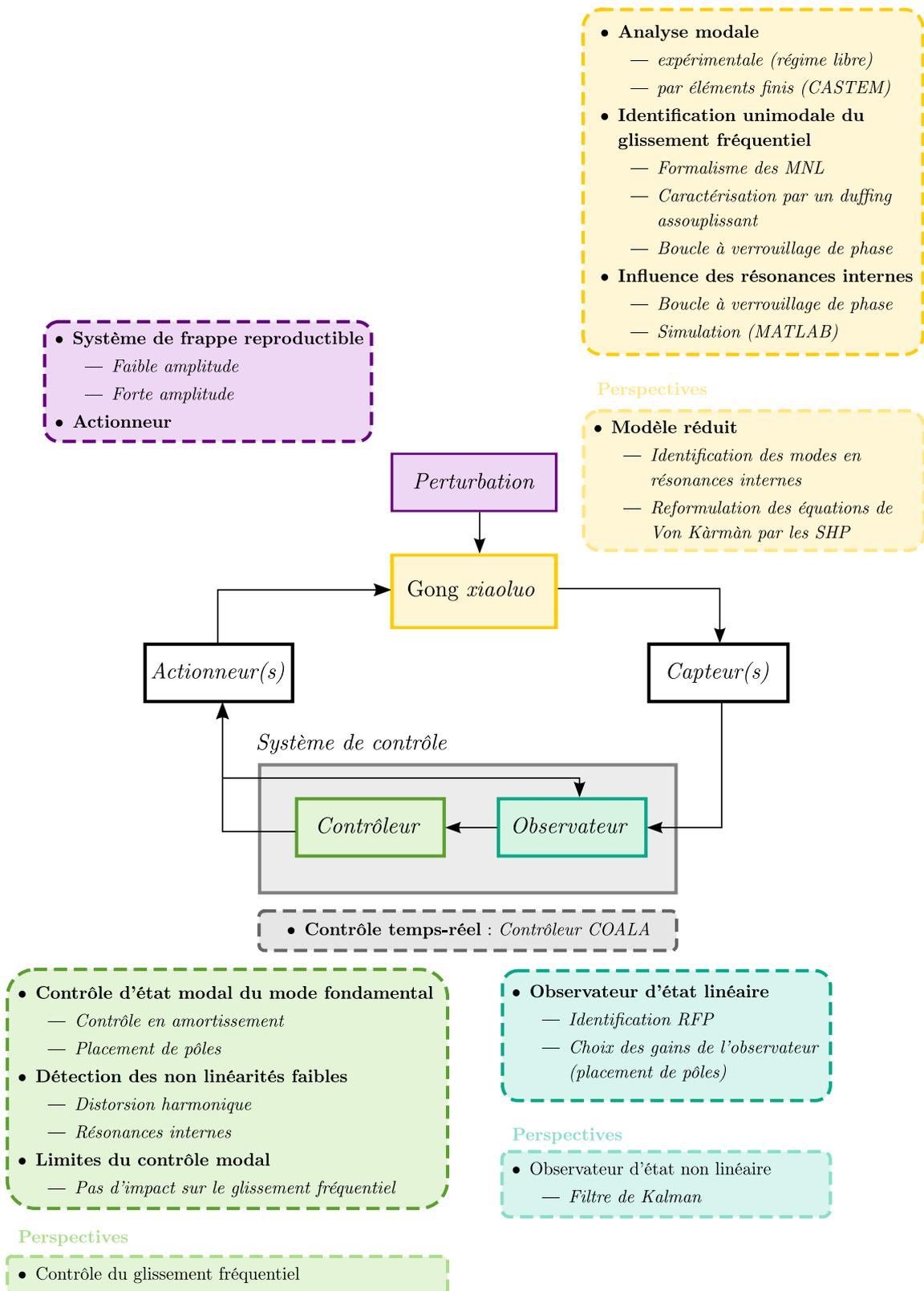


FIGURE 6.5 – Méthodes employées, objectifs atteints et perspectives de ce travail.





## Annexe A

# Quelques détails d'analyse modale

### A.1 Déformées opérationnelles non identifiées

Certaines déformées opérationnelles de l'analyse modale effectuée au Chapitre 2 ne correspondent à aucune des déformées issues des calculs par éléments finis (elles sont indiquées par un "?" sur la Figure 2.11). Elles sont reproduites sur le Figure A.1 avec les fréquences correspondantes.

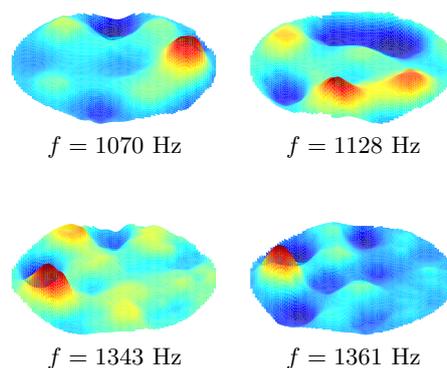


FIGURE A.1 – Déformées opérationnelles ne correspondant à aucune déformée issue du calcul éléments finis.

### A.2 Influence de l'instrumentation du gong sur les déformées opérationnelles

L'influence de l'instrumentation sur les déformées modales du gong a été étudiée en effectuant une deuxième analyse modale sur le gong instrumenté avec le capteur MFC et l'actionneur électrodynamique (voir Figure 3.5). Les conditions expérimentales de cette analyse modale ne sont pas exactement les mêmes que celle effectuée au Chapitre 1. En particulier, il est probable que le point d'impact du marteau et les conditions limites imposées par les blocs de mousse diffèrent d'une analyse modale à l'autre - l'instrumentation du gong ne pouvant se faire sans enlever le gong du dispositif.

Les déformées opérationnelles des analyses modales avec et sans instrumentation sont reproduites sur les Figures A.2 et A.3. L'instrumentation change légèrement la forme des déformées modales, mais n'a pas beaucoup d'influence sur les fréquences modales.

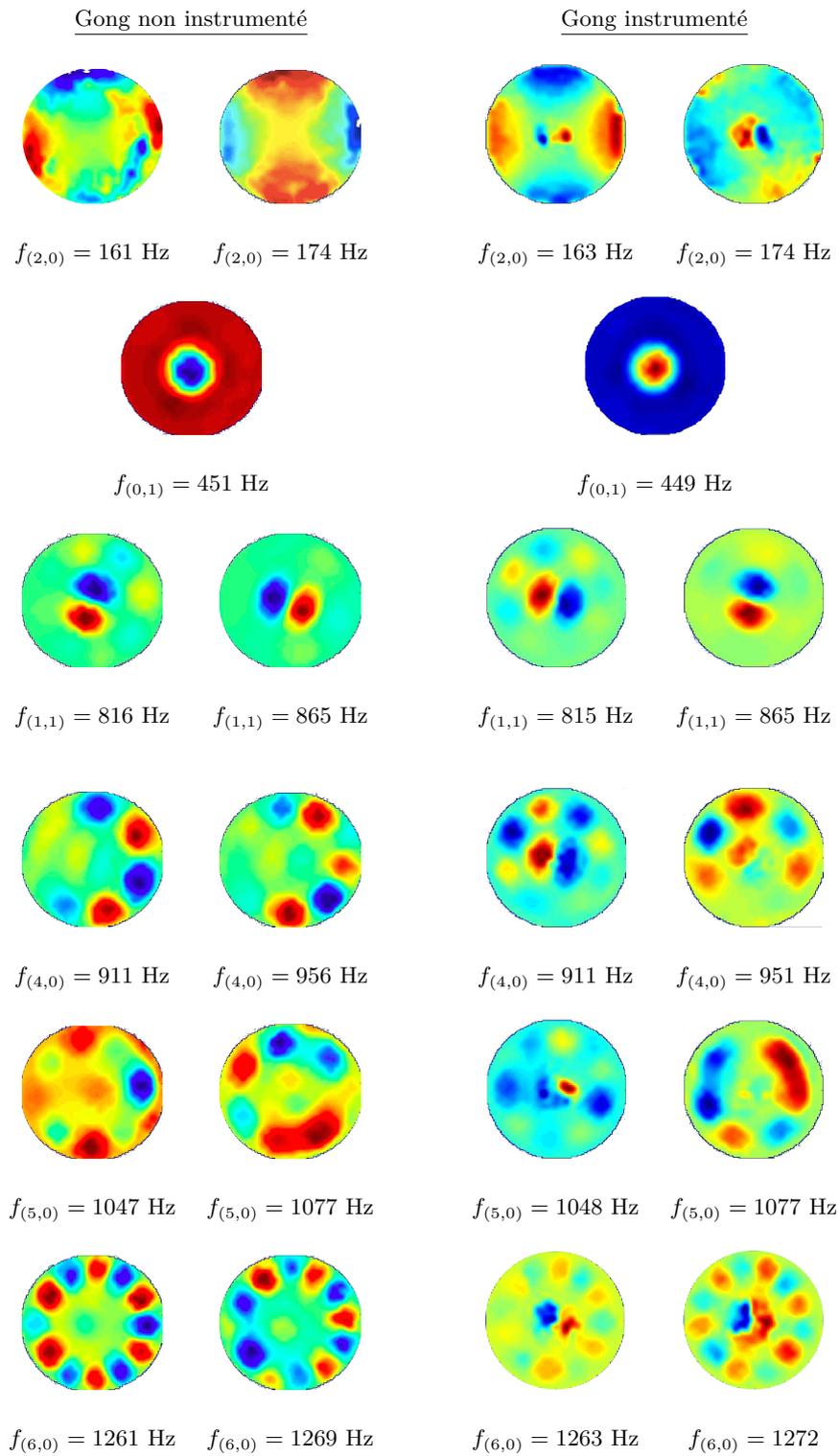


FIGURE A.2 – Déformées opérationnelles du gong *xiaoluo* sans capteur ni actionneur (gong non instrumenté), et avec capteur et actionneur (gong instrumenté).

A.2. INFLUENCE DE L'INSTRUMENTATION DU GONG SUR LES DÉFORMÉES OPÉRATIONNELLES.

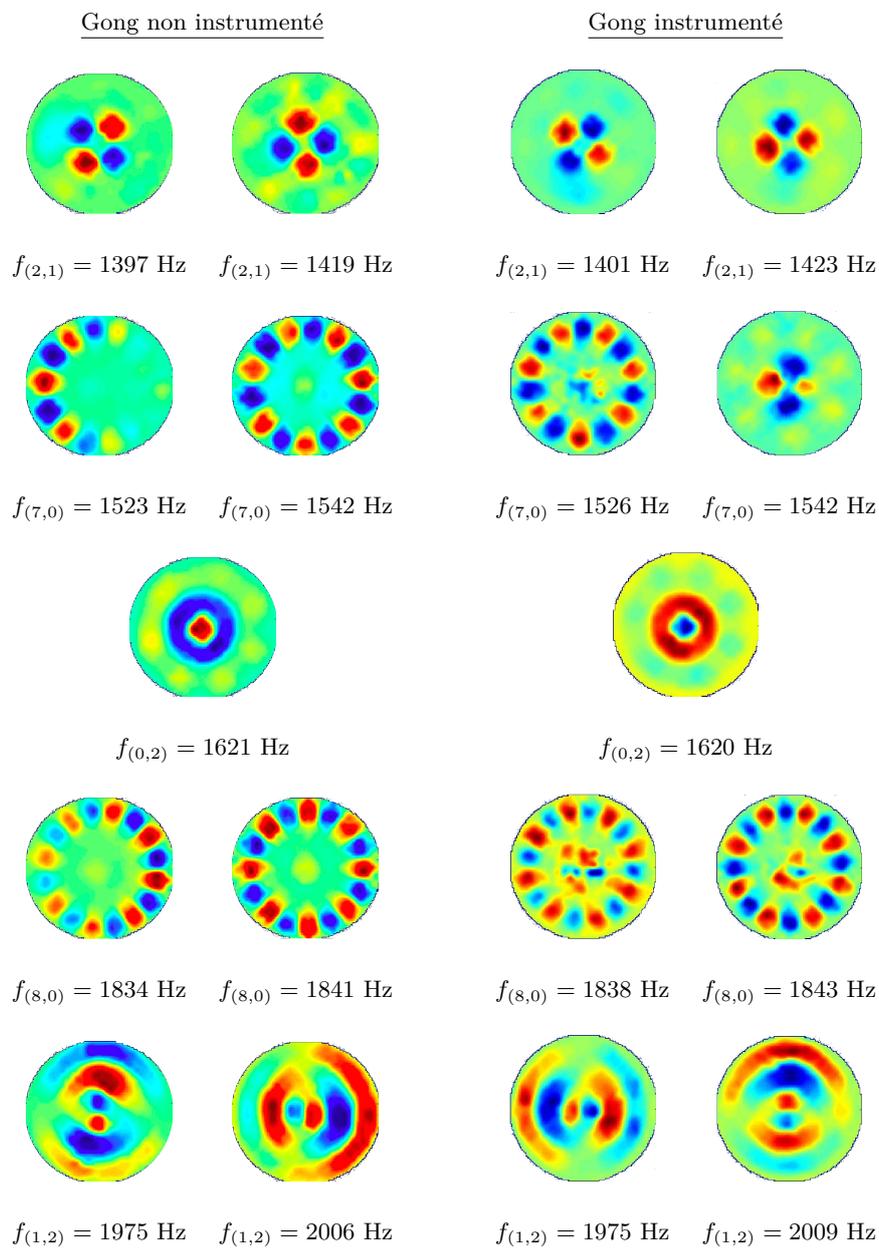


FIGURE A.3 – Suite de la Figure A.2.



## Annexe B

# Contrôle optimal

Dans le cadre modal, l'objectif du contrôle optimal est de déterminer un contrôle par rétroaction en minimisant une fonction de coût  $J$ , définie par :

$$J = \int_0^{\infty} {}^t \mathbf{x}(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + {}^t \mathbf{u}(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt$$

où  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont des matrices définies positives et strictement définies positives, respectivement. Le terme  ${}^t \mathbf{x}(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t)$  représente l'énergie vibratoire de la structure, tandis que le terme  ${}^t \mathbf{u}(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)$  représente l'énergie nécessaire au contrôle. Le problème qui consiste à trouver  $u$  de manière à minimiser  $J$  s'appelle le *problème LQR* (Linear Quadratic Regulator). La solution de ce problème est :

$$u(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{x}$$

où  $\mathbf{P}$  est la solution de l'équation de Riccati :

$${}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + {}^t \mathbf{A} \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Il a été vu précédemment que l'état  $\mathbf{x}$  nécessaire à la détermination de la commande  $u$  peut être estimé par un observateur de Luenberger. Lorsque le système présente un bruit lié à la fiabilité du modèle, noté  $w_1$  et un bruit de mesure  $w_2$ , alors l'équation gouvernant l'erreur d'estimation de l'observateur de Luenberger est [Preumont 2012] :

$$\dot{h}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) h(t) + \mathbf{E} w_1 + \mathbf{L} w_2$$

où  $\mathbf{E}$  est la matrice erreur du système. Ainsi, l'erreur de mesure  $w_2$  est *multipliée* par le gain de l'observateur. L'équation de l'observateur (3.18) est donc en partie basée sur la fiabilité du modèle  $\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u}$  et sur l'erreur d'estimation  $h$ , cette dernière étant amplifiée par le gain de l'observateur  $\mathbf{L}$ . L'importance relative accordée à ces deux éléments est choisie par l'utilisateur : un capteur avec un bruit de mesure important nécessite de ne pas utiliser un gain  $\mathbf{L}$  trop important. Dans le cas où  $w_1$  et  $w_2$  peuvent être considérés comme des bruits blancs, l'observateur qui minimise la variance de l'erreur d'estimation est le filtre de Kalman, ou algorithme *Linear Quadratic Estimator* (LQE). L'association de la commande LQR à un observateur de type Kalman (ou observateur LQE) est appelé commande LQG.



## Annexe C

# Schéma SIMULINK de la boucle à verrouillage de phase

On donne dans cette Annexe les schémas Simulink utilisés pour implémenter la boucle à verrouillage de phase décrite au Chapitre 3. Ils sont représentés Figures [C.1](#) et [C.2](#)

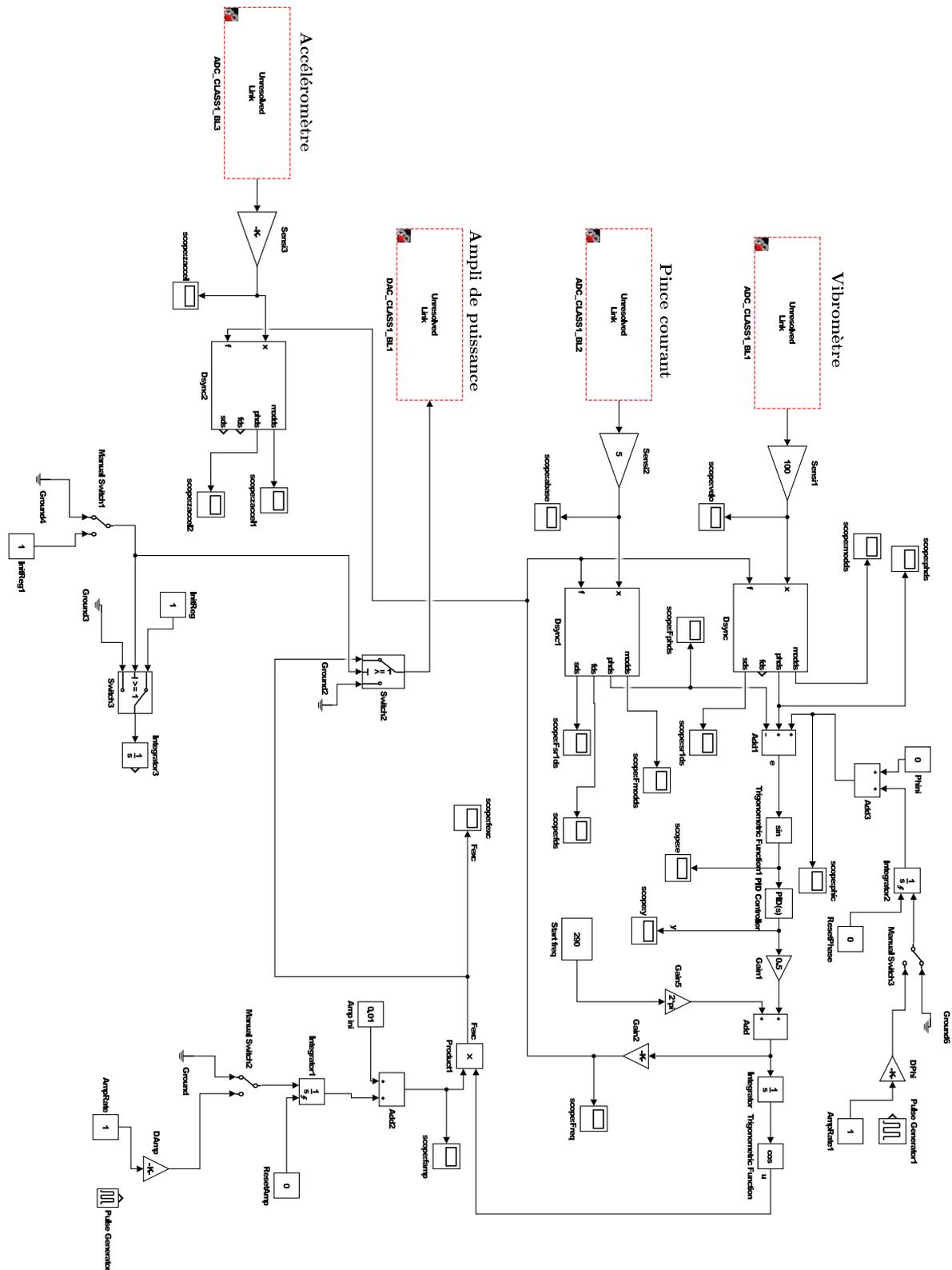


FIGURE C.1 – Schéma SIMULINK global pour la boucle à verrouillage de phase.

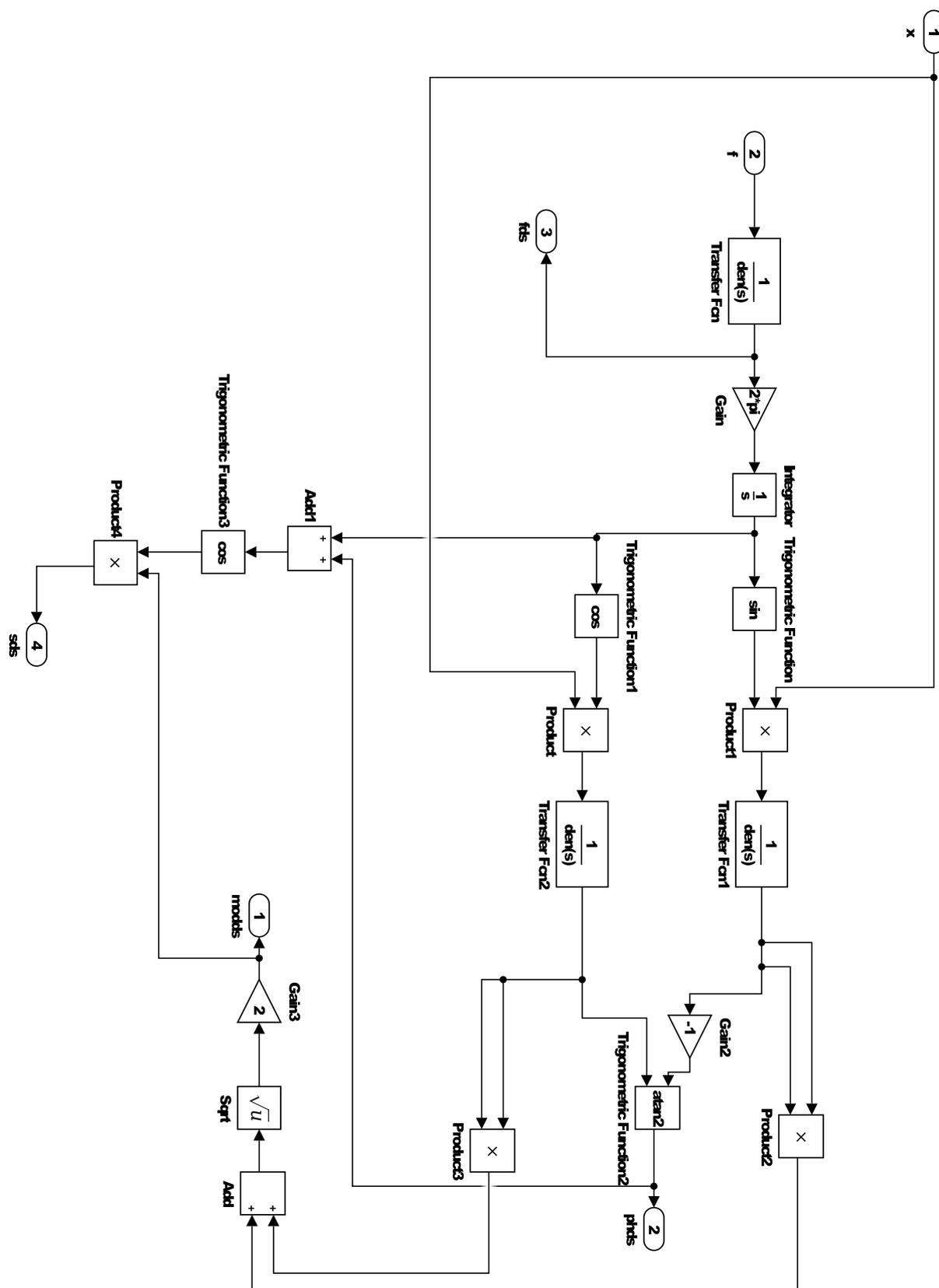


FIGURE C.2 – Détail des blocs simulink Desync de la Figure C.1.



## Annexe D

# Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation

Cette annexe présente un article soumis au journal *Mechanical Systems and Signal Processing* le 26 juillet 2017. Il est ici reproduit en intégralité.

# Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation

V. Denis <sup>\*1</sup>, M. Jossic<sup>2</sup>, C. Giraud-Audine<sup>2</sup>, B. Chomette<sup>2</sup>, A. Renault<sup>1</sup> and O. Thomas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Arts et Métiers Paristech, LSIS, UMR CNRS 7296, 8 bd. Louis XIV, 59046 Lille, France

<sup>2</sup>Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR CNRS 7190, Institut Jean le Rond  
d’Alembert, 4 pl. Jussieu, 75252 Paris, France

<sup>3</sup>Arts et Métiers Paristech, L2EP, 8 bd. Louis XIV, 59046 Lille, France

26 juillet 2017

**Keywords**— distributed nonlinearity, backbone curve, nonlinear mode, nonlinear system identification, phase-locked loop

## Abstract

In this article, we address the model identification of nonlinear vibratory systems, with a specific focus on systems modeled with distributed nonlinearities, such as geometrically nonlinear mechanical structures. The proposed strategy theoretically relies on the concept of nonlinear modes of the underlying conservative unforced system and the use of normal forms. Within this framework, it is shown that without internal resonance, a valid reduced order model for a nonlinear mode is a single Duffing oscillator. We then propose an efficient experimental strategy to measure the backbone curve of a particular nonlinear mode and we use it to identify the free parameters of the reduced order model. The experimental part relies on a Phase-Locked Loop (PLL) and enables a robust and automatic measurement of backbone curves as well as forced responses. It is theoretically and experimentally shown that the PLL is able to stabilize the unstable part of Duffing-like frequency responses, thus enabling its robust experimental measurement. Finally, the whole procedure is tested on three experimental systems: a circular plate, a chinese gong and a piezoelectric cantilever beam. It enable to validate the procedure by comparison to available theoretical models as well as to other experimental identification methods.

## 1 Introduction

The model identification of dynamical systems is an important area of today’s research. Basically, it consists in performing dedicated experiments in order to estimate the values of a given set of parameters of an assumed model for the system. In doing so, several goals can be pursued. It may be a simple model validation: one compare the experimentally estimated values of the parameters to the theoretical ones to quantify its closeness to reality. One can also be interested in a model updating: a given set of parameters are left free in the model and their values are estimated with dedicated experiments. For linear systems, modal models are often selected and a large variety of mature and robust parameter identification techniques/algorithms is available [1]. Most of them are implemented in commercial experimental modal analysis software packages. On the contrary, if the system’s behaviour involves nonlinearities, the area of system’s identification, though extensively addressed in the past twenty years, is still open and no systematic procedure exists. The interested reader is referred to the following review works [2, 3, 4].

The presence of nonlinearities in a given system can dramatically change its behaviour. Among others, the system’s free oscillations frequencies, as well as the resonance frequencies, depend on the amplitude. Moreover, some energy exchanges between modes or between distant frequency bands can be observed, leading to harmonic distortion, internal resonances, quasi-periodic oscillations or chaotic oscillations [5]. The physical sources of nonlinearities are numerous, and lead in each case to specific dynamical phenomena. They can be classified

---

\*vivien.denis@ensam.eu

---

into four families: material nonlinearities (elastoplastic material, nonlinear elastic material...), geometrical nonlinearities (large amplitude oscillations), contact nonlinearities (dry friction, shocks...) and interaction nonlinearities (fluid-structure, electrostatic transduction in micro/nano systems). Until now, the efforts on nonlinear systems identifications have been mainly targeted to localized nonlinearities (almost all the 230 references of the 2016 review [2] are related to localized nonlinearities). By localized, we denote nonlinearities that involve a very small subset of the model's degrees of freedom, the others being linear. Some examples are contact nonlinearities or nonlinearities localized in connection components between subparts of the system.

In the present article, we specifically address the experimental identification of models involving distributed nonlinearities, even if it can be equally applied to models with localized nonlinearities. We target in particular the identification of geometrically nonlinear slender structures, such as beams, plates and shells, with possible interaction nonlinearities such as electrostatic or piezoelectric transductions. Geometrical nonlinearities involve all the model's degrees of freedom (see e.g. [6]), as well as electrostatic transduction, intrinsically nonlinear (see e.g. [7]) and piezoelectric transduction, materially nonlinear for large electric fields [8]. Because of this distributed nature of the nonlinearities, it is impossible to experimentally identify a nonlinear law involving the (numerous) physical degrees of freedom (like a nonlinear stiffness), as often done for localized nonlinearities [2]. Consequently, the method proposed in this article systematically relies on an accurate reduced order model based on the concept of nonlinear modes and normal forms. As introduced for nonlinear structural systems in [9, 10, 11], the normal form theory enables to reduce the dynamics of a nonlinear second order dynamical system to an invariant set of oscillators, each one being associated to a so-called nonlinear mode. If no internal resonance occurs, the system's dynamics in free undamped oscillations can be reduced to a single nonlinear mode, and consequently to a single nonlinear oscillator. Its main characteristic is its hardening / softening behaviour, well defined by its backbone curve, showing the free oscillations frequency as a function of the motion's amplitude. For slender structures such as beams, plates and shells subjected to geometrical nonlinearities, the hardening / softening behaviour of a particular nonlinear mode depends, among other sources, on the curvature (flat structures like beams and plates have always hardening nonlinear modes whereas shells show softening behaviours [12, 13, 14]), on possible prestresses [15] or on electrostatic or piezoelectric interactions [16, 8].

In this article, we propose an efficient strategy to experimentally estimate the backbone curve of a particular nonlinear mode and we use it to identify a reduced order model of the considered nonlinear mode. The experimental identification part relies on a recent measurement technique based on a Phase-Locked Loop (PLL) [17, 18]. The whole procedure is tested on three experimental systems. The first one is a free edge circular plate, already used in [19]. The backbone curves of an axisymmetric mode and two asymmetric companion modes are identified. Then, the estimated parameters are compared to an analytical theoretical model, showing the efficiency of the method, even when 1:1 internal resonance are present. Then, two hardening nonlinear modes of a chinese gong are measured. For those two structures, tested with free edge boundary conditions, the nonlinearities are mainly geometrical. On the contrary, the third tested structure is a piezoelectric cantilever beam, for which the first mode is tested in several electrical conditions. In this latter case, the nonlinearities come from several sources: geometrical, non perfect boundary conditions and piezoelectric material nonlinearities.

## 2 Nonlinear mode identification

### 2.1 Nonlinear mode background

#### 2.1.1 First order reduced model

We consider the following  $N$ -dimensional model of a nonlinear system, valid for a  $N$  degrees of freedom discrete mechanical system or a continuous one, discretized on a  $N$  dimensional basis (after a finite element discretization for instance [6, 20]):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}, \quad (1)$$

where  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}(t)$  is the  $N$  dimensional displacement vector, a function of time  $t$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  and  $\mathbf{K}$  are the  $N \times N$  dimensional mass, damping and stiffness matrices,  $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})$  is the nonlinear part of the internal force vector,  $\mathbf{g}(t)$  is the external force vector and  $\dot{\bullet} = d\bullet/dt$ . Note that for a sake of simplicity, a linear viscous damping model has been used. We also restrict our attention to geometrically nonlinear structures, for which  $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})$  is a quadratic and cubic polynomial function of  $\mathbf{x}$  [21, 20, 22].

80 We first consider a family of  $K < N$  linear modes  $(\omega_k, \Phi_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , solutions of:

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \Phi_k = \mathbf{0}, \quad (2)$$

obtained by considering the eigensolutions of the undamped, free and linearized Eq. (1). Then, we expand the solution  $\mathbf{x}(t)$  on this basis, i.e. we seek a solution for  $\mathbf{x}(t)$  on the form:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \Phi_k q_k(t). \quad (3)$$

Using the orthogonality properties of the modes, one can show that the modal coordinates  $q_k(t)$  verify for all  $k = 1, \dots, K$ :

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \sum_{i,j=1}^K \beta_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i,j,l}^K \gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k, \quad (4)$$

85 with  $Q_k = \Phi_k^T \mathbf{g} / \Phi_k^T \mathbf{M} \Phi_k$  and where the modal damping has been assumed uncoupled (an assumption valid for small damping, even with non proportional  $\mathbf{C}$  matrix [23]). The values of the nonlinear coefficients  $\beta_{ij}^k$  and  $\gamma_{ijl}^k$  can be computed in practice by several methods (see e.g., among others [24, 22]). The same set of equations is obtained after modal expansions of analytical models of beams, plates and shells [5, 25, 13, 26].

To this end, the model size has been reduced from  $N$  to  $K$  (with, hopefully,  $K \ll N$ ). However, in practice, 90 the choice of the linear mode basis (the  $K$  retained linear modes) is not an easy task and a further reduction of the model size can be done with the help of the nonlinear mode framework. In the same way than for defining the linear modes (Eq. (2)), we consider the underlying conservative model (4) in free vibrations ( $\xi_k = Q_k = 0 \forall k$ ). Using normal forms, as introduced in [9, 10, 27], it is possible to simplify model (4) by introducing the following nonlinear change of coordinates, for all  $k = 1, \dots, K$ :

$$q_k = u_k + \mathcal{P}_k^{(2)}(u_i, \dot{u}_i) + \mathcal{P}_k^{(3)}(u_i, \dot{u}_i), \quad (5)$$

95 where  $\mathcal{P}_k^{(p)}(u_i, \dot{u}_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , is a polynomial function of  $(u_i, \dot{u}_i)$  containing monomial terms of order  $p$  only (For instance, for  $p = 2$  and  $K = 2$ , the monoms of  $\mathcal{P}_k^{(2)}$  are  $u_1^2, u_1 u_2, u_2^2, \dot{u}_1^2, \dot{u}_1 \dot{u}_2, \dot{u}_2^2$  [10]). By substituting  $q_k$  for  $u_k$  in Eq. (4) using Eq. (5), it is possible to choose the coefficients of the monomials of  $\mathcal{P}_k^{(p)}(u_i, \dot{u}_i)$  in order to cancel most of the nonlinear terms in (4). More precisely, all the non resonant nonlinear terms can be cancelled. Nonlinear monomials are often resonant because of the occurrence of internal resonances. Some 100 others are naturally resonant (it is the case for some cubic ones), i.e. without the occurrence of a particular internal resonance (see [5, 10] for details about internal resonances and resonant terms). If we assume here that there are no internal resonances, the initial dynamical system (4) is replaced by the following one, for all  $k = 1, \dots, K$ :

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k + \mathcal{Q}_k^{(3)}(u_i, \dot{u}_i) = 0, \quad (6)$$

105 in which  $\mathcal{Q}_k^{(3)}(u_i, \dot{u}_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$  denotes a polynomial function of  $(u_i, \dot{u}_i)$  of order 3 only. All coefficients of the monomials of  $\mathcal{P}_k^{(p)}$  and  $\mathcal{Q}_k^{(3)}$  are formally known as functions of the coefficients  $\beta_{ij}^k$  and  $\gamma_{ijl}^k$  of the initial dynamical system (4) [10].

This new dynamical system (6) is called the normal form of the initial one (4) and has two interesting properties. First, it involves much less nonlinear monomials. In particular, all quadratic terms have been cancelled, since they are all non-resonant, and it remains only cubic terms. Second, the only remaining (cubic) 110 nonlinear terms are such that they don't break the invariance of the oscillators of the normal form (6). It means that if a particular motion is initiated on a particular normal oscillator only, no energy is given to the others such that the motion remains on this oscillator only. Mathematically, if the motion is initiated on the  $i$ -th. normal coordinate, at  $t = 0$   $u_i \neq 0, \dot{u}_i \neq 0$  and for all the others the initial conditions are zero:  $u_j = 0, \dot{u}_j = 0, \forall j \neq i$ , then this latter property remains for all  $t > 0$ . In the  $K$ -dimensional phase space, the trajectory of the solution 115  $q_k(t) \forall k$  remains on a curved manifold (called the  $i$ -th invariant manifold), which is tangent to the  $i$ -th linear eigen-plane around the equilibrium point  $q_k = 0 \forall k$ . These properties lead to the concept of a nonlinear normal mode (NNM), here defined as an invariant manifold of the phase space, for which the above normal form theory enables to directly compute the oscillations by using (6). Moreover, the geometry of the curved manifold is defined by the nonlinear change of variables (5).

120 If a nonlinear modal motion on the  $i$ -th NNM is considered,  $u_j = 0, \dot{u}_j = 0, \forall j \neq i$  and the normal dynamics (6) reduces to [10]:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i + \Gamma_1 u_i^3 + \Gamma_2 u_i \dot{u}_i^2 = 0. \quad (7)$$

This equation is exact up to the order 3 in  $(u_i, \dot{u}_i)$ , since Eqs. (5) and (6) are obtained after truncated asymptotic expansions. It defines the nonlinear free oscillations on the  $i$ -th. NNM and in particular the dependence of the free oscillation frequency  $\omega_{\text{nl}}$  as a function of the amplitude (energy) of the motion, often referred as the backbone curve [5] or the frequency - energy plot [28]. A first order perturbative solution of (7) leads to:

$$u_i(t) = \epsilon a_1 \cos(\omega_{\text{nl}}t + \varphi), \quad (8)$$

with [10]

$$\omega_{\text{nl}} = \omega_i (1 + T\epsilon^2 a_1^2) \quad \text{and} \quad T = \frac{3\Gamma_1 + \Gamma_2 \omega_i^2}{8\omega_i^2}, \quad (9)$$

where  $\epsilon \ll 1$  is a bookkeeping symbol to remind that the amplitude  $\epsilon a_1$  of the motion needs to be small for the above expressions to be valid. The so-called backbone curve is obtained by plotting  $\omega_{\text{nl}}$  as a function of  $\epsilon a_1$ .

To observe this particular ‘‘one NNM’’ motion in the physical space, one can introduce  $u_i(t)$  defined by Eq. (8) into the nonlinear change of variables (5), to obtain:

$$q_i(t) = u_i(t) + o(\epsilon^2), \quad q_j(t) = o(\epsilon^2), \quad \forall j \neq i, \quad (10)$$

so that, back to Eq. (3), one shows that:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_i u_i(t) + o(\epsilon^2) \simeq \Phi_i \epsilon a_1 \cos(\omega_{\text{nl}}t + \varphi). \quad (11)$$

The above equation (11) shows that at first order, i.e. for small oscillations amplitude, the only nonlinear effect is the free oscillation frequency dependence upon the motion amplitude. Conversely, the motion onto one NNM is synchronous and has the shape of the  $i$ -th mode shape. As shown in a series of article [10, 29, 11, 14], the present normal form approach is very efficient to predict the right hardening / softening trend of a particular NNM, defined by coefficient  $T$  of Eq. (9), since coefficients  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  are functions of all the  $\beta_{ij}^k$  and  $\gamma_{ijl}^k$  and thus embed the non resonant effect of all the  $K$  linear modes of Eq. (4).

When forced oscillations are considered, the normal form (8) can still be considered (and valid at first order [30]), by adding damping and forcing terms of the initial dynamical system (4):

$$\ddot{u}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i + \Gamma_1 u_i^3 + \Gamma_2 u_i \dot{u}_i^2 = Q_i. \quad (12)$$

The above equation thus enables to predict the forced resonant oscillations of the system in the frequency vicinity of the  $i$ -th. NNM.

### 2.1.2 Higher order effects

To consider higher order effects, that emerge for higher motion amplitude, we correct the result of Eq. (8) by adding more harmonics. Since the nonlinearity in Eq. (7) is odd, the constant and second harmonics have a zero amplitude, so that a higher order perturbative development gives:

$$u_i(t) = \epsilon a_1 \cos \phi + \epsilon^3 a_3 \cos 3\phi, \quad (13)$$

with  $\phi = \omega_{\text{nl}}t + \varphi$ . Following the same approach, Eq. (11) is replaced by:

$$\mathbf{x}(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^K \Phi_k b_{k0} + \epsilon \cos \phi \left[ \Phi_i b_{i1} + \epsilon^2 \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^K b_{k1} \Phi_k \right] + \epsilon^2 \cos 2\phi \sum_{k=1}^K \Phi_k b_{k2} + \epsilon^3 \cos 3\phi \sum_{k=1}^K \Phi_k b_{k3} + o(\epsilon^4). \quad (14)$$

where the  $b_{kh}$ ,  $k = 1 \dots K$  and  $h = 1, 2, 3$  depend on  $a_1$ ,  $a_3$  and the change of variables (5). One can observe two effects of the higher order nonlinearities. Firstly, they bring supplementary harmonics in the signal. The continuous (H0) and second (H2) harmonics are the direct consequence of the polynomial  $\mathcal{P}_k^{(2)}$  in the change of variables (5). The third (H3) harmonics is the conjoint consequence of the polynomial  $\mathcal{P}_k^{(3)}$  and the third harmonics in the normal coordinate  $u_i$  (Eq. (13)), the latter created by the nonlinear normal dynamics (terms  $u_i^3$  and  $u_i \dot{u}_i^2$  in Eq. (7)). Secondly, the deformed shape of  $\mathbf{x}(t)$  depends on the motion amplitude and on time (the motion is no more synchronous since it depends on the contribution of all the deformed shapes  $\Phi_k$  in a time-dependent manner). Indeed, even if the dynamical deformed shape of the NNM is mainly governed by  $\Phi_i$ , oscillating at H1 at order  $\epsilon$ , it is corrected by second order terms in  $\epsilon^2, \epsilon^3$ , proportional to the other mode shapes  $\Phi_k$ ,  $k \neq i$ . However, those two nonlinear manifestations are of the second order with respect to the free oscillation frequencies and are for this reason neglected in the following.

### 2.1.3 Comparison with other theories

The normal form approach introduced in the previous section leads to naturally define a nonlinear (normal) mode as an invariant solution of the underlying unforced conservative system (Eq. (1) with  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ). Since the obtained solution moves on an invariant manifold of the phase space, the present approach is equivalent to the one introduced by Shaw and Pierre, who defined a NNM as an invariant manifold of the phase space [31, 32]. Equivalently, other authors ([28] and reference therein) extended the initial definition of Rosenberg [33] and defined a NNM as a periodic solution of the conservative system in free oscillations. Since a periodic orbit is by nature invariant, this second definition implies the first one. Conversely, a theorem due to Lyapunov [34, pp. 361, 386] shows that any smooth nonlinear  $N$  degrees of freedom 2nd. order conservative dynamical system presents  $N$  families of periodic orbits around any stable equilibrium point, which coincide with the invariant manifolds [35]. All those definitions of a NNM are thus equivalent and all address the same concept. On the contrary, the extension of the nonlinear mode concept to damped systems is still under extensive research (see e.g. [27, 36]).

## 2.2 Nonlinear mode identification

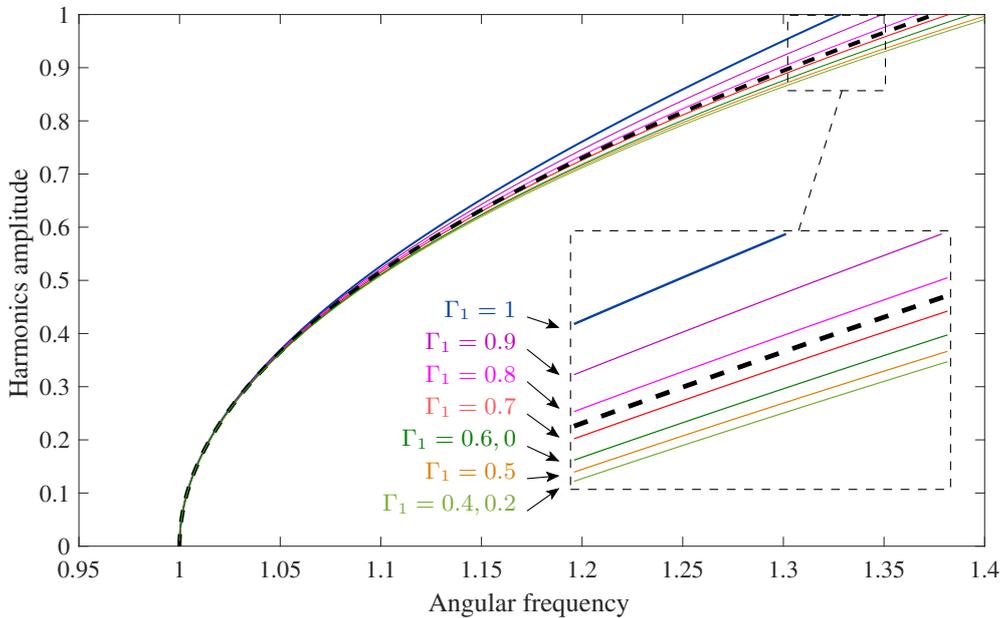


Figure 1 – Backbone curves: amplitude of the first harmonic (corresponding at first order to  $\epsilon a_1$ ) of the response as a function of the oscillation frequency  $\omega_{nl}/\omega_i$  of oscillator (7) solved with ANM/HBM. Nine values of  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  are considered as specified on the figure:  $\Gamma_1 \in \{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2, 0\}$  and  $\Gamma_2 \in \{0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.4, 3\}$ , respecting  $\Gamma_0 = \Gamma_1 + \Gamma_2 \omega_i^2/3 = 1$ . The solution at first order for  $\Gamma_0 = 1$  is also plotted (dashed black).

A first and basic idea to identify the model would be to experimentally estimate all the  $\beta_{ij}^k, \Gamma_{ijl}^k$  coefficients of the modal model (4). Considering the huge amount of coefficients (for a  $N = 10$  degrees of freedom model, the model involves  $N^3 = 10^3 \beta_{ij}^k$  and  $N^4 = 10^4 \Gamma_{ijl}^k$  coefficients.), this is an impossible task in practice. In contrast, the idea proposed in this article is to use the power of the normal form approach.

Using normal forms to exhibit a reduced order model that is then identified using experiments has been considered in the past in the case of internal resonances in plates and shells [19, 37, 38]. Here, we restrict ourselves on only one NNM, characterized at first order by the normal form written in Eq. (7). We then propose here to characterize and identify this NNM by experimentally identifying the values of the parameters of Eq. (7), namely the linear oscillation frequency (or eigenfrequency)  $\omega_i$  and the nonlinear coefficients  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . In practice, we propose to identify the NNM model by measuring the backbone curve.

At first order, the backbone curve is equivalent to a parabola in the plane  $(\omega_{nl}, \epsilon a_1)$ , of equation (9), whose curvature is given by  $T$  which depends on the two nonlinear coefficients  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ . Consequently, an infinite number of values of  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  leads to the same value of  $T$  and thus, at first order, to the same backbone curve. Fig. 1 shows several backbone curves for 9 values of  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  leading to the same value of  $T$  and numerically

computed with the software Manlab with the Harmonic Balance Method and the asymptotic numerical method (HBM/ANM). It enables the numerical continuation of periodic solutions ([39]). The simulations of Fig. 1 can be considered as a reference since 12 harmonics have been used. They show that under a reasonably high amplitude range ( $a < 0.5$ ), all the curves are merged with a single parabola, so that they are all equivalent to the solution of a classical Duffing oscillator:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i + \Gamma_0 u_i^3 = 0, \quad (15)$$

with

$$\Gamma_0 = \frac{8\omega_i^2 T}{3} = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 \omega_i^2}{3}. \quad (16)$$

Since we are interested in a first order identification of a NNM, we propose here to simply characterize a NNM by the Duffing oscillator of Eq. (15), which is able to efficiently capture the first order behaviour of the NNM. We then identify  $\Gamma_0$  (which embeds the effect of  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ ) by fitting a parabola on the experimental backbone curve.

Figure 1 also shows that the differentiated effect of  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  appears at higher amplitudes. It would be theoretically possible to fit an order four polynomial on the curves to separately identify  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ . This point is left out of the scope of the present paper.

It is widely known [5] that the incurvation of the backbone curve, the so called hardening / softening behaviour of the considered mode, is associated to the order of nonlinearities: a hardening behaviour comes from cubic nonlinearities while a softening behaviour is due to quadratic nonlinearities. One can remark that Eq. (7) only uses cubic coefficients. It is in fact a consequence of the normal form theory and the cubic coefficients  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  embed both the quadratic and cubic nonlinearities appearing the equations of motion of the dynamical system [10]. Using this formalism, the type of nonlinearity is still indicated by the incurvation of the backbone through the sign of  $T$  or  $\Gamma_0$ . If  $\Gamma_0 < 0$  the NNM is softening while it is hardening if  $\Gamma_0 > 0$ .

### 2.3 Some particular properties

As seen previously, we propose to identify a nonlinear mode as the Duffing oscillator (15) using its backbone curve, which is its solution in free vibrations. In practice, as seen in the following, some experimental procedure will rely on a forced excitation of the system. This section clarifies the concepts of amplitude resonance, phase resonance and their relations to particular points of the free and forced frequency responses of a Duffing oscillator.

We consider the following forced Duffing oscillator associated to Eq. (12) with  $u \equiv u_i$ ,  $\omega_0 \equiv \omega_i$ ,  $\xi \equiv \xi_i$ ,  $Q \equiv Q_i$  and  $\Gamma_0$  defined by Eq. (16):

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u + \Gamma_0 u^3 = Q. \quad (17)$$

To consider universal results, it is worth noting that (17) can be rescaled in amplitude and time by defining:

$$\bar{t} = \omega_0 t, \quad \bar{u} = \frac{\sqrt{\Gamma_0}}{\omega_0} u, \quad (18)$$

to obtain the following equation:

$$\ddot{\bar{u}} + 2\xi\bar{u} + \bar{u} + \bar{u}^3 = \bar{Q}, \quad (19)$$

with  $\bar{u} = d\bar{u}/d\bar{t}$ . The above equations shows that the forced response of any Duffing oscillator qualitatively depends on two parameters only: the damping factor  $\xi$  and the forcing  $\bar{Q}$ . In free oscillations, no free parameters remains after the scaling, so that the free response of any Duffing oscillator can be displayed by a single backbone curve, provided the scaling of Eq. (18) is applied. In the following, we shall equivalently consider Eq. (17) with  $\Gamma_0 = 1$  and study its response as a function of frequency  $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$  in the frequency domain.

When measuring the response of Eq. (17) in free or forced vibrations, several particular behaviours can be considered.

### 2.3.1 Phase resonance

The phase resonance is first considered. It is the particular case for which the excitation term  $Q(t)$  in Eq. (17) exactly cancels, for all time  $t$ , the damping term  $2\xi\omega_0\dot{u}$ , so that the oscillator behaves as if it was in undamped free oscillations. For a linear oscillator ( $\Gamma_0 = 0$ ) it is well known [40, 23] that a sine forcing  $Q(t) = Q_0 \cos \Omega t$  with  $\Omega = \omega_0$  achieves this goal. In this case, the displacement  $u(t)$  is in phase quadrature with  $Q(t)$  (if  $u(t) = u_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ ,  $\varphi = -\pi/2$ ). In the nonlinear case, since the solutions of Eq. (17) are periodic but often multiharmonic, it is shown in [41] that the same result is obtained by balancing each harmonic of the damping term by a corresponding harmonic in the forcing. More precisely, we look at the solution of Eq. (17) under a monophasic periodic motion, with a phase lag of  $\pi/2$  with respect to the periodic forcing:

$$u(t) = \sum_{h=1}^{+\infty} u_h \cos h\Omega t, \quad Q(t) = \sum_{h=1}^{+\infty} Q_h \sin h\Omega t. \quad (20)$$

The time derivatives of  $u(t)$  and  $u^3(t)$  can be written:

$$\dot{u}(t) = -\sum_{h=1}^{+\infty} h\Omega u_h \sin h\Omega t, \quad \ddot{u}(t) = -\sum_{h=1}^{+\infty} h^2\Omega^2 u_h \cos h\Omega t, \quad u^3(t) = \sum_{h=1}^{+\infty} w_h(u_i) \cos h\Omega t, \quad (21)$$

where  $w_h(u_i)$  is the  $h$ -th. harmonics of  $u^3$  that depends on  $u_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ . Introducing the above Fourier series expansions in Eq. (17) and balancing the sine and cosine terms (i.e. applying the harmonic balance method) leads to, for all  $h \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - h^2\Omega^2) u_h + \Gamma_0 w_h(u_i) = 0, \\ -2h\xi\omega_0\Omega u_h = Q_h, \end{cases} \quad (22)$$

equations being equivalent in pairs to:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u + \Gamma_0 u^3 = 0, \\ -2\xi\omega_0 \dot{u} = Q. \end{cases} \quad (24)$$

Eq. (24) is exactly the underlying undamped free oscillator, equivalent by definition to the nonlinear mode. Its solution (obtained by solving Eqs. (22)) gives the frequency of oscillations and the amplitude of each harmonics as a function of the first one ( $\Omega = \omega_{nl} = f(u_1)$ ,  $u_h = f(u_1) \forall h > 1$ ), the so-called backbone curve. Then, Eq. (23) gives the value of the forcing harmonics as a function of  $u_h$  to exactly balance the damping term  $2\xi\omega_0\dot{u}$ .

As a conclusion, the above considerations show that it is possible to choose the shape of the forcing signal  $Q(t)$  so that it exactly balance the damping term, implying that the oscillations  $u(t)$  are those of the underlying undamped and unforced oscillator, equivalent to oscillations on the nonlinear mode. In practice, one has to find the frequency  $\Omega = \omega_{nl}$  and the right amplitude of  $Q_h$  for which the phase lag of each harmonics of  $Q(t)$  with respect to the corresponding one of  $u(t)$  is  $\pi/2$ .

In practice, however, as shown by Eq. (13), the higher harmonics of  $u(t)$  (and thus of  $\dot{u}$ ) are often much smaller than the first one, so that considering the following single sine signal for  $Q(t)$ :

$$u(t) \simeq u_1 \cos \omega_{nl} t \quad \Rightarrow \quad Q(t) = -2\xi\omega_0\omega_{nl}u_1 \sin \omega_{nl} t, \quad (26)$$

is a practical excellent application of the phase resonance. One has consequently to apply a  $\pi/2$  phase lag between the first harmonics of  $Q(t)$  and  $u(t)$  and plot the oscillations frequency  $\Omega = \omega_{nl}$  as a function of  $u_1$  to obtain the backbone curve of the nonlinear mode.

### 2.3.2 Frequency response

Fig. 2 shows the frequency response of the Duffing oscillator (17) for  $\Gamma_0 = 1$  and  $\xi = 0.1$ . They are numerically obtained with the harmonic balance method and the Asymptotic Numerical Method (HBM/ANM), implemented in the software package Manlab [39], which enable the continuation of periodic solutions of (17), by computing the Fourier coefficients of  $u(t)$ :

$$u(t) = u_0 + \sum_{h=1}^H (u_h^c \cos h\Omega t + u_h^s \sin h\Omega t) = u_0 + \sum_{h=1}^H u_h \cos(h\Omega t + \varphi_h). \quad (27)$$

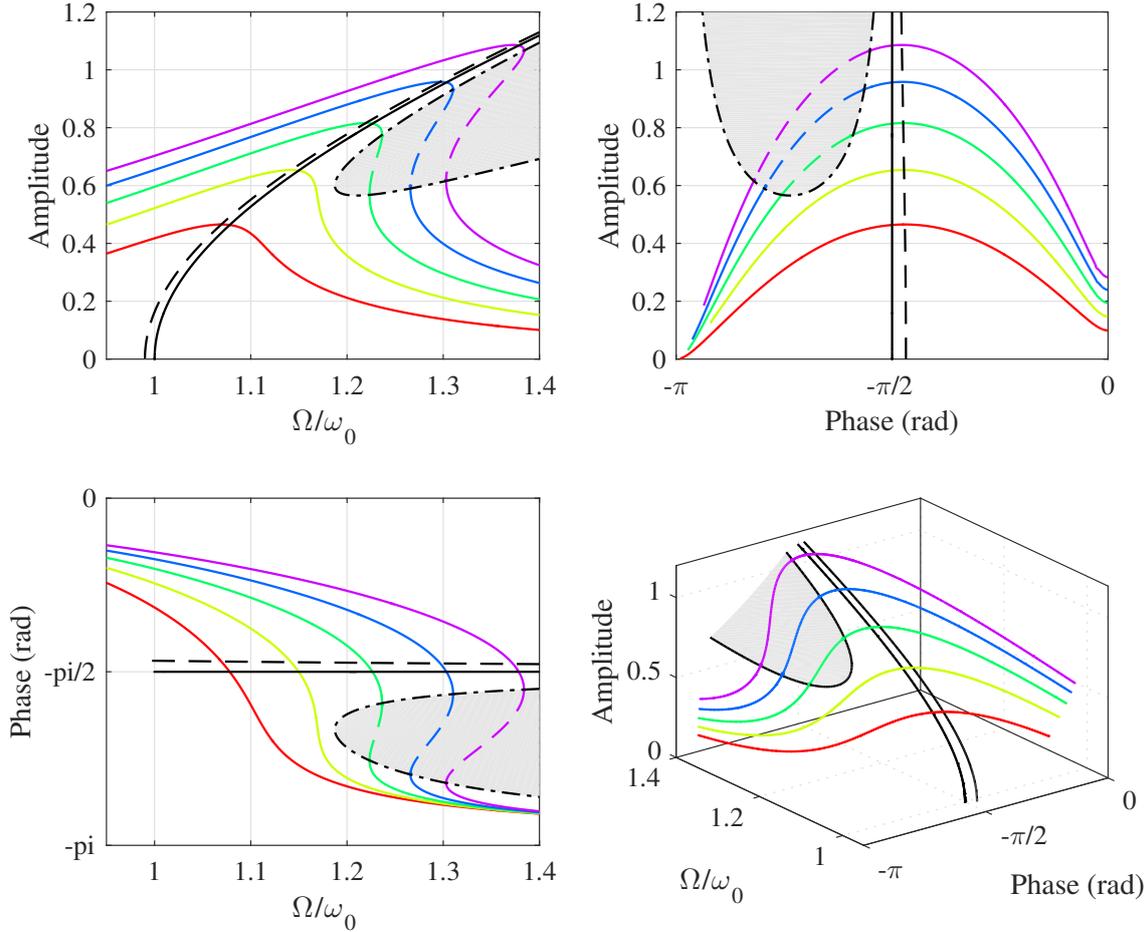


Figure 2 – Frequency responses (thin rainbow lines,  $F=0.1$  0.15 0.2 0.25 0.3), continuation of the amplitude (dashed black line) and phase (solid black line) resonances, and continuation of the fold point (dash-dotted black line) for the system (17).

Since a large number of harmonics  $H$  is taken into account, the obtained plots can be considered as reference solutions. Fig. (2) shows the amplitude and phase of the first harmonics ( $u_1 = \sqrt{(u_1^c)^2 + (u_1^s)^2}$ ,  $\varphi_1 = -\text{atan}(u_1^s/u_1^c)$ ) as a function of  $\Omega/\omega_0$ . A number of remarkable properties of this frequency response can be drawn.

- The forced frequency response curves are the solutions of (17) with  $Q(t) = Q_1 \cos \Omega t$ . They are shown in colored lines, for different forcing amplitudes  $Q_1$ . The dashed part of the curves indicates the unstable region, associated to the multivalued parts of the curves, which leads to the jump phenomenon.
- The backbone curve, equivalent to a phase resonance, is computed by solving Eq. (17) in undamped free oscillations. It is shown in solid black line and is precisely associated to a  $\varphi = -\pi/2$  phase lag between  $u(t)$  and  $Q(t)$ .
- The amplitude resonance, which is the locus of the maxima of amplitude of each frequency response, is obtained by numerically following a singular point of the frequency-amplitude function [42, 43]. It is plotted in dashed black line.
- The locus of the saddle-node bifurcation, delimiting the jump-down and the unstable region, is obtained by numerically following a singular point of amplitude-frequency function [42, 43] and is plotted in dash-dotted black.

It is remarkable that for a damped system, the backbone curve – equivalent to a phase resonance and obtained either by locking on the phase resonance or by following the free oscillations – is distinct from the amplitude resonance, obtained by interpolating the maxima of amplitude of the frequency responses. This difference is here displayed for moderately damped system (the figure corresponds to  $\xi = 0.1$ ) and should be negligible for lightly damped systems. Often in the literature, this difference is neglected because analytical solutions

---

obtained by a first order perturbative solution give equal amplitude and phase resonances. One can notice that  
275 the backbone curve is located between the amplitude resonance and the upper saddle node bifurcation, close to  
the right (upper frequencies) of the maxima, and always in the stable region.

Another remarkable result shown on Fig. 2 is that the phase  $\varphi_1$  is a monotonous decreasing function of the  
forcing frequency  $\Omega$ , whereas the amplitude  $u_1$  is multivalued.

## 2.4 Experimental strategies

280 Experimentally, the easiest way to obtain a backbone curve is to measure several frequency responses for  
different vibration amplitudes and to seek the amplitude resonance as the locus of the maxima of the responses.  
The frequency response around resonance for a given amplitude is obtained by exciting at a given frequency,  
waiting for the steady state regime, recording the amplitude of motion, increasing or decreasing the frequency by  
a small step, and repeating until the forced response is obtained in the required frequency range. This stepped  
285 sine method is used in [44] for measuring backbone curves of gongs. Obtaining the backbone using this technique  
is technically simple but the whole procedure is long and tedious, even when it is automated. Moreover, it was  
reminded in Sec. 2.3 that the amplitude resonance can be distinct from the phase resonance. Note also that the  
forced responses obtained with this stepped sine method are sensible to the jump phenomenon. In the following,  
this method will be referred as Stepped Sine Testing (SST).

290 A better estimation of the backbone curve can be obtained by the Nonlinear Resonant Decay Method [41]  
(NLRD), consisting in two steps. In the first one, the system is set at phase resonance for a given mode using  
force appropriation techniques; in the second step, the excitation is shut down and the system's free oscillations  
are measured. The estimation of the instantaneous amplitude and frequency, for instance with the help of  
the Hilbert transform or a Fourier or wavelet transform, allows one to obtain the backbone curve, which is  
295 the same as the locus of the phase resonance. This method has been applied to numerous cases for nonlinear  
identifications [45, 46, 47]. A minor drawback is that the final result of this method relies on the accuracy of  
the algorithm estimating the instantaneous frequency. In the experimental part of this work, the PLL method  
described hereafter will be used to initially set the system in phase resonance.

A third strategy consists in using experimental continuation techniques. Two distinct techniques can be  
300 cited. The first one, which is used hereafter in the present study, consists in tracking the backbone curve  
by locking the system at the phase resonance using a Phase-Locked-Loop (PLL), as it was recently done by  
Mojrzisch [17] and Peter [48, 18] in this context. Phase control in the context of nonlinear vibrations seems to  
have been used firstly by Sokolov & Babitsky [49], who aimed to maintain a self-excited system at resonance or  
exploring its frequency-amplitude relation. They take advantage of the monotonous behaviour of the frequency-  
305 phase curves for a limited set of non linear systems. An extension of this method is used by Mojrzisch *et*  
*al.* [50, 17] for measuring forced responses around resonance by sweeping the phase between excitation and  
vibration. The use of the PLL in this context proves to be robust and efficient. Peter *et al.* [18] use a similar  
design in order to track backbone curves of nonlinear systems. However, no nonlinear identification is made  
consequently to the experimental results. The obvious advantage of the PLL method over the resonant decay  
310 method is that it directly yields the instantaneous frequency and amplitude, thus avoiding the use of a Fourier  
or wavelet transform. However the technique may have several drawbacks, especially when the phase is not  
monotonous, for instance when internal resonances are involved [48]. This technique is used in this paper  
for the experimental characterization of nonlinear systems and is thoroughly described in Sec. 3. The second  
continuation technique, mentioned here for the sake of completeness, is the control-based continuation, recently  
315 described and used by Sieber [51], Renson [52] and Bureau [53], that combines a stabilizing feedback control  
and a path-following technique, as in numerical continuation methods. It allows to measure nonlinear systems  
without any assumption, *e.g.* the monotonicity of the phase, but involves more experimental efforts. This  
method is however more general than the PLL method.

## 3 Phase-locked loop controller

### 3.1 Design

320 We consider a mechanical vibratory system of displacement (output) response  $x(t)$  driven by an input force  
 $F(t)$ . The principle behind the phase-locked loop is to adjust the frequency  $\Omega$  of an harmonic excitation signal

so that a prescribed phase lag  $\varphi_c$  is imposed between the measured force signal  $F_{\text{meas}}(t)$  of the tested system and its response  $x(t)$ . Basically, the PLL is composed of a phase detector, a controller and a voltage-controlled oscillator (VCO) (see Fig. 3(a)), as described in Refs. [54, 17, 48, 18]. The phase detector gives an estimation  $\hat{\varphi}$  of the actual phase lag  $\varphi$  between the excitation and response signals; the difference  $e$  between the output  $\hat{\varphi}$  of the phase detector and the command  $\varphi_c$  is fed to an integral controller with gain  $K_I$ . The controller yields a correction  $y$  to an initial prescribed frequency  $\omega_{\text{ini}}$ . The result  $\Omega$  feeds the VCO exciting the nonlinear system to be controlled, with amplitude  $F$ . The PLL then automatically adjusts the frequency to obtain the intended phase lag.

Ref. [54] details the different possibilities for the practical realization of the phase detector. In our case, the phase and the amplitude of the first harmonic of both  $x$  and  $F_{\text{meas}}$  are detected using a synchronous demodulation (also known as homodyne detection and used in lock-in amplifiers [55]). By multiplying a signal by  $\cos \Omega t$  and  $\sin \Omega t$  and low-pass filtering the result, one is indeed able to recover the amplitude and phase of the component at  $\Omega$  contained in the signal (see Fig. 3(b)).

Two different measurements are possible using this PLL design:

- By setting the phase command  $\varphi_c$  at  $\pi/2$  (phase resonance) and varying the excitation amplitude  $F$ , the backbone can be recorded by measuring the amplitude of the first harmonic of  $x$ .
- Conversely, the PLL can also be used to measure the forced responses around resonance, even if it is unstable in open loop, by sweeping the phase  $\varphi_c$  over the range  $[0, -\pi]$  while keeping the injected force excitation  $F_{\text{meas}}$  constant.

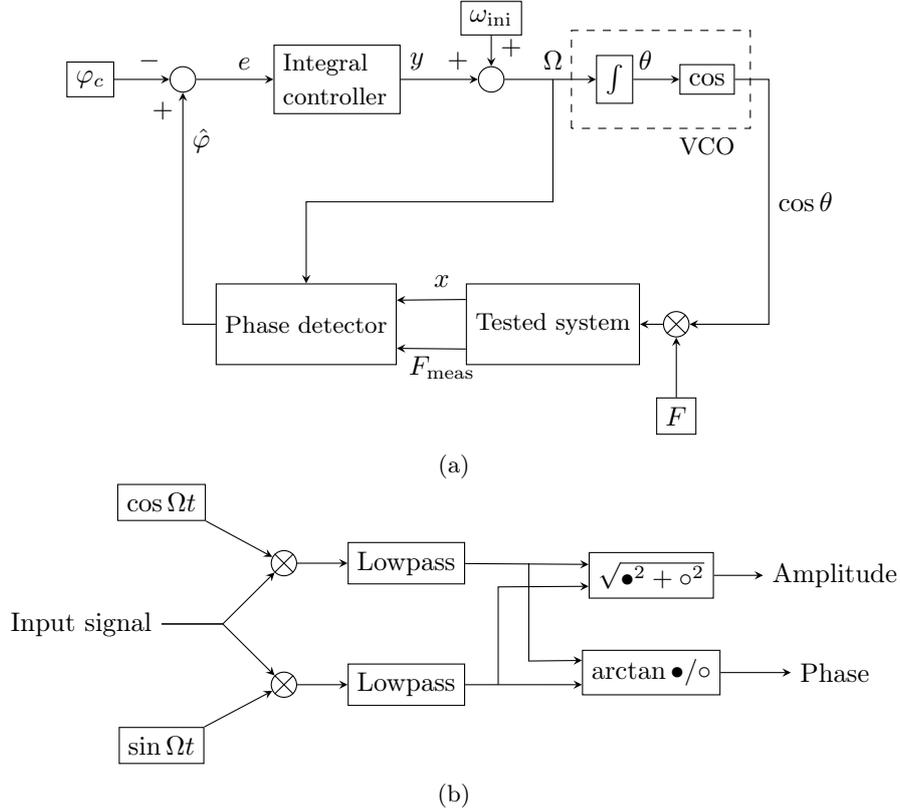


Figure 3 – (a) Scheme of the PLL.  $F$  and  $\varphi_c$  are the commands. (b) Implementation of the synchronous demodulation used in the phase detector.

## 3.2 Stability

We consider a mechanical systems whose behaviour is modelled by a the single Duffing oscillator of Eq. (17). We investigate in this section its stability when driven by a PLL controller described in the previous section. The stability of this controlled Duffing oscillator has already been studied by Fan [56] in the case of  $\varphi_c = \pi/2$ , that is when the PLL locks it in phase resonance. In the following, we extend these results to any value of the phase  $\varphi_c$ .

We consider the nonlinear phase-controlled system:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \hat{\Gamma}_0x^3 = F \cos \theta, & (28a) \\ \dot{\theta} = \omega_{\text{ini}} + y, & (28b) \\ \dot{y} = K_I e, & (28c) \\ e = (\hat{\varphi} - \varphi_c), & (28d) \\ \dot{\hat{\varphi}} = \omega_c(\varphi - \hat{\varphi}), & (28e) \end{cases}$$

where  $x$  is the system's response,  $\omega_0$  its natural angular frequency,  $\xi$  its damping factor,  $\hat{\Gamma}_0$  its cubic nonlinearity parameter and  $F$  the amplitude of the harmonic forcing.  $\dot{\theta} = \Omega$  denotes the frequency of the VCO,  $\varphi$  is the actual phase lag between response  $x(t)$  and excitation (see Eq. (29a)),  $\hat{\varphi}$  is the output of the phase detector and the estimation of  $\varphi$ ,  $K_I$  is the integral gain of the controller,  $y$  is the output of the controller. We assume here that the phase detector has a small delay and that it behaves as a perfect sensor with a first order low-pass filter of cut-off frequency  $\omega_c$ . In practice, higher order filters are used and the following developments are still valid for fast enough low pass filters.

The system is solved by an averaging method [57]. We rewrite (28) at first order by letting  $x_1 = x$  and  $x_2 = \dot{x}$ . A solution is then sought with the following form:

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(\theta + \varphi), & (29a) \\ x_2 = -a\omega_0 \sin(\theta + \varphi). & (29b) \end{cases}$$

Substituting Eqs. (29) in Eqs. (28), we obtain the following formulation in terms of amplitude and phase angle:

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{-1}{\omega_0} \left[ 2\xi\omega_0^2 a \sin(\theta + \varphi) - \hat{\Gamma}_0 a^3 \cos^3(\theta + \varphi) + F \cos \theta \right] \sin(\theta + \varphi), & (30a) \\ \dot{\varphi} = -y + \omega_0 - \omega_{\text{ini}} - \frac{1}{a\omega_0} \left[ 2\xi\omega_0^2 a \sin(\theta + \varphi) - \hat{\Gamma}_0 a^3 \cos(\theta + \varphi)^3 + F \cos \theta \right] \cos(\theta + \varphi), & (30b) \\ \dot{y} = K_I(\hat{\varphi} - \varphi_c), & (30c) \\ \dot{\hat{\varphi}} = \omega_c(\varphi - \hat{\varphi}), & (30d) \\ \dot{\theta} = \omega_{\text{ini}} + y. & (30e) \end{cases}$$

In the averaging method, it is assumed that the time dependent variables  $a$ ,  $\hat{\varphi}$ ,  $y$  and  $\phi$ , there first time derivatives and  $\dot{\theta} = \Omega$  vary at a slow time scale with respect to the periodic fast time scale. Averaging over a period (*i.e.* applying  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$  to the equations), we obtain the simplified equations:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\xi\omega_0 a - \frac{F}{2\omega_0} \sin \varphi, & (31a) \\ \dot{\varphi} = -y + \omega_0 - \omega_{\text{ini}} + \frac{3\hat{\Gamma}_0}{8\omega_0} a^2 - \frac{F \cos \varphi}{2a\omega_0}, & (31b) \\ \dot{y} = K_I(\hat{\varphi} - \varphi_c), & (31c) \\ \dot{\hat{\varphi}} = \omega_c(\varphi - \hat{\varphi}), & (31d) \\ \Omega = \omega_{\text{ini}} + y, & (31e) \end{cases}$$

where the frequency  $\Omega = \dot{\theta}$  becomes an additional variable. The Duffing oscillator in open-loop can be recovered by setting  $y(t) = 0$ , which implies that  $\omega_{\text{ini}} = \Omega$  is the prescribed excitation frequency.

Now, the fixed points  $(a_s, \varphi_s, \hat{\varphi}_s, y_s, \Omega_s)$  are sought by imposing  $\dot{a} = \dot{\varphi} = \dot{y} = \dot{\hat{\varphi}} = 0$ . At first, one obtains  $\varphi_s = \hat{\varphi}_s = \varphi_c$ : the actual and estimated phase of  $x(t)$  with respect to the forcing are equal to the command value  $\varphi_c$ . Moreover, the amplitude and phase of  $x(t)$  in the steady state are:

$$\begin{cases} a_s = \frac{-F}{2\xi\omega_0^2} \sin \varphi_c, & (32a) \\ \Omega_s = \omega_0 + \frac{3\hat{\Gamma}_0 F^2}{32\xi^2\omega_0^5} \sin^2 \varphi_c + \frac{\xi\omega_0}{\tan \varphi_c}, & (32b) \end{cases}$$

with the following correction to the initial frequency:

$$y_s = \omega_0 - \omega_{\text{ini}} + \frac{3\hat{\Gamma}_0 F^2}{32\xi^2\omega_0^5} \sin^2 \varphi_c + \frac{\xi\omega_0}{\tan \varphi_c}. \quad (33)$$

The fixed points defined by Eqs. (32) are those of a classical Duffing oscillator: the closed loop steady state response is the same than the open loop one. As a conclusion, the above results show that the system's behaves as if it was in open-loop, with its phase imposed by the PLL to its prescribed value  $\varphi_c$ .

The stability of the fixed point is studied by writing the jacobian matrix  $\mathbf{J}$  of (31a-d):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\xi\omega_0 & \frac{-F}{2\omega_0} \cos \varphi & 0 & 0 \\ \frac{3\hat{\Gamma}_0}{4\omega_0} a + \frac{F \cos \varphi}{2\omega_0 a^2} & \frac{F \sin \varphi}{2a\omega_0} & 0 & -1 \\ 0 & \omega_c & -\omega_c & 0 \\ 0 & 0 & K_I & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

and evaluating it at the fixed point using (32a):

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} -\xi\omega_0 & \frac{-F}{2\omega_0} \cos \varphi_c & 0 & 0 \\ \frac{-3\hat{\Gamma}_0 F}{8\xi\omega_0^3} \sin \varphi_c + \frac{2\xi^2\omega_0^3 \cos \varphi_c}{F \sin^2 \varphi_c} & -\xi\omega_0 & 0 & -1 \\ 0 & \omega_c & -\omega_c & 0 \\ 0 & 0 & K_I & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

The system is stable if the real parts of the eigenvalues of  $\mathbf{J}_s$  are strictly negative. We first consider the top left  $2 \times 2$  part of the jacobian matrix (35) that concerns the Duffing oscillator (19) in open-loop. By computing the eigenvalues  $\lambda$  and ensuring they have a strictly negative real part, one can derive the stability criterion:

$$G < \xi^2\omega_0^2, \quad (36)$$

where  $G$  is a function of  $F$  and  $\varphi_c$ :

$$G = \frac{3\hat{\Gamma}_0 F^2}{16\xi\omega_0^4} \cos \varphi_c \sin \varphi_c - \frac{\xi^2\omega_0^2}{\tan \varphi_c^2}. \quad (37)$$

By eliminating  $F$  between Eqs. (37) and (32a,b), one obtains two conditions equivalent to an instability region in the  $(a_s, \varphi_s, \Omega_s)$  space, shown in grey on Fig. 2, that is independent of  $F$ . Its limit can be plotted by computing  $a_s$  and  $\Omega_s$  as a function of  $\varphi_s$  and varying it. The unstable part of a given open-loop frequency response is consequently obtained by its intersection with the instability region, the limits being obtained at the two saddle-node bifurcations points. This instability region is also shown in light red in Fig. 4(a), for parameters  $\omega_0 = 1$ ,  $\Gamma_0 = 1$ ,  $\xi = 1 \times 10^{-2}$ . For a frequency response with  $F = 6 \times 10^{-3}$ , an unstable part is found, whereas for  $F = 3 \times 10^{-3}$ , the whole frequency response is stable.

We consider now the closed-loop system. The particular case  $\varphi_c = \pi/2$  is already treated in [56], with a different phase detector. Writing the determinant  $\det(\mathbf{J}_s - \lambda\mathbf{I})$  and applying the Routh-Hurwitz criterion, the following stability criterion is obtained:

$$K_I < (\xi\omega_0 + \omega_c)\xi\omega_0. \quad (38)$$

In the general case  $\varphi_c \neq \pi/2$ , the stability condition is more complex and the determinant writes

$$\det(\mathbf{J}_s - \lambda\mathbf{I}) = \xi\omega_0\omega_c K_I + \lambda\omega_c(K_I + \xi^2\omega_0^2 - G) + \lambda^2(2\xi\omega_0\omega_c + \xi^2\omega_0^2 - G) + \lambda^3(2\xi\omega_0 + \omega_c) + \lambda^4 \quad (39)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda^3 + \lambda^4. \quad (40)$$

Using the Routh-Hurwitz criterion, one shows that the system is stable if:

$$\alpha_i > 0, \quad (41)$$

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 > \alpha_1^2 + \alpha_3^2\alpha_0, \quad (42)$$

$$\alpha_3\alpha_2 > \alpha_1, \quad (43)$$

which translates in

$$\xi\omega_0\omega_c K_I > 0, \quad (44a)$$

$$2\xi\omega_0 + \omega_c > 0, \quad (44b)$$

$$G < 2\xi\omega_0\omega_c + \xi^2\omega_0^2, \quad (44c)$$

$$G < K_I + \xi^2\omega_0^2, \quad (44d)$$

$$\omega_c K < 4\xi^2\omega_0^2\omega_c + 2\xi^3\omega_0^3 + 2\xi\omega_0\omega_c^2 - 2\xi\omega_0 G, \quad (44e)$$

$$\begin{aligned} & \omega_c K_I^2 + K_I(2\xi^3\omega_0^3 + \xi^2\omega_0^2\omega_c - \xi\omega_0\omega_c^2 - (\omega_c - 2\xi\omega_0)G) \\ & - [4\xi^4\omega_0^4\omega_c + 2\xi^3\omega_0^3\omega_c^2 + 2\xi^5\omega_0^5 - (4\xi^3\omega_0^3 + 4\xi^2\omega_0^2\omega_c + 2\xi\omega_0\omega_c^2)G + 2\xi\omega_0 G^2] < 0. \end{aligned} \quad (44f)$$

Criteria (44a) and (44b) are naturally verified. Criterion (44c) limits the choice of  $\omega_c$  and states that the phase detector must be sufficiently fast. The gain  $K_I$  is chosen using criteria (44d, 44e, 44f). Note that (44f) does not always allow stability to be found. Only a strictly positive determinant (depending on  $G$ ) permits to find two separate roots and the region between them where the criterion is verified. Overall, from criteria (44a-44f), stability may involve the *a priori* knowledge of the nonlinearity.

Following the same procedure than for the open-loop case, an instability region is found for the PLL-driven oscillator, derived from criteria (44a-44f) along with Eqs. (37) and (32a,b) in which  $F$  has been eliminated. For any value of  $\varphi_c$ , the strictest criterion ensuring stability is found numerically and translated in a  $(a_s, \Omega_s)$  pair. Instability regions obtained for  $\omega_c=0.2$  (so that  $\omega_c \ll \omega_0$  and criterion 44c is respected) and several values of the integral gain  $K_I = 2 \times 10^{-4}$ ,  $4.7 \times 10^{-4}$  and  $1 \times 10^{-3}$  are plotted on Fig. 4(a). One can observe that the effect of the gain  $K_I$  is to move the instability region toward the high frequencies / amplitudes, which explains its stabilizing effect. Consequently, a given frequency response can be partially unstable (blue area) or stable (green and orange areas) depending on the gain and the position of the instability region. For any given excitation amplitude, there exists a limit value  $K_I^{\text{lim}}$  of the gain  $K_I$  for which the frequency response becomes fully stable. For  $F = 6 \times 10^{-3}$ ,  $K_I^{\text{lim}} = 10^{-3}$  since the green instability region is tangent to the frequency response of the oscillator.

The dependence of the limit gain  $K_I^{\text{lim}}$  on the forcing amplitude  $F$  is plotted on Fig. 4(b) using criteria (44a-44f) and Eq. (37). The curves are dependent on both the damping  $\xi$  in the system and the cut-off frequency of the low pass filter  $\omega_c$ , corresponding to the speed of the phase detector. The bigger  $\omega_c$ , the better the system can be controlled since the maximum amplitude that can be reached is higher. Also, when  $K_I$  tends to 0, the closed-loop maximum amplitude tends to a constant that is the maximum amplitude for the open-loop system to be stable; it can be retrieved by looking at criterion (44d) but it is also suggested by Fig. 4(a).

In Fig. 4(b), the reversed bell shape of the curves informs us that very good performance, *i.e.* a high excitation amplitude, can be reached at the cost of a precise adjustment of the controller: one can increase  $K_I$  only up to a point from which an increase will only worsen stability properties. However, there was no need for such performance in our experiment, especially if one is interested only in backbone curves; it was therefore relatively easy to find empirically a correct  $K_I$ .

In practice, a small proportional gain can be added to the controller for increasing the speed of the PLL without increasing the sensibility to noise. For the experimental implementation, a higher order filter (fourth order Butterworth filter) is also used in the phase detectors. This does not fundamentally change the stability properties: as shown in Fig. 4(b), the cut-off frequency  $\omega_c$  has an influence on the instability region of the PLL-driven system but as long as the filter, *i.e.* the phase detector, is fast enough, stability is ensured on the whole phase domain.

### 3.3 Numerical validation

In Fig. 5(a), the results of a MATLAB/Simulink simulation of a PLL-driven Duffing oscillator are compared with the numerical solutions using the HBM/ANM method with the software Manlab for numerical continuation [39]. The parameters used are close to those of an experimental system ( $\omega_0 = 394.9610 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\hat{\Gamma}_0 = 5.1054 \times 10^5 \text{ s}^{-2}$ ,  $\xi = 5 \times 10^{-4}$ ). The PLL was set with a starting frequency of  $392 \text{ rad.s}^{-1}$ , an integral gain of 10, a proportional gain of 0.5. The forcing starts at  $F=1 \text{ s}^{-2}$  for the backbone curve while it is maintained at  $F=10 \text{ s}^{-2}$  for the frequency response. It is noticeable that the backbone obtained with the PLL in forced regime is identical to the numerical solution in free regime. Moreover, when the phase is swept for a given amplitude of excitation, we see that the PLL is able to drive the system to the correct frequency and that we are able to recover the numerical solution, including in the unstable region which is stabilized by the PLL.

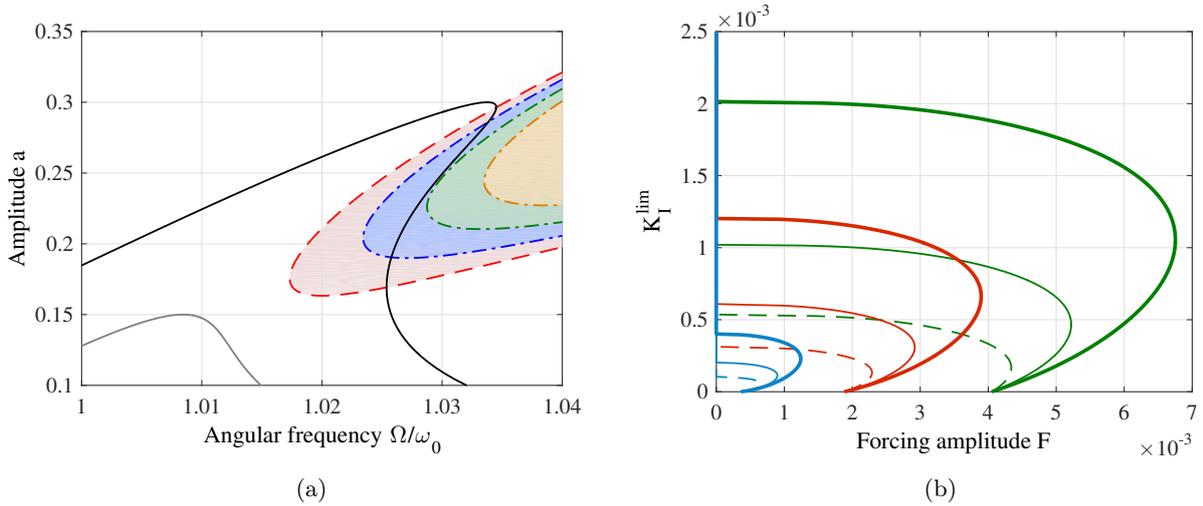


Figure 4 – (a) Frequency response of Duffing oscillator for  $F = 6 \times 10^{-3}$  (black solid line) and  $F = 3 \times 10^{-3}$  (solid gray line) and instability regions in open-loop (red dashed line / light red area), for  $K_I = 0.2 \times 10^{-4}$  (blue dashed-dotted line / light blue area), for  $K_I = 4.7 \times 10^{-4}$  (green dash-dotted line / light green area) and for  $K_I = 1 \times 10^{-3}$  (orange dash-dotted line / light orange area). (b) Limit gain  $K_I^{\text{lim}}$  for stability depending on forcing  $F$  for several configurations:  $\xi = 0.002$  (blue),  $\xi = 0.006$  (red),  $\xi = 0.01$  (green) and  $\omega_c=0.05$  (dashed line), 0.1 (thin solid line), 0.2 (thick solid line)  $\text{rad.s}^{-1}$ .

Both the backbone curve and the frequency response are preceded by a short transient regime, shown here for the sake of completeness, during which the PLL is self-adjusting: the frequency oscillates and the amplitude of vibration varies accordingly. In Fig. 5(b), one can check the precision and the speed of the phase detector: the delay is indeed very small between signal  $x$  and its first harmonic reconstructed using the outputs of the phase detector.

425

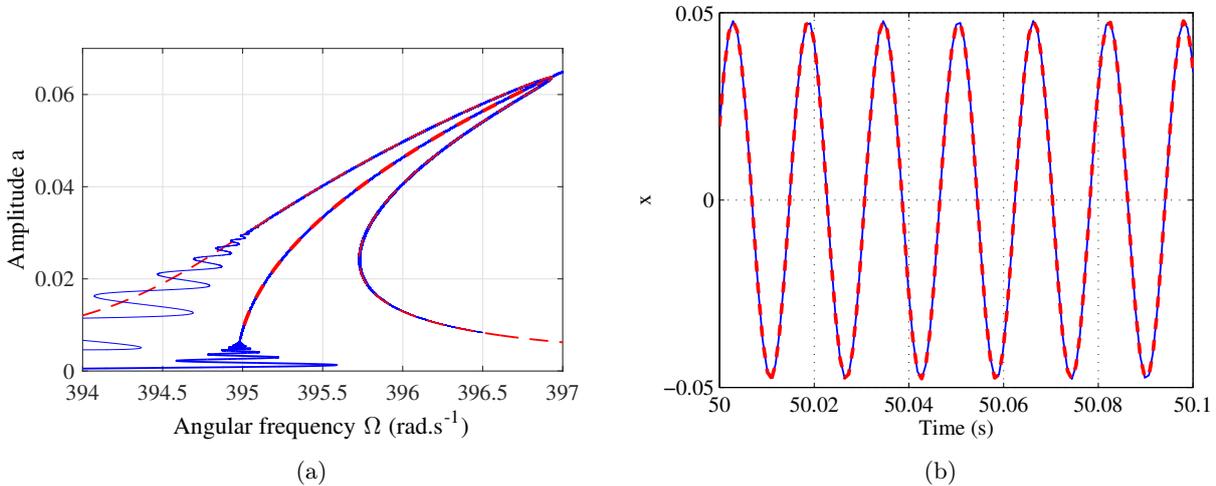


Figure 5 – (a) Comparison of the simulated response of the PLL-driven Duffing oscillator and the numerical Manlab solution: forced response by Manlab (dashed red line) and PLL (solid blue line), backbone curve by Manlab (thick dashed red line) (free) and by PLL (thick solid blue line) (forced).  $\varphi_c$  varies between  $\pi/6$  and  $11\pi/12$  rad. (b) Comparison of the motion  $x$  the PLL-driven Duffing oscillator (solid blue line) and first harmonic found using the phase detector (dashed red line).

---

## 4 Experiments

### 4.1 Setup

The proposed nonlinear identification method is applied to three different structures. The first one is a circular plate, identical to the one studied in [58, 19]. It is made of brass, has a radius of 110 mm and a thickness of 1.6 mm. The second structure is a chinese gong on which two modes are identified. The chinese gong has a diameter of 314 mm and a thickness of 1.5 mm approximately. The central area display a flat profile so that a hardening behaviour is expected for the fundamental nonlinear mode [59]. The third structure is a piezoelectric unimorph cantilever beam, that can be used for energy harvesting purpose. In this case, the nonlinear mode identification is done in the open and short-circuit configuration of the piezoelectric patch. The unimorph is constituted by a steel beam of dimensions  $120 \times 20 \times 0.75$  mm on which is glued a PZT ceramic PIC155 with dimension  $20 \times 60 \times 0.5$  mm. The placement and dimensions of the PZT ceramic are optimised for the first mode of the cantilever, according to [60]. The plate, the gong and the beam are represented in Figs. 6(b,c,d).

The chinese gong and the circular plate are excited by a non contact coil / magnet apparatus, already described and used in [19]; the magnet is placed close to an antinode of vibration of the mode to be identified. The force is directly proportional to the current in the coil and can thus be measured using the current monitoring output of the amplifier (B&K 2712). The plate is set-up horizontally, maintained with three thin wires, while the gong is set-up vertically, in playing conditions. The piezoelectric beam is base-excited by an electromagnetic shaker (B&K 4808) and a power amplifier (B&K 2712). The base acceleration and the beam velocity are measured using an accelerometer (PCB 352C65) and a laser vibrometer (Polytec PSV-400). The velocity is measured at an arbitrary point close to the free extremity of the beam.

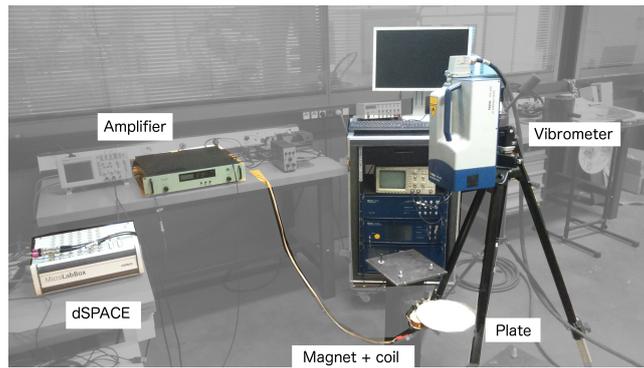
The setup is driven by a dSPACE MicroLabBox on which is implemented the control scheme using Matlab/Simulink. The sampling frequency is set to 50 kHz. The filter used in the phase detector has a cut-off frequency of 20 Hz. A picture of the setup is displayed in Fig. 6(a). For the sake of completeness, it should be mentioned that when the vibration exciter is an electromagnetic shaker, a second controller is used to correct  $F$ , avoiding force drops off near resonance [61] and maintaining the amplitude of injected force constant. It is verified *a posteriori* that this second closed-loop control is not needed in the case of the coil-magnet excitation.

In addition to the PLL measurement, two other measurement methods are used in order to validate the experimental procedure. The forced responses around resonance are measured with a stepped sine sweep excitation, as described in Sec. 2.4. A National Instrument acquisition card (NI PXIe-1071\*\*\*\*\*) is used for that matter, controlled by MATLAB in which the stepped sine is programmed. The NLRD method [41, 45] is also used. Ref. [45] mentions that a single point mono-harmonic excitation may be sufficient for satisfactory NNM isolation. Since the system is driven in phase quadrature, assuming that the phase quadrature of the first harmonic is sufficient, the NNM resonant decay should yield the free amplitude-frequency relationship when the excitation initiated with the PLL is turned off. On a side note, the PLL method could be implemented such as it verify the force appropriation criterion [41] considering several harmonics. In fact, the recent work by Peter [18] proposes a criterion using the higher harmonics to check a posteriori the correct isolation of the NNM, even if the phase resonance testing is implemented with a single harmonic.

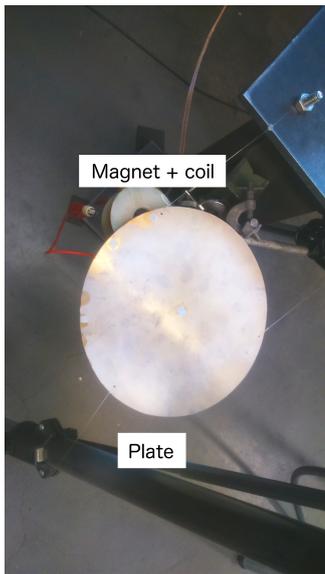
### 4.2 Axisymmetric and asymmetric modes of a circular plate

The first axisymmetric mode and the first asymmetric mode of the circular plate are considered. The operational deflection shapes displayed in Fig. 7 are recovered from a modal analysis done with the scanning laser vibrometer. The two asymmetric companion modes (2,0) have slightly different frequencies, due to unavoidable imperfections. The mode with the lowest frequency is referred as mode (2,0,1) and the one with the highest as mode (2,0,2). The effect of the mistuning of these two companion modes on the forced response have thoroughly been studied in [58, 19]. In these measurements on the circular plate, the integral gain of the PLL is set to 15, with a proportional gain of 0.5. Since the plate response is measured by the laser vibrometer (which measures the velocity), we impose a zero phase lag between forcing and velocity for the measurement of a backbone curve. Force responses measurement are obtained by varying the phase between  $-\pi/3$  and 1.2 rad, with a sweep rate of  $0.015 \text{ rad.s}^{-1}$ .

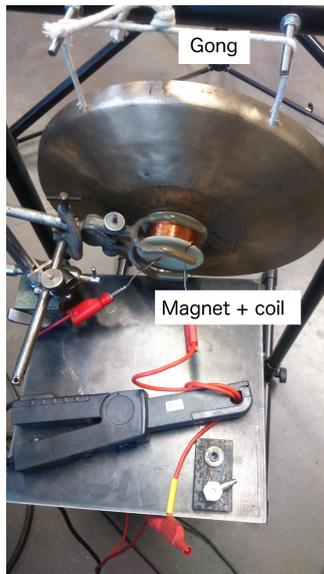
Figs. 8(a,b) displays the backbone curves obtained using the PLL. They also show several forced responses in amplitude and phase of the displacement for different excitation levels. The unstable region of the forced



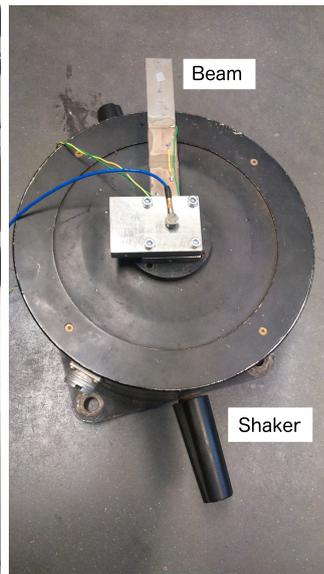
(a)



(b)

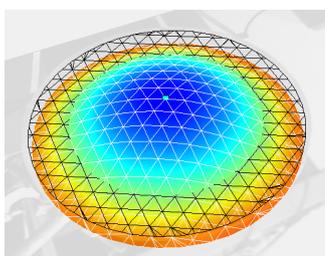


(c)

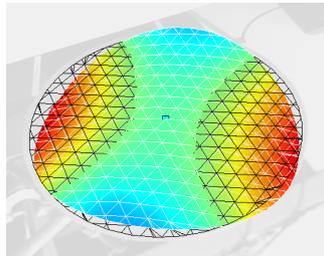


(d)

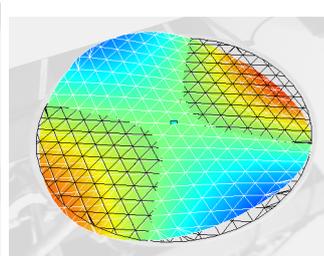
Figure 6 – Experimental setup : (a) Plate, magnet and coil apparatus, vibrometer, amplifier and dSPACE MicroLabBox, (b) circular plate, (c) Gong and coil, (c) piezoelectric beam, shaker and accelerometer.



(a)



(b)



(c)

Figure 7 – Operational shapes of the plate at frequencies of (a) the axisymmetric mode (0,1) (194 Hz) and the asymmetric companion modes (b) (2,0,1) (105 Hz) and (c) (2,0,2) (111 Hz)

response is stabilized and can be measured, even for high amplitudes. The backbone passes very close to the maximum of amplitude for each forced responses, as it is described in Sec. 2.

It is straightforward to fit a parabola (least-square with constant and quadratic coefficients) on the backbone obtained using the PLL (see Fig. 8(c)). The backbone obtained using the NLRD method and the corresponding fitted parabola are also plotted on Fig. 8(c). In this case the instantaneous frequency and amplitudes are recovered by taking the ridge of the Short-Time-Fourier-Transform of the decaying signal.

From the fitted parabolas, one can extract the nonlinear cubic coefficient  $\hat{\Gamma}_0$  and the linear frequency  $f_0 = \omega_0/2\pi$  appearing in Eq. (28a); Note that if  $x$  is the displacement,  $\hat{\Gamma}_0$  in Eq. (28a) is easily related to  $\Gamma_0$  of the NNM appearing in Eq. (17) with the help of Eq. (11):

$$\Gamma_0 = \hat{\Gamma}_0 \Phi_m^2, \quad (45)$$

where  $\Phi_m$  is the value of the modal shape at the measurement point (obtained theoretically or experimentally). The parameters  $f_0$  and  $\hat{\Gamma}_0$  are presented in Tab. 1 for the two methods. The identified coefficients and frequencies are identical, which cross-validates the techniques

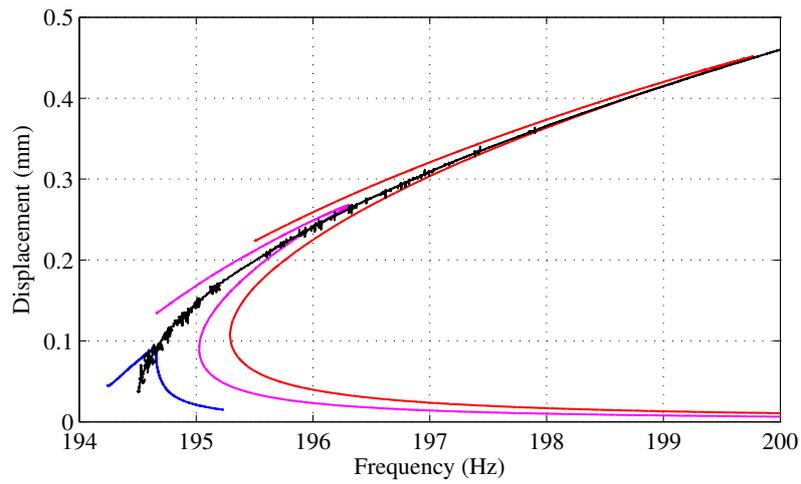
The backbones curves of the two asymmetric companion modes (2,0,1) and (2,0,2) are plotted on Fig. 9. For mode (2,0,1), a change of curvature can be observed around 112 Hz. This is due to a 1:1 internal resonance with mode (2,0,2) being activated, leading to a bifurcation towards a coupled solution [19, 62]. Hence, it is proposed to identify the nonlinear mode using the first region of the backbone only. The parabolas fit very well from 105 to 112 Hz, and the estimation differs when the coupled solution appears. In the case of mode (2,0,2), the internal resonance does not seem to be activated and the identification can be made on the whole backbone curve. Furthermore, one can notice that the results obtained with the phase resonance and the resonant decay methods are identical. The identified parameters are presented in Tab. 1.

Finally, the experimentally identified frequencies and coefficients can be compared to those obtained with a nonlinear model of the circular plate. For this matter, the dimensionless frequency and cubic coefficient are found following the methodology presented in Appendix A. The obtained dimensionless coefficients for a generic circular plate given by the model of [58] are referenced in Tab. 1. It appears that the frequencies  $\bar{\omega}$  are very well estimated by the model and that small differences are observed for the  $\bar{\Gamma}$  coefficients.

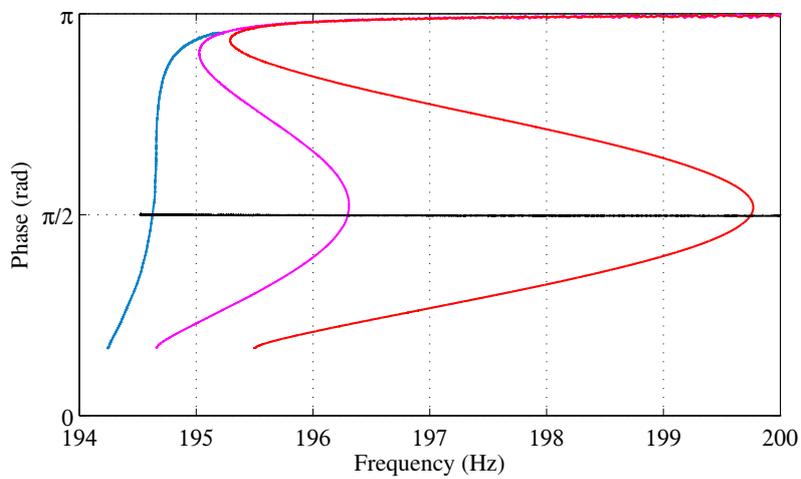
It is quite remarkable that the parabola fits so well the measured backbone for modes (0,1) and (2,0), even for high amplitudes: for the asymmetric modes (2,0), the highest vibration amplitude reaches the thickness of the plate. This fact means that the first order approximation made in Sec. 2 still applies and that higher effects play a negligible role. It fully justifies the proposed approach.

Mode (0,1)			
	PLL	NLRD	Model
$f_0$ (Hz)	194.5	194.33	
$\hat{\Gamma}_0$ ( $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-2}$ )	$5.1127 \times 10^{11}$	$5.1127 \times 10^{11}$	
$\bar{\omega}$	9.070	9.062	9.175
$\bar{\Gamma}$	9.126	9.126	8.575
Mode (2,0,1)			
	PLL	NLRD	Model
$f_0$ (Hz)	105.89	105.92	
$\hat{\Gamma}_0$ ( $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-2}$ )	$1.0639 \times 10^{11}$	$1.1028 \times 10^{11}$	
$\bar{\omega}$	4.897	4.896	5.093
$\bar{\Gamma}$	2.123	2.201	1.898
Mode (2,0,2)			
	PLL	NLRD	Model
$f_0$ (Hz)	111.11	110.99	
$\hat{\Gamma}_0$ ( $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-2}$ )	$1.0842 \times 10^{11}$	$1.1400 \times 10^{11}$	
$\bar{\omega}$	5.176	5.133	5.093
$\bar{\Gamma}$	2.171	2.270	1.898

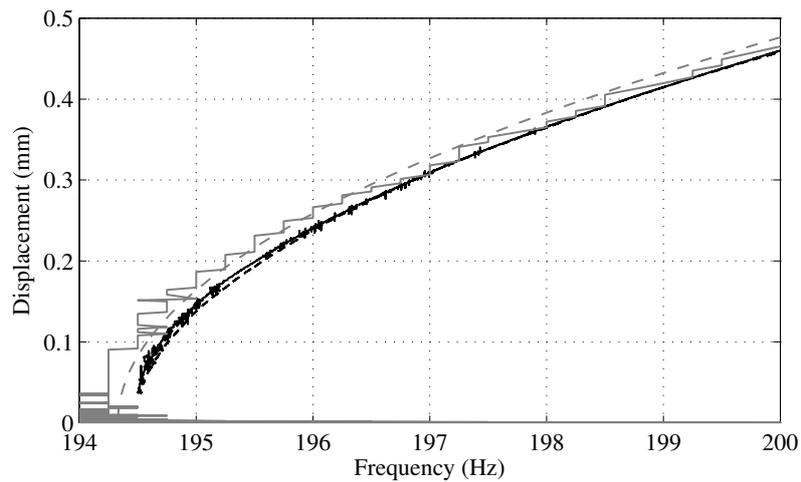
Table 1 – Experimentally identified (PLL and NLRD) and theoretical nonlinear coefficients for modes (0,1), (2,0,1) and (2,0,2) of the circular plate.



(a)

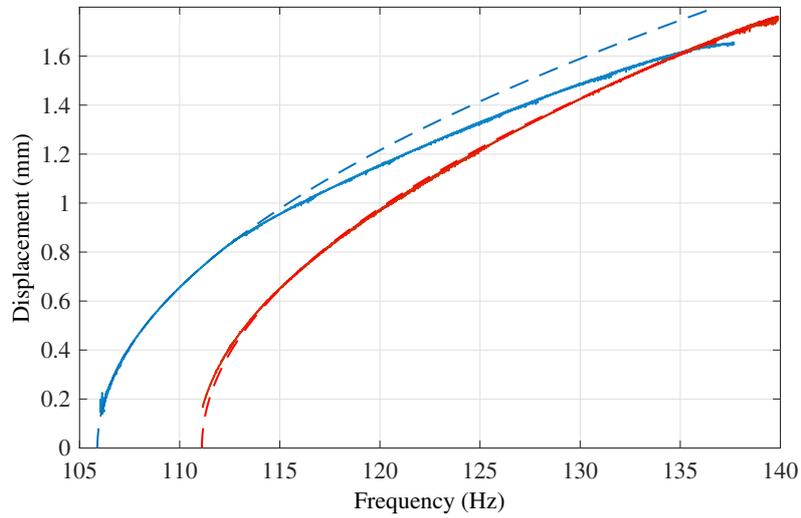


(b)

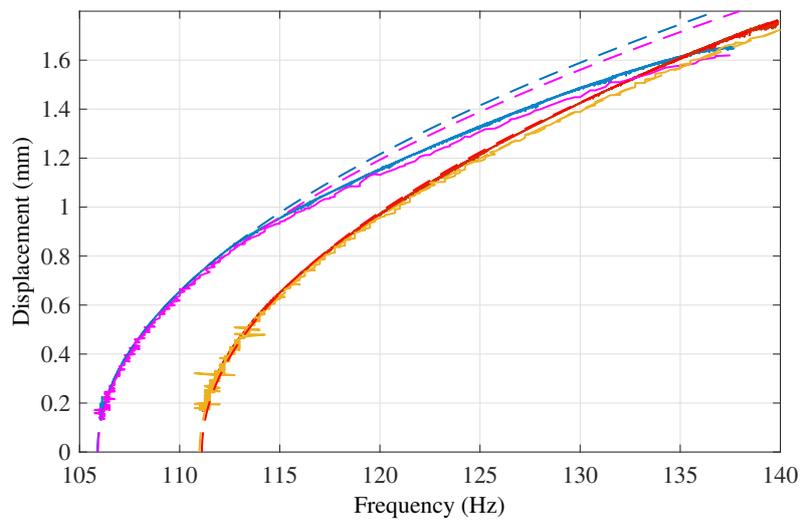


(c)

Figure 8 – Mode (0,1) of the circular plate : backbone curve obtained using the PLL (black) and forced responses measured with PLL under currents 0.48 (blue), 1.42 (purple) and 2.38 A (red): amplitude (a) and phase (b). (c) Backbone curves obtained using the PLL, fitted parabola (dashed black), backbone curve using NLRD (gray), fitted parabola (dashed gray).



(a)



(b)

Figure 9 – Modes (2,0) of the circular plate. (a) backbone curve, obtained with PLL, of mode (2,0,1) (blue) and mode (2,0,2) (red), along with fitted parabolas (dashed curves). (b) Same as (a) with the measurements from the NLRD method added: mode (2,0,1) (magenta) and mode (2,0,2) (orange) along with fitted parabolas (dashed curves)

### 4.3 Axisymmetric and asymmetric modes of a Chinese Gong

Chinese gongs display an important pitch glide in playing situations. The pitch glide direction can be related to the hardening / softening behaviour of a NNM; It depends on the central section geometry and reduces essentially to the ratio of the central section thickness to curvature [63]: gongs with a flat central area display a downward pitch glide (hardening behaviour) whereas those with a convex central area display an upward pitch glide (softening behaviour). Identifying the nonlinear parameters of the modes involved could help to find links between the sound and the geometrical or material characteristics. We focus on the first axisymmetric mode (0,1) and the first asymmetric mode (1,1). The modal shapes displayed in Fig. 10 are recovered from a modal analysis done with the scanning laser vibrometer. The linear eigenfrequencies for the first and third mode are 280 and 478 Hz respectively. In the case of mode (0,1) the magnet is placed in the center of the gong and the vibration is measured at the same place; for mode (1,1) the magnet is placed at the upper anti-node and the vibration is measured at the same place. Note that the structure is sensitive to the magnet position; hence the magnet has an influence on the measured nonlinearity. In these measurements, the integral gain is set to 10, with a proportional gain of 2. As with the circular plate (see Sec. 4.2), the phase difference between forcing and velocity is set to 0 for the measurement of a backbone curve while it varies between  $-\pi/3$  and 1.2 rad for a forced response, with a sweep rate of  $0.015 \text{ rad.s}^{-1}$ .

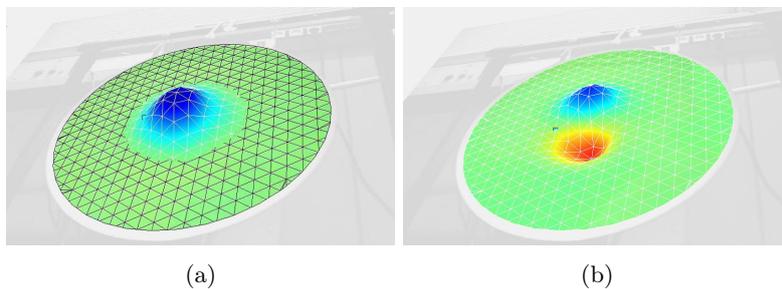


Figure 10 – Operational shapes of the chinese gong at frequencies of the first axisymmetrical mode (0,1) (280 Hz) and asymmetrical mode (1,1) (478 Hz).

Fig. 11 displays the backbone curve and the frequency responses around resonance obtained with the PLL measurement method for the first axisymmetric mode (0,1) of the gong. It can be seen that the first mode has a hardening behaviour. Fig. 11 also shows that the frequency response around resonance can be fully recovered including the unstable region for the highest amplitudes. One can note that at high amplitudes, the backbone curve notably deviates from the top of the frequency response and seems to be in the unstable region. It is likely due to a slight heating of the coil and magnet excitation system that has consequences on the gong behaviour. It is the main reason the experimental results do not feature higher amplitudes for the gong; this topic should be the subject of a further study.

The frequency response measured using SST are also represented on Fig. 11, taking care of reproducing the same excitation levels. This method shows well the jump phenomenon for the highest excitation levels. The two methods give identical results, assessing the validity of the PLL for nonlinear forced responses measurement. Finally, Fig. 11 shows the backbone curve obtained with the NLRD method and the backbone curve obtained by finding the maxima of amplitude of the frequency responses obtained by SST. Graphically, it is reassuring that the three methods yield sensibly identical results.

For this first mode, the nonlinear identification yields the parameters indicated in Tab. 2 for the three methods. The fitted parabolas are not shown on Fig. 11 for readability concerns. The nonlinear cubic coefficients  $\hat{\Gamma}_0$  obtained with the three methods display small discrepancies but it may be due to the quality of the results obtained with NLRD and SST.

Fig. 12 shows that mode (1,1) has a also a hardening behaviour. Again, the frequency responses for different amplitudes are displayed and a larger multivalued region appears for the forcing amplitudes tested in this case. The nonlinear identification for mode (1,1) yields the parameters indicated in Tab. 2.

### 4.4 Piezoelectric unimorph beams

Unimorph beams are often used in the context of energy harvesting [64] : in this domain, nonlinearities are interesting because of the incurvation of the frequency response with the amplitude, allowing to harvest vibration

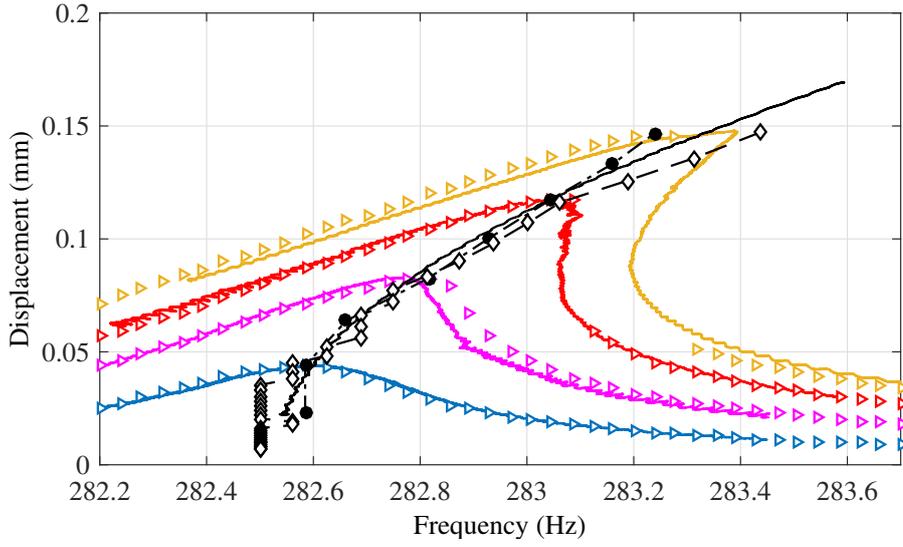


Figure 11 – Mode (0,1) of the gong: backbone curves obtained using PLL (solid black), using NLRD (black lozenge), using SST (filled black circles), forced frequency responses measured with PLL (colored line) under currents 0.1 (blue), 0.2 (purple), 0.3 (red) and 0.4 A (yellow). and forced frequency responses measured with SST (colored triangle) under currents 0.1 (blue), 0.2 (purple), 0.3 (red) and 0.4 A (yellow).

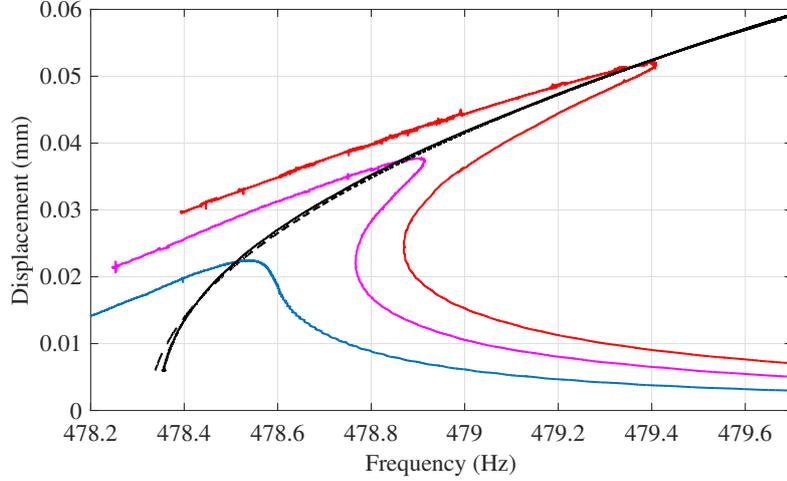


Figure 12 – Mode (1,1) of the gong: backbone curve (solid black), fitted parabola (dashed black) and forced frequency responses under current 0.185 (blue), 0.324 (purple) and 0.464 A (red) in the coil, using PLL.

Method	Mode (0,1)			Mode (1,1)
	PLL	NLRD	SST	PLL
$f_0$ (Hz)	282.53	282.49	282.55	478.32
$\hat{\Gamma}_0$ ( $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$1.11 \times 10^{12}$	$1.31 \times 10^{12}$	$9.97 \times 10^{11}$	$1.97 \times 10^{13}$

Table 2 – Experimentally identified nonlinear coefficients for mode (0,1) and (1,1) of the chinese gong.

energy on wider frequency range [65]. There is thus a need for the identification of nonlinear parameters, especially for building a reasonable reduced-order model of the harvesting system. Moreover, in the case of piezoelectric devices, the modal electro-mechanical coupling coefficient  $k_i$  of the  $i$ -th. mode is an indicator of the performance and is linked to the natural frequencies  $\omega_i^{\text{OC}}$  and  $\omega_i^{\text{SC}}$  with the piezoelectric ceramic in open and short-circuit, respectively [60]:

$$k_i = \frac{(\omega_i^{\text{OC}})^2 - (\omega_i^{\text{SC}})^2}{(\omega_i^{\text{SC}})^2}. \quad (46)$$

In the case of nonlinear unimorph beam, the frequencies depend on the excitation amplitude.

The frequency responses for the unimorph beam described in Sec. 4.1 in open and short-circuit around the first resonance are obtained for several vibration amplitudes using the PLL, set with an integral gain of 25 and a proportional gain of 1. They are plotted on Fig. 13. The tracked backbone curves for the two configurations are also plotted. For a given configuration (open or short-circuit), the estimated backbone curve is very accurate and seems to match the amplitude resonance, which is understandable since the damping is reasonably low. It is clear that the nonlinearity for the first mode is softening and the backbone curve is straight. The first mode of a base-excited cantilever beam is usually known to be hardening [66] but the softening behaviour may come from several phenomena: internal residual stress [67] due to the beam manufacturing process, or the coupling with the PZT ceramic are known to produce a softening behaviour [8]. Other possible reasons for this particular softening behavior are the quality of the clamping condition, which may generate dry friction, or the nonlinear nature of the shaker, interacting with the excited structure. Further study is needed to fully understand the nonlinear dynamic of this piezoelectric beam alone. Nonlinear piezoelectric cantilever beams are well studied in the literature [68, 69] and the key point may be in the modelisation of the piezoelectric ceramic nonlinearity: for instance, [69] enhances that straight backbones are observed for bimorph cantilever with soft piezoelectrics such as the PIC155 used here. Since the backbone curves are almost straight lines, one cannot identify a nonlinear cubic coefficient based on the model proposed in Sec. 2

No stabilized unstable region is observed, due to the quality factor and the small vibration amplitudes involved. High amplitudes were not tested; they were indeed more likely to damage the glueing of the PZT ceramic or the ceramic itself. The resonance shift between the two configurations is noticeable and quasi-constant when amplitude increases. From Eq. (46), it is found that  $k_1=19\%$  for the first mode of the unimorph beam under study, which demonstrates the quality of the coupling between beam and ceramic and makes the structure attractive for energy harvesting.

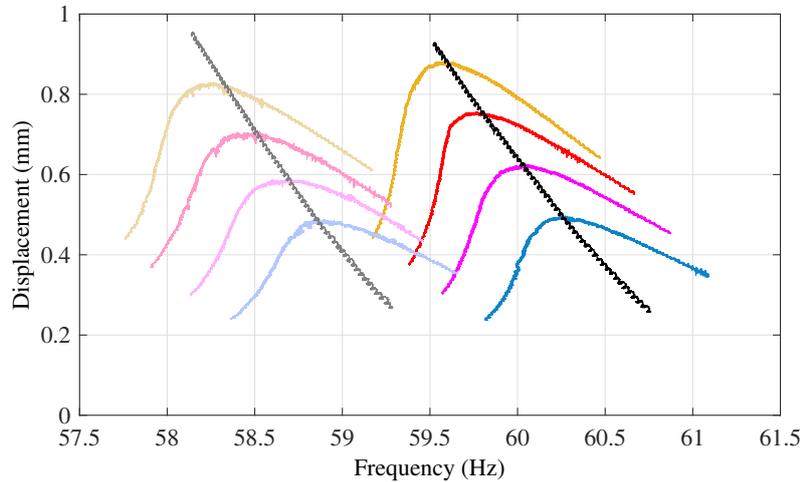


Figure 13 – Forced frequency responses using PLL for mode 1 of the piezoelectric unimorph beam in open (bright tone) and short-(light tone) circuit for base accelerations 0.90 (blue), 1.20 (purple), 1.50 (red), 1.80 (yellow)  $\text{m.s}^{-2}$ , and corresponding backbone curves for open (black) and short- (gray) circuit.

## 5 Conclusions

This paper is dedicated to the identification of nonlinear modes using the phase resonance method and a phase-locked-loop. A framework has been proposed to identify a single nonlinear mode based on displacement

---

measurements at moderate amplitudes. An isolated nonlinear mode is characterized by two nonlinear cubic coefficients, whose effects are impossible to distinguish at first order. Hence, it was proposed to characterized a nonlinear mode with a linear eigenfrequency and a single nonlinear coefficient. These two parameters are identified by fitting a parabola on the measured backbone curve of the mode.

The strategy retained to measure the backbone curve is the phase resonance technique. It is done practically using a Phase-Locked-Loop. The PLL can also be used to measure nonlinear forced responses around resonance by maintaining the amplitude constant and varying the phase. The stability of the controlled nonlinear oscillator is demonstrated for any value of the phase lag, thus avoiding the jump phenomenon appearing in the classical stepped sine sweep method. Stability is dependent on the characteristics of the nonlinear oscillator, the gain and the speed of the feedback loop. The use of the PLL and more generally the phase resonance technique in case of internal resonances should be studied further. The evaluation of the stability of the measured backbone could also be studied.

The proposed method is applied in this paper to identify two nonlinear hardening modes of a circular plate, two nonlinear hardening modes of a chinese gong and the first flexural softening mode of a unimorph piezoelectric beam. Backbone curves and frequency responses are measured in each case. The unstable region of the frequency response is also measured. Except in the case of the piezoelectric beam, fitting a parabola on the backbone curves allowed a reliable estimation of the two parameters characterizing the nonlinear modes. In the case of the circular plate, the nonlinear coefficients are successfully compared with the theoretical coefficients. The piezoelectric beam displays an unexpected nonlinear behaviour, which does not allow to identify a nonlinear coefficient. This should be investigated in a further study.

In addition, two other measurement methods are used in order to identify the nonlinear modes and assess the validity of the phase resonance testing : a stepped sine sweep measurement and the nonlinear resonant decay method. The three methods yields identical results but in this study, the phase resonance method using PLL seems to give the cleanest result, since it is done in forced regime, and does not rely on an instantaneous frequency detection algorithm nor the measurement of a high number of forced frequency responses.

## References

- [1] R. J. Allemang, D. L. Brown, Experimental modal analysis, in: A. G. Piersol, T. L. Paez (Eds.), Shock and vibration handbook, McGraw-Hill, 2009.
- [2] J.-P. Noël, G. Kerschen, Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress, *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 (2016) 2–35.
- [3] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, J.-C. Golinval, Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics, *Mechanical Systems and Signal Processing* 20 (3) (2006) 505–592.
- [4] K. Worden, G. R. Tomlinson, Nonlinearity in structural dynamics. Detection, identification and modelling, IOP Publishing Ltd., 2001.
- [5] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & sons, inc., New-York, 1979.
- [6] A. Lazarus, O. Thomas, J. F. Deü, Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS, *Finite Elements in Analysis and Design* 49 (1) (2012) 35–51.
- [7] O. Thomas, B. Legrand, C. Fuinel, Optimization of length and thickness of smart transduction layers on beam structures for control and m/nems applications, in: *Proceedings of SMASIS 2015 (ASME 2015 Conference on Smart Materials Adaptive Structures and Intelligent Systems)*, Colorado Springs, USA, 2015, p. paper 8857.
- [8] M. K. Samal, P. Seshu, S. Parashar, U. von Wagner, P. Hagedorn, B. K. Dutta, S. Kushwaha, A finite element model for nonlinear behaviour of piezoceramics under weak electric fields, *Finite Elements in Analysis and Design*.
- [9] L. Jezequel, C. Lamarque, Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory, *Journal of Sound and Vibration* 149 (3) (1991) 429–459.
- [10] C. Touzé, O. Thomas, a. Chaigne, Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes, *Journal of Sound and Vibration* 273 (1-2) (2004) 77–101.
- [11] C. Touzé, O. Thomas, Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells: Effect of the geometry, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 41 (5) (2006) 678–692.

- 
- [12] M. Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, Cambridge University Press, 2008.
- [13] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance, *International Journal of Solids and Structures* 42 (11-12) (2005) 3339–3373.
- [14] C. Touzé, C. Camier, G. Favraud, O. Thomas, Effect of imperfections and damping on the type of nonlinearity of circular plates and shallow spherical shells, *Mathematical Problems in Engineering* 2008 (2008) ID 678307.
- [15] O. Thomas, F. Mathieu, W. Mansfield, C. Huang, S. Trolier-Mckinstry, L. Nicu, Efficient parametric amplification in micro-resonators with integrated piezoelectric actuation and sensing capabilities, *Applied Physics Letters* 102 (16) (2013) 163504.
- [16] N. Kacem, J. Arcamone, F. Perez-Murano, S. Hentz, Dynamic range enhancement of nonlinear nanomechanical resonant cantilevers for highly sensitive nems gas/mass sensor applications, *Journal of Micromechanics and Microengineering* 20 (4) (2010) 045023.
- [17] S. Mojrżisch, J. Twiefel, Phase-controlled frequency response measurement of a piezoelectric ring at high vibration amplitude, *Archive of Applied Mechanics* 86 (10) (2015) 1763–1769.
- [18] S. Peter, R. I. Leine, Excitation power quantities in phase resonance testing of nonlinear systems with phase-locked-loop excitation, *Mechanical Systems and Signal Processing* 96 (2017) 139–158.
- [19] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: Experiments, *Journal of Sound and Vibration* 265 (5) (2003) 1075–1101.
- [20] M. P. Mignolet, A. Przekop, S. A. Rizzi, S. M. Spottswood, A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures, *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013) 2437–2460.
- [21] A. Sénéchal, Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines, Ph.D. thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris (2011).
- [22] C. Touzé, M. Vidrascu, D. Chapelle, Direct finite element computation of non-linear modal coupling coefficients for reduced-order shell models, *Computational Mechanics* 54 (2) (2014) 567–580.
- [23] M. Géradin, D. Rixen, *Mechanical Vibrations: Theory and Applications to Structural Dynamics*, 3rd Edition, J. Wiley & Sons, 2015.
- [24] A. A. Muravyov, S. A. Rizzi, Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures, *Computers and Structures* 81 (15) (2003) 1513–1523.
- [25] O. Thomas, S. Bilbao, Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates: In-plane boundary conditions and some symmetry properties, *Journal of Sound and Vibration* 315 (3) (2008) 569–590.
- [26] C. Camier, C. Touzé, O. Thomas, Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells, *European Journal of Mechanics A/Solids* 28 (3) (2009) 500–515.
- [27] C. Touzé, M. Amabili, Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures, *Journal of Sound and Vibration* 298 (4-5) (2006) 958–981.
- [28] G. Kerschen, M. Peeters, J. C. Golinval, A. F. Vakakis, Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist, *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (1) (2009) 170–194.
- [29] C. Touzé, O. Thomas, A. Huberdeau, Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures, *Computers and Structures* 82 (31-32) (2004) 2671–2682.
- [30] C. Touzé, M. Amabili, O. Thomas, Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (21-24) (2008) 2030–2045.
- [31] S. W. Shaw, C. Pierre, Nonlinear normal modes and invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration* 150 (1) (1991) 170–173.
- [32] S. W. Shaw, C. Pierre, Normal Modes of Vibration for Non-Linear Continuous Systems, *Journal of Sound and Vibration* 169 (3) (1994) 319–347.
- [33] R. M. Rosenberg, On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom, *Advances in Applied Mechanics* 9 (1966) 155–242.
- [34] A. M. Lyapunov, Problème général de la stabilité du mouvement, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série 9 (1907) 203–474, [http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1907\\_2\\_9\\_\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1907_2_9__203_0).
- [35] A. F. Kelley, Analytic two-dimensional subcenter manifolds for systems with an integral, *Pacific Journal of Mathematics* 29 (2) (1969) 335–350.

- 
- 680 [36] G. Haller, S. Ponsioen, Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction, *Nonlinear Dynamics* 86 (3) (2016) 1493–1534.
- [37] O. Thomas, C. Touzé, E. Luminais, Modèles réduits de structures minces en vibrations non-linéaires, in: *Colloque national en calcul de structure*, Giens, 2005, pp. 1–6.
- [38] M. Monteil, O. Thomas, C. Touzé, Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan, *Applied Acoustics* 89 (2015) 1–15.
- 685 [39] R. Arquier, B. Cochelin, S. Karkar, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez, MANLAB 2.0, an interactive continuation software (2010).  
URL <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>
- [40] J. R. Wright, J. E. Cooper, M. J. Desforges, Normal-mode force appropriation - theory and application, *Mechanical Systems and Signal Processing* 13 (2) (1999) 217–240.
- 690 [41] M. Peeters, G. Kerschen, J. C. Golinval, Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes, *Journal of Sound and Vibration* 330 (3) (2011) 486–509.
- [42] S. Bagnuet, B. Cochelin, Determination of branches of limit points by an asymptotic numerical method, in: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*, no. September, 2000, pp. 11–14.
- 695 [43] A. Renault, O. Thomas, H. Mahé, Y. Lefebvre, Hardening / softening behaviour of antiresonance for nonlinear torsional vibration absorbers, in: *Proc. of the 24th. International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Montreal, Canada, 2016.
- [44] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Non-linear behaviour of gongs through the dynamics of simple rods systems, in: *Proceedings of ISMA*, Perugia, Italy, 2001.
- 700 [45] M. Peeters, G. Kerschen, J. C. Golinval, Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes: Experimental demonstration, *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (4) (2011) 1227–1247.
- [46] J. M. Londoño, S. A. Neild, J. E. Cooper, Identification of backbone curves of nonlinear systems from resonance decay responses, *Journal of Sound and Vibration* 348 (2015) 224–238.
- 705 [47] D. A. Ehrhardt, M. S. Allen, Measurement of nonlinear normal modes using multi-harmonic stepped force appropriation and free decay, *Mechanical Systems and Signal Processing* 76-77 (2016) 612–633.
- [48] S. Peter, R. Riethmüller, R. I. Leine, Tracking of backbone curves of nonlinear systems using phase-locked-loops, in: *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, Vol. 1, 2016, pp. 107–120.
- 710 [49] I. J. Sokolov, V. I. Babitsky, Phase control of self-sustained vibration, *Journal of Sound and Vibration* 248 (4) (2001) 725–744.
- [50] S. Mojrzisch, J. Wallaschek, J. Bremer, An Experimental Method for the Phase Controlled Frequency Response Measurement of Nonlinear Vibration Systems, *Pamm* 12 (1) (2012) 253–254.
- 715 [51] J. Sieber, B. Krauskopf, Control based bifurcation analysis for experiments, *Nonlinear Dynamics* 51 (3) (2008) 365–377.
- [52] L. Renson, A. Gonzalez-Buelga, D. A. W. Barton, S. A. Neild, Robust identification of backbone curves using control-based continuation, *Journal of Sound and Vibration* 367 (2016) 145–158.
- [53] E. Bureau, F. Schilder, M. Elmegård, I. F. Santos, J. J. Thomsen, J. Starke, Experimental bifurcation analysis of an impact oscillator-Determining stability, *Journal of Sound and Vibration* 333 (21) (2014) 5464–5474.
- 720 [54] J. Twiefel, M. Klubal, C. Paiz, S. Mojrzisch, H. Krüger, Digital signal processing for an adaptive phase-locked loop controller, *Proceedings of SPIE* 6926 (2008) 69260A.
- [55] Zurich Instruments, Principles of lock-in detection and the state of the art (Nov. 2016).  
URL <https://www.zhinst.com/applications/principles-of-lock-in-detection>
- 725 [56] M. Fan, M. Clark, Z. C. Feng, Implementation and stability study of phase-locked-loop nonlinear dynamic measurement systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 12 (7) (2007) 1302–1315.
- [57] J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Second Edition, Springer Edition, 2007.
- 730 [58] C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part I: Theory, *Journal of Sound and Vibration* 258 (4) (2002) 649–676.

- 
- [59] T. D. Rossing, N. H. Fletcher, Nonlinear vibrations in plates and gong, *The Journal of the Acoustical Society of America* 73 (January) (1983) 345–351.
- 735 [60] J. Ducarne, O. Thomas, J. F. Deü, Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction, *Journal of Sound and Vibration* 331 (14) (2012) 3286–3303.
- [61] P. S. Varoto, L. P. R. de Oliveira, On the force drop off phenomenon in shaker testing in experimental modal analysis, *Shock and Vibration* 9 (2002) 165–175.
- 740 [62] A. I. Manevitch, L. I. Manevitch, Free oscillations in conservative and dissipative symmetric cubic two-degree-of-freedom systems with closed natural frequencies, *Meccanica* 38 (2003) 335–338.
- [63] N. H. Fletcher, Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells: Pitch glide in Chinese gongs, *Journal of the Acoustical Society of America* 78 (6) (1985) 2069–2073.
- [64] S. R. Anton, H. A. Sodano, A review of power harvesting using piezoelectric materials, *Smart Materials and Structures* 16 (3) (2007) R1–R21.
- 745 [65] M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, D. Dane Quinn, On the Role of Nonlinearities in Vibratory Energy Harvesting: A Critical Review and Discussion, *Applied Mechanics Reviews* 66 (4) (2014) 040801.
- [66] P. F. Pai, A. H. Nayfeh, Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25 (5) (1990) 455–474.
- 750 [67] L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, D. Chi, J. E. Sader, M. L. Roukes, Nonlinearity in nanomechanical cantilevers, *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 87 (2013) 024304.
- [68] S. N. Mahmoodi, M. F. Daqaq, N. Jalili, On the nonlinear-flexural response of piezoelectrically driven microcantilever sensors, *Sensors and Actuators, A: Physical* 153 (2) (2009) 171–179.
- 755 [69] S. Leadenham, A. Erturk, Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation, *Nonlinear Dynamics* 79 (2015) 1727–1743.

## Appendix A Dimensionless coefficients for the circular plate

A clever way to compute the nonlinear coefficients of the NNMs of a given circular plate is to formulate the plate’s equations of motion in terms of dimensionless variable, so that the computation is done for a generic circular plate. Here, following Ref. [58], we use the dimensionless variables:

$$\bar{u} = \frac{R}{h^2} u, \quad (47)$$

760 and

$$\bar{t} = \frac{\sqrt{D/\rho h}}{R^2} t, \quad (48)$$

where  $R$  is the radius of the plate,  $h$  its the thickness,  $E$  is the Young’s modulus,  $\rho$  is the mass density and  $\nu$  is the Poisson ratio of the plate’s material, and  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ , in order to rewrite Eq. (15) in the following form:

$$\ddot{\bar{u}} + \bar{\omega}^2 \dot{\bar{u}} + \varepsilon \bar{\Gamma} \bar{u}^3 = 0, \quad (49)$$

with

$$\varepsilon = 12(1 - \nu^2)h^2/R^2. \quad (50)$$

765 It is then possible to identify the dimensionless frequency  $\bar{\omega}$ :

$$\bar{\omega} = R^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_0, \quad (51)$$

and dimensionless nonlinear cubic coefficient  $\bar{\Gamma}$ :

$$\bar{\Gamma} = \frac{\rho R^4}{E} \Gamma_0. \quad (52)$$

In the case of the circular plate studied in Sec. 4, the following values are used for the parameters :  $E=85 \times 10^9$  Pa,  $\rho=7974$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\nu=0.38$ ,  $h=1.6$  mm and  $R=110$  mm.



## Annexe E

# Energy shaping of a softening Duffing oscillator

Cette annexe présente un article de conférence accepté à la Conférence DAFx (Septembre 2017). Il est reproduit ici en intégralité.

## ENERGY SHAPING OF A SOFTENING DUFFING OSCILLATOR USING THE FORMALISM OF PORT-HAMILTONIAN SYSTEMS

*Marguerite Jossic*

S3AM Team  
IRCAM - Institut  $\partial'$ Alembert  
Université Pierre et Marie Curie  
Paris, France  
marguerite.jossic@ircam.fr

*Baptiste Chomette*

Institut  $\partial'$ Alembert - Université Pierre et Marie Curie  
Paris, France

*David Roze, Thomas Hélie \**

S3AM Team  
IRCAM - Université Pierre et Marie Curie  
Paris, France  
david.roze@ircam.fr

*Adrien Mamou-Mani*

IRCAM - Université Pierre et Marie Curie  
Paris, France

### ABSTRACT

This work takes place in the context of the development of an active control of instruments with geometrical nonlinearities. The study focuses on Chinese opera gongs that display a characteristic pitch glide in normal playing conditions. In the case of the *xiaoluo* gong, the fundamental mode of the instrument presents a softening behaviour (frequency glides upward when the amplitude decreases). Controlling the pitch glide requires a nonlinear model of the structure, which can be partially identified with experimental techniques that rely on the formalism of nonlinear normal modes. The fundamental nonlinear mode has been previously experimentally identified as a softening Duffing oscillator. This paper aims at performing a simulation of the control of the oscillator's pitch glide. For this purpose, the study focuses on a single-degree-of-freedom nonlinear mode described by a softening Duffing equation. This Duffing oscillator energy proves to be ill-posed - in particular, the energy becomes negative for large amplitudes of vibration, which is physically inconsistent. Then, the first step of the present study consists in redefining a new energetically well-posed model. In a second part, guaranteed-passive simulations using port-Hamiltonian formalism confirm that the new system is physically and energetically correct compared to the Duffing model. Third, the model is used for control issues in order to modify the softening or hardening behaviour of the fundamental pitch glide. Results are presented and prove the method to be relevant. Perspectives for experimental applications are finally exposed in the last section of the paper.

### 1. INTRODUCTION: PROBLEM STATEMENT

The Duffing equation  $\alpha\ddot{x} + \kappa x + \Gamma x^3 = 0$  is commonly used as the simplest nonlinear system that models geometrical nonlinearities. However, the softening Duffing equation ( $\Gamma < 0$ ) leads to an ill-posed problem since the energy is negative for large amplitudes of vibration. In this study, we propose to redefine a well-posed energy to overcome this issue.

Besides, the softening Duffing oscillator is quite interesting for the study of Chinese opera gongs[1] which can present either

\* The contribution of this author has been done at laboratory STMS, Paris, within the context of the French National Research Agency sponsored project INFIDHEM. Further information is available at <http://www.lagep.cpe.fr/wwwlagep7/anr-dfg-infidhem-fev-2017-jan-2020/>

hardening or softening behaviour in standard playing conditions. Numerous studies detailed the nonlinear dynamical phenomena that occur in these instruments (internal resonances, chaos, pitch glide, harmonic distortions, etc.)[2][3][4] and their modelization (e.g. Von Karman plate model and nonlinear normal modes[5][6]). These works showed that most of these nonlinear features are the result of nonlinear interactions between vibration modes and require models with a high number of degree of freedom[7][8]. However, in the case of the pitch glide, the uni-modal approximation might be interesting: a single nonlinear mode is able to describe the dependence between the frequency and the amplitude of vibration[5]. Nonlinear normal modes are defined as invariant manifolds in phase space [6]. They are deduced from normal form theory which allows to compute an analytical nonlinear change of variables, from modal coordinates  $(X_p, \dot{X}_p)$  to new normal coordinates  $(R_p, \dot{R}_p)$ , by cancelling all the terms that are not dynamically important in the equations of motion [9]. The dynamics onto the  $p$ -th nonlinear normal mode is governed by the new normal coordinates  $(R_p, \dot{R}_p)$  and is written in free vibration regime:

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + (A_p + C_p)R_p^3 + B_p R_p \dot{R}_p^2 = 0 \quad (1)$$

where  $R_p$  and  $\dot{R}_p$  are the nonlinear mode displacement and velocity respectively,  $\omega_p$  is the modal pulsation associated with the  $p$ -th mode, and  $A_p$ ,  $C_p$  and  $B_p$  are coefficients that take into account the influence of other linear modes in the nonlinear mode dynamics. A first-order perturbative development of this equation [10] leads to the nonlinear relationship between the angular frequency of nonlinear free oscillations  $\omega_{NL}$  and the amplitude  $a$  of the nonlinear mode's response at frequency  $\omega_{NL}$ :

$$\omega_{NL} = \omega_p(1 + T_p a^2)$$

where the coefficient  $T_p$  is  $T_p = \frac{3(A_p + C_p) + \omega_p^2 B_p}{8\omega_p^2}$ . In practice, an experimental identification of  $T_p$  can be performed [11], but afterwards it is no longer possible to identify separately the coefficients  $A_p$ ,  $C_p$  and  $B_p$ . However, in the case of the *xiaoluo*, it can be shown that the fundamental nonlinear mode described in (1) is equivalent (first-order of perturbation method) to a softening Duffing equation with a negative cubic coefficient  $\Gamma_p$ :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + \Gamma_p R_p^3 = 0 \quad (2)$$

Indeed, the  $T_p$  coefficient in this case is directly related to the  $\Gamma_p$  by  $T_p = \frac{3\Gamma_p}{8\omega_p^2}$ . Then, provided that:

$$\Gamma_p = A_p + C_p + \frac{\omega_p^2 B_p}{3}$$

the equation (1) is equivalent to (2). Consequently, the coefficient  $\Gamma_p$  and therefore the nonlinear mode can be experimentally identified with the measurement of  $T_p$ .

Finally, the softening Duffing model is assumed for two reasons: first, it provides a convenient basis to experimentally identify isolated nonlinear modes in the case of gongs; second, it gives the opportunity to define a single parameter well-posed energy that can be manipulated through energy shaping control in order to change its softening or hardening behaviour.

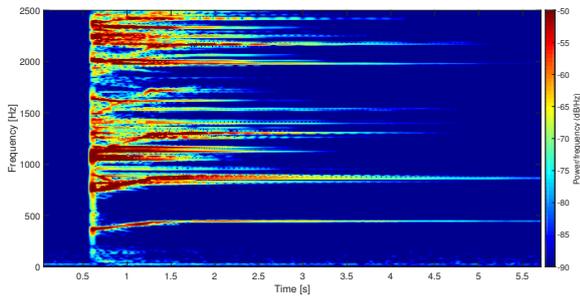


Figure 1: Spectrogram of the sound of a xiaoluo after being struck by a mallet. The fundamental mode ( $\sim 449$  Hz) displays a softening behaviour.

This study aims at controlling the softening behaviour of the xiaoluo gong's nonlinear fundamental mode, that we assume to be in the form of the softening Duffing equation described by Eq. (2). The control process relies on guaranteed-passive simulations that use port-Hamiltonian approach. Port-Hamiltonian systems (PHS) are an extension of Hamiltonian systems, which represent passive physical systems as an interconnection of conservative, dissipative and sources components. They provide a unified mathematical framework for the description of various physical systems. In our case, the PHS formalism allows for the writing of an energy-preserving numerical scheme [12] in order to simulate and control the Duffing equation - note that other and more precise guaranteed-passive numerical schemes [13] are available but not used in this work. The first observation when tackling the control problem is that the softening Duffing equation defined by Eq. (2) is energetically ill-defined (Section 2). For large amplitudes of vibration, the total system energy, written with the PHS approach, becomes negative and thus, physically inconsistent. The first step of this study consists then to redefine the energy for the fundamental nonlinear mode. This new energy must be (i) as close as possible of the energy of the Duffing equation described in (2) and (ii) physically consistent. Secondly (Section 3), the Duffing energy and the new well-posed energy are both simulated using a guaranteed-passive numerical scheme that relies on the energy discrete gradient. Simulation results confirm the relevance of using the new energy for the control design. Thirdly (Section 4), control simulation of the fundamental mode's pitch glide is realized by shaping the system's new energy. The simulation results confirm the ability to modify the softening behaviour of the fundamental

mode thanks to the new energy defined in Section 2. Finally, conclusion and perspectives for further research offered by this study are discussed in Section 5.

## 2. PHYSICAL MODEL

### 2.1. Original Duffing model

#### 2.1.1. Equation of motion

As explained before, the nonlinear normal mode associated with the fundamental mode is modelled by a softening Duffing oscillator, expressed as in Eq. (2) with an added viscous modal damping:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) - \Gamma x^3(t) = f(t) \quad (3)$$

where  $x$  is the amplitude response of the nonlinear normal mode,  $\xi$  is the modal damping factor,  $\omega_0$  is the modal pulsation,  $\Gamma$  is the nonlinear cubic coefficient ( $\Gamma > 0$ ) and  $f$  is the input acceleration. These parameters have been experimentally identified, however the description of the identification methods are beyond the scope of the paper. We assume then the following parameters values:

$$\begin{aligned} \xi &= 1.4 \cdot 10^{-3} \\ \omega_0 &= 2\pi \times 449 \text{ rad/s} \\ \Gamma &= 6, 7 \cdot 10^6 \text{ S.I} \end{aligned}$$

#### 2.1.2. Dimensionless problem

For more convenience, equation (3) is written with dimensionless amplitude  $\tilde{x}$  and time  $\tilde{t}$ , defined such as  $x = X_0\tilde{x}$  and  $t = \tau\tilde{t}$ . The Duffing equation (3) becomes:

$$\frac{X_0}{\tau^2}\ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) + 2\xi\omega_0^2\frac{X_0}{\tau}\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) + \omega_0^2X_0\tilde{x}(\tilde{t}) - \Gamma X_0^3\tilde{x}^3(\tilde{t}) = f(\tau\tilde{t})$$

that is:

$$\ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) + 2\xi\omega_0^2\tau\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) + \omega_0^2\tau^2\tilde{x}(\tilde{t}) - \Gamma\tau^2X_0^2\tilde{x}^3(\tilde{t}) = \frac{f(\tau\tilde{t})\tau^2}{X_0}$$

Choosing  $\tau$  and  $X_0$  such that  $\tau = \frac{1}{\omega_0}$  and  $X_0 = \sqrt{\frac{1}{\tau^2\Gamma}}$  leads to the following Duffing equation:

$$\ddot{\tilde{x}}(\tilde{t}) + \mu\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) + \tilde{x}(\tilde{t}) - \tilde{x}^3(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{t}) \quad (4)$$

where  $\mu = 2\xi$  and  $\tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{f(\tau\tilde{t})\sqrt{\Gamma}}{\omega_0^3 m}$ .

For sake of legibility, tilde will be omitted in the following.

### 2.2. Port-Hamiltonian approach

This section introduces some recalls on port-Hamiltonian systems in finite dimensions. The calculation of the Hamiltonian  $H$  of the Duffing system demonstrates that its potential energy  $H_1$  is negative for some displacement values. A new equivalent positive definite potential energy  $H_{1*}$  is then defined for the control design.

### 2.2.1. General formulation

A port-Hamiltonian system of state  $\mathbf{x}(t)$ , input  $\mathbf{u}(t)$  and output  $\mathbf{y}(t)$  can be represented by the following differential equations [14]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}))\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x})\end{aligned}$$

where  $\dot{\mathbf{x}}$  is the time derivative of state  $\mathbf{x}$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}}$  denotes the gradient with respect to state  $\mathbf{x}$ ,  $H(t)$  is a positive definite function that represents the total energy of the system, matrix  $\mathbf{J}$  is skew-symmetric and  $\mathbf{R}$  is positive definite ( $\mathbf{R} \geq 0$ ). The power balance of the system can be expressed by the temporal energy variation of the system  $\dot{H}(\mathbf{x}(t)) = \nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}(t))^T \dot{\mathbf{x}}(t)$ , that is:

$$\dot{H} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}}H^T \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{x}}H}_{=0 \text{ (} \mathbf{J} = -\mathbf{J}^T \text{)}} - \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}}H^T \mathbf{R} \nabla_{\mathbf{x}}H}_{\text{Dissipated power } \mathcal{P}_d > 0} + \underbrace{\mathbf{y}^T \mathbf{u}}_{\text{Entering power } \mathcal{P}_e}.$$

This power balance equation guarantees the system passivity. The variation of the system energy is expressed as the sum of elementary power functions corresponding to the storage, the dissipation and the exchanges of the system with the external environment. The dissipation term  $\mathcal{P}_d$  is positive because  $\mathbf{R}$  is positive definite. The power term  $\mathcal{P}_e$  denotes the energy provided to the system by the ports  $\mathbf{u}(t)$  and  $\mathbf{y}(t)$  (external sources).

The formulation  $\dot{H}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}}$  underlines the fact that each power function can be expressed as the product of a flux ( $[\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x})^T]_i$  or  $[\dot{\mathbf{x}}]_i$ ) with its associated efforts ( $[\dot{\mathbf{x}}]_i$  or  $[\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x})^T]_i$ ). A concrete example is given below with the Duffing oscillator described by Eq. (4).

### 2.2.2. Softening Duffing oscillator energy

The port-Hamiltonian system corresponding to the Duffing equation (4) can be defined as follow:

- State:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ p \end{bmatrix}$

where  $l$  and  $p$  are the string elongation and the mass momentum, respectively.

- Dissipation:  $\mathcal{P}_D = \mu p^2 > 0$ .
- Source: input  $u = f$  and output  $-y = p$ .

where  $p$  is the velocity of the nonlinear normal mode. The total energy of the system  $H$  is the sum of the energy of the spring  $H_1$  and the energy of the mass  $H_2$ :

$$H(x_1, x_2) = H_1(x_1) + H_2(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

The flux and efforts associated with the energies  $H_1$  and  $H_2$  are given in Table 1.

	Spring	Mass
Energy	$H_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4$	$H_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$
Effort	$\frac{dH_1(x_1)}{dl} = x_1 - x_1^3$	$\frac{dH_2}{dp}$
Flux	$\frac{dx_1}{dt}$	$\frac{dH_2(x_2)}{dx_2} = x_2$

Table 1: Energies and associated efforts and flux.

The port-Hamiltonian formulation of Eq. (4) can be deduced:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{J} - \mathbf{R})\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x}) + \mathbf{G}\mathbf{u} \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right] \nabla_{\mathbf{x}}H(x_1, x_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u\end{aligned}$$

The physical interpretation of a system is often analyzed through the derivative of the potential energy (or forces), which is written in our case:

$$H'_1(x_1) = x_1 - x_1^3$$

The derivative  $H'_1$  is plotted on Figure 2(a) with the potential energy derivative of the underlying linear system for comparison. One can see that looking at  $H'_1$  does not give any information about the physical existence of the softening Duffing system. It is only by plotting the potential energy  $H_1$  (see Figure 2(b)) that the softening system proves not to be physically defined for some displacement values  $x_1$ : if  $|x_1| > \sqrt{2}$ ,  $H_1 < 0$  and  $H$  can be negative. Moreover, the equilibrium points  $x_1 = 1$  and  $x_1 = -1$  are saddle points, which means that the physical problem is restricted to  $|x_1| < 1$ .

The softening Duffing system (4) is then not energetically defined, and a new well-posed energy needs to be sought for the control design.

### 2.2.3. Well-posed problem

The aim of this paper is to seek functions  $H_{1\star}$  such that:

- $\forall x \in \mathbb{R}, H_{1\star}(x) \geq 0$
- $H_{1\star}$  increases on  $\mathbb{R}^+$
- $H_{1\star}$  decreases on  $\mathbb{R}^-$
- $H''_{1\star}$  is equivalent at order 2 to the dynamical stiffness of the softening Duffing  $H''_1(x) = 1 - 3x^2$

$H''_{1\star}(x)$  corresponds to the first terms of the Taylor expansion of  $x \rightarrow \exp(-3x^2)$ . Then, one simple choice for  $H''_{1\star}$  is:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H''_{1\star}(x) = \exp(-3x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n!} x^{2n}$$

If we assume the conditions  $H'_{1\star}(0) = 0$  and  $H_{1\star}(0) = 0$ , the simple and double integration of  $H''_{1\star}$  give, for all  $x \in \mathbb{R}$ :

$$H'_{1\star}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} = x - x^3 + O(x^5)$$

$$H_{1\star}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+2)(2n+1)n!} x^{2n+2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + O(x^6)$$

and  $H_{1\star}$  meets the requirements (5). Note that  $H'_{1\star}$  can be expressed with the help of the error function  $erf$  which is defined for  $x \in \mathbb{R}$  by:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

leading to:

$$H'_{1\star}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} erf(\sqrt{3}x)$$

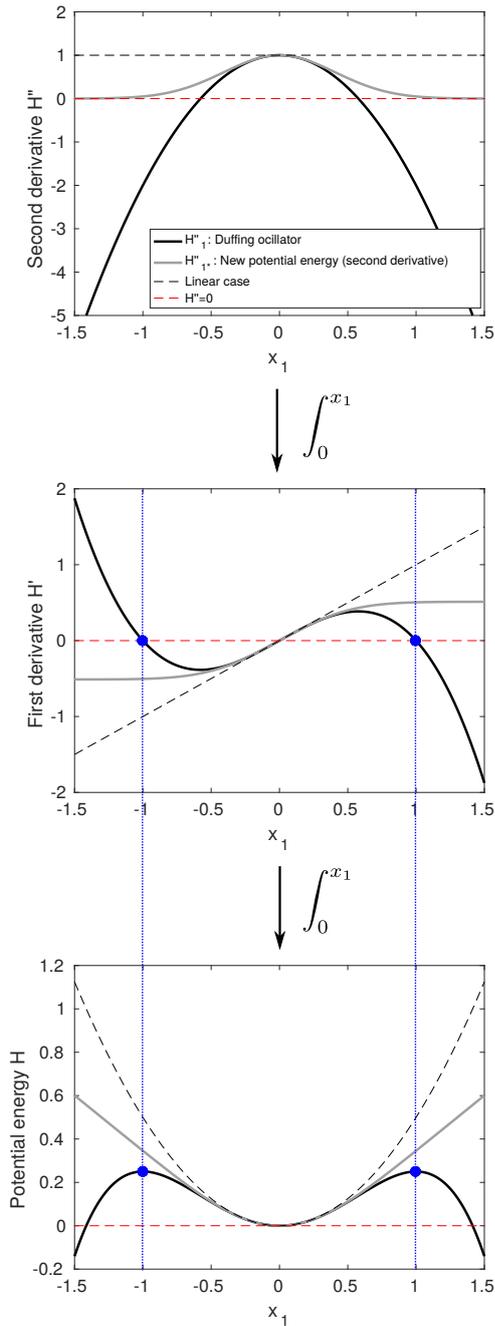


Figure 2: Second derivative, first derivative of potential energy and potential energy obtained by successive integrations with respect to the displacement  $x_1$ , represented in the case of the Duffing oscillator, the new well-posed energy, and the linear case. Red dot line represents the null energy level, and blue dot line indicates the coincidence between the turning points of the potential energy and the zeros of its first derivative.

Finally, the new potential energy is:

$$\begin{aligned} H_{1*}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n!(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{6} p(\sqrt{3}x) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

where  $p(x) = x \times \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$  is a primitive of the  $\operatorname{erf}$  function. The potential energy  $H_{1*}$  and its derivative are represented in Figure 2 along with  $H_1$  and the linear system potential energy for comparison. Note that  $H_{1*}$  is positive and equals the Duffing potential energy  $H_1$  for small amplitudes  $x_1$ .

### 3. SIMULATION

This section describes the MATLAB guaranteed-passive structure simulation relying on the discrete energy gradient. The simulation of the systems defined by (i) the Duffing potential energy  $H_1$  and (ii) the well-posed problem defined by the new potential energy  $H_{1*}$  are performed and compared.

#### 3.1. Discretization of the equations

The discrete-time equations to be solved for the port-Hamiltonian system are:

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})) \nabla_d H(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \nabla_d H(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) \end{cases} \quad (6)$$

where  $\delta \mathbf{x} = [\delta x_1 \delta x_2]^T$  and  $\delta t$  ( $\delta t = 1/f_s$  where  $f_s = 44100$  Hz is the sampling frequency) are the discrete space and time step, respectively, and  $\nabla_d$  denotes the discrete gradient defined by:

$$\begin{aligned} [\nabla_d H(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x})]_n &= \frac{H_n(x_n + \delta x_n) - H_n(x_n)}{\delta x_n} \text{ if } \delta x_n \neq 0 \\ &= H'_n(x_n) \text{ else.} \end{aligned}$$

Matrices  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{G}$  are defined as:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Equation (6) is implicit and requires an iterative algorithm to be solved. In this work we use the Newton-Raphson method, which is written for time step  $k$ :

$$\delta \mathbf{x}^{(k+1)} = \delta \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}_F^{-1}(\delta \mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{F}(\delta \mathbf{x}^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

where  $\mathbf{J}_F$  is the Jacobian matrix of function  $\mathbf{F}$  defined by  $\mathbf{F}(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}$  that is:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} F_1(\delta x_1, \delta x_2) \\ F_2(\delta x_1, \delta x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\delta t} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_d H_1(x_1, \delta x_1) \\ \nabla_d H_2(x_2, \delta x_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

#### 3.2. Duffing case

In the Duffing oscillator case, the discrete gradient is:

$$\begin{aligned} \nabla_d H_1(x_1, \delta x_1) &= \frac{H_1(x_1 + \delta x_1) - H_1(x_1)}{\delta x_1} \\ &= \frac{1}{2}(2x_1 + \delta x_1) - \frac{1}{4}(4x_1^3 + 6x_1^2 \delta x_1 + 4x_1 \delta x_1^2 + \delta x_1^3) \quad (7) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\nabla_d H_2(x_2, \delta x_2) &= \frac{H_2(x_2 + \delta x_2) - H_2(x_2)}{\delta x_2} \\ &= x_2 + \frac{\delta x_2}{2}\end{aligned}$$

Then we have:

$$F_1(\delta x_1, \delta x_2) = \frac{\delta x_1}{\delta t} - \nabla_d H_2(x_2, \delta x_2)$$

$$F_2(\delta x_1, \delta x_2) = \frac{\delta x_2}{\delta t} + \nabla_d H_1(x_1, \delta x_1) + \mu \nabla_d H_2(x_2, \delta x_2) - u$$

and the Jacobian matrix is:

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_1^2 - 2x_1\delta x_1 - \frac{3}{4}\delta x_1^2 & -\frac{1}{\delta t} + \frac{\mu}{2} \\ \frac{1}{\delta t} & \frac{1}{\delta t} + \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

The simulation of the Duffing oscillator is performed with an excitation force  $f(t) = f_0 \cdot g(t)$  where  $g$  is an impulse. The potential energy  $H_1$  versus the simulated displacement  $x_1$ , for the limit excitation  $f_0 = f_{max} = 9.5 \cdot 10^7$ , is plotted in Figure 3. The spectrogram of the oscillator response  $x_1$  is also shown in Figure 4 and highlights the softening behaviour of the oscillator. If the value of  $f_0$  exceed  $f_{max}$ , the simulation fails since  $|x_1| > 1$  (see Section 2). We will see in the next section that this difficulty can be overcome with the definition of a new potential energy.

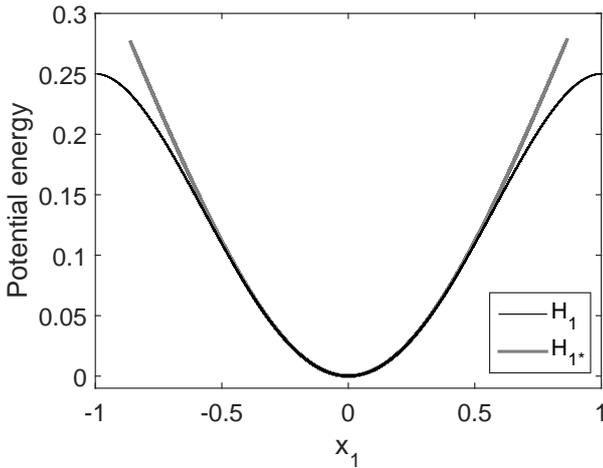


Figure 3: Potential energies as a function of the displacement resulting from simulations of the Duffing oscillator (black) and the new well-posed model (grey). The excitation force is  $f_{max} = 9.5 \cdot 10^7$ . In the case of the Duffing oscillator, increasing the input force makes the computation fail because  $|x_1| > 1$  (see Fig 2).

### 3.3. Well-posed problem

In the case of the new problem defined by  $H_{1*}$  the discrete gradient is

$$\begin{aligned}\nabla_d H_{1*}(x_1, \delta x_1) &= \frac{H_{1*}(x_1 + \delta x_1) - H_{1*}(x_1)}{\delta x_1} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} p(\sqrt{3}(x_1 + \delta x_1)) - p(\sqrt{3}x_1)}{6 \delta x_1}\end{aligned}\quad (8)$$

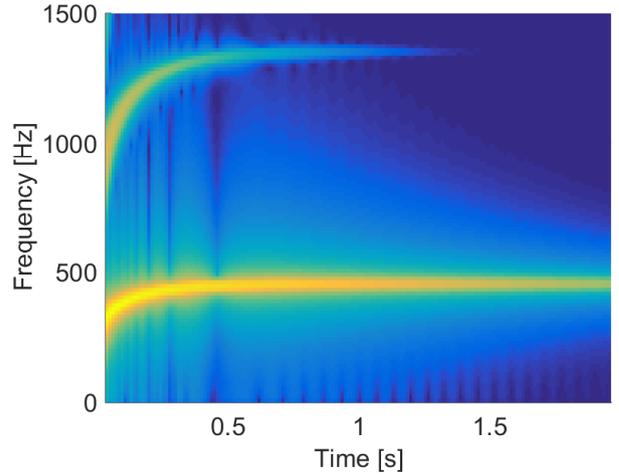


Figure 4: Spectrogram of the simulated Duffing system response  $x_1$  for an input force  $f_{max} = 9.5 \cdot 10^7$ .

$\nabla_d H_2(x_2, \delta x_2)$  is the same as in the Duffing case. We can then deduce the Jacobian matrix:

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta t} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{3} p'(\sqrt{3}(x_1 + s_1)) s_1 - p(\sqrt{3}(x_1 + s_1)) + p(\sqrt{3}x_1)}{6 s_1^2} & \frac{1}{\delta t} + \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

It is possible to simulate the system associated with the new energy  $H_{1*}$  for an excitation force  $f_0 = f_{max}$ , as in section 3.2. The potential energy  $H_{1*}$  versus the simulated displacement is plotted in Figure 3 and can be compared with the potential energy issued from the Duffing simulation performed in section 3.2. However, contrary to the Duffing simulation, the input force  $f_0$  can now be increased without failing the computation. This is demonstrated by running simulations with an input force  $f_0 = 2 \cdot 10^8 > f_{max}$ . The resulting potential energy  $H_{1*}$  is plotted in Figure 5 and the spectrogram of the temporal displacement  $x_1$  is represented in Figure 6: the softening behaviour of the system has been increased.

## 4. CONTROL DESIGN

In this section, we present the nonlinear mode's pitch glide control design. The former Duffing model presented in Section 2 is abandoned and replaced by the model associated with the new potential energy  $H_{1*}$ , defined in Section 3. The control of the pitch glide is realized by shaping the energy  $H_{1*}$ . The principles of energy shaping are recalled in the first section, and the pitch glide control simulations are presented in the second section.

### 4.1. Energy reshaping

Let  $H_{1*}^\epsilon$  be the potential energy parameterized by  $\epsilon \neq 0$  such that:

$$H_{1*}^\epsilon(x) = \frac{x^2}{2} - \epsilon \frac{x^4}{4} + O(x^6)\quad (9)$$

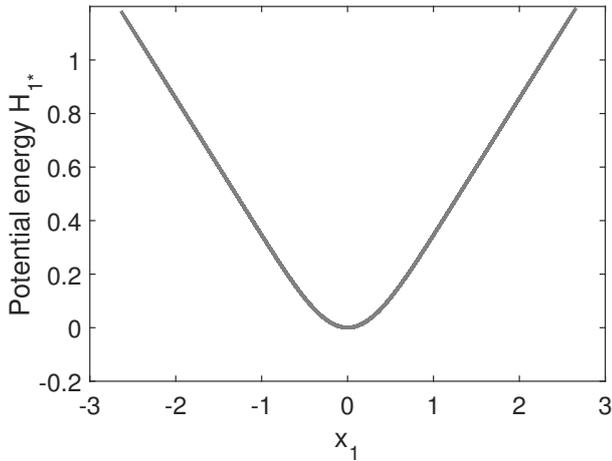


Figure 5: Potential energy  $H_{1*}$  as a function of the displacement  $x_1$  resulting from simulations of the new well-posed system for an input force  $f_0 = 2 \cdot 10^8 > f_{max} = 9.5 \cdot 10^7$ .

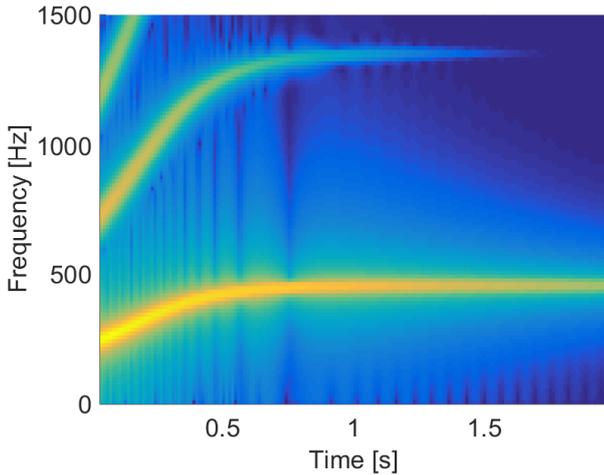


Figure 6: Spectrogram of the simulated well-posed system response  $x_1$  for an input force  $f_0 = 2 \cdot 10^8 > f_{max} = 9.5 \cdot 10^7$ .

This potential energy can be easily calculated using the same arguments than in section 2.2.3:

$$H_{1*}^\epsilon(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{6\epsilon} p(\sqrt{3\epsilon}x) - \frac{1}{6\epsilon} \quad \text{for } \epsilon > 0 \quad (\text{softening})$$

$$H_{1*}^\epsilon(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{6\epsilon} p_i(\sqrt{3\epsilon}x) + \frac{1}{6\epsilon} \quad \text{for } \epsilon < 0 \quad (\text{hardening})$$

where  $p_i(x) = x \times \text{erfi}(x) - \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}$  is a primitive of the imaginary error function  $\text{erfi}$ .

The energy shaping control principle is as follows: if a system is defined by the energy  $H_{1*}^{\epsilon_1}$ , energy shaping consists in changing the system potential energy from  $H_{1*}^{\epsilon_1}$  to  $H_{1*}^{\epsilon_2}$  ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ) by replacing at each time step  $t$  the input force  $f(t)$  by:

$$f_1(t) = f(t) + (\nabla_d H_{1*}^{\epsilon_1} - \nabla_d H_{1*}^{\epsilon_2})(x_1(t))$$

The gradient term  $+\nabla_d H_{1*}^{\epsilon_1}$  aims at "cancelling" the original system defined by  $H_{1*}^{\epsilon_1}$  whereas the gradient term  $-\nabla_d H_{1*}^{\epsilon_2}$  introduces the new target system defined by  $H_{1*}^{\epsilon_2}$ . In our case, note that the original system is defined by  $\nabla_d H_{1*} = \nabla_d H_{1*}^{\epsilon_1=1}$ .

## 4.2. Control simulations

Control simulations using energy shaping principle are performed. The simulation parameters are:

- initial (uncontrolled) energy:  $H_{1*}^{\epsilon_1} = H_{1*}$
- target energy:  $H_{1*}^{\epsilon_2}$ , with  $\epsilon_2 \in \{0.0746, 0.746, 1.79, -2\}$
- input force:  $f_0 = 2 \cdot 10^8$

Note that  $\epsilon_2 > 0$  and  $\epsilon_2 < 0$  leads to a softening and hardening behaviour, respectively.

Figure 7 presents the potential energy  $H_{1*}^{\epsilon_2}$  computed from the simulated responses for the different values of  $\epsilon_2$ . Theoretical quadratic energy of the underlying linear system is also plotted to distinguish softening from hardening behaviour. The results show that positive control parameter  $\epsilon_2$  leads to a softening behaviour (which increases with the value of  $\epsilon_2$ ), whereas negative value of  $\epsilon_2$  results in a hardening behaviour, as expected. This is confirmed by looking at the pitch glide variation of the system response, in Figure 8 to 11.

These results underline the benefits of the definition of the new energy  $H_{1*}$ , i.e. the ability to compute systems dynamics with important pitch glide (downward and upward) caused by both large input forces and nonlinear coefficients.

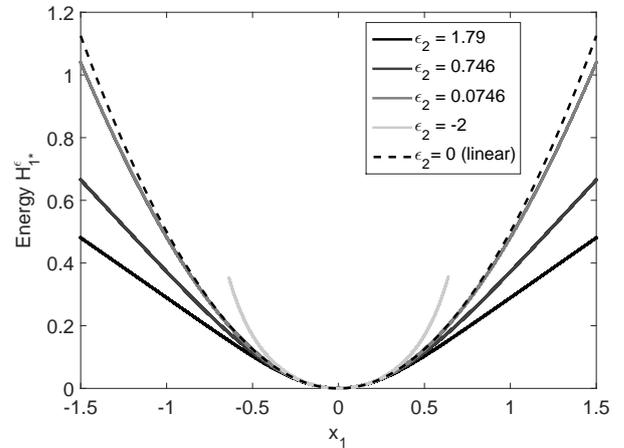


Figure 7:  $H_{1*}^\epsilon$  energies of the controlled system for different values of control parameter  $\epsilon_2$ .

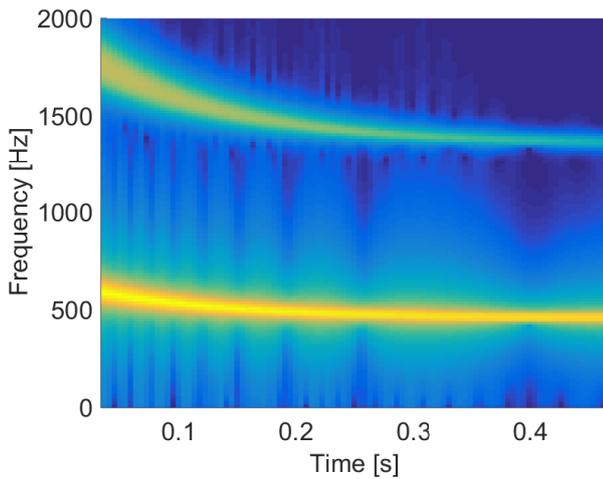


Figure 8: Spectrogram of the system response  $x_1$  for a control parameter value  $\epsilon_2 = -2$ .

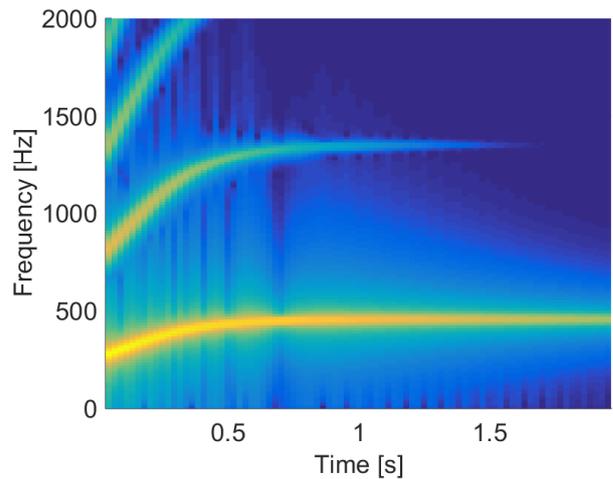


Figure 10: Spectrogram of the system response  $x_1$  for a control parameter value  $\epsilon_2 = 0.746$

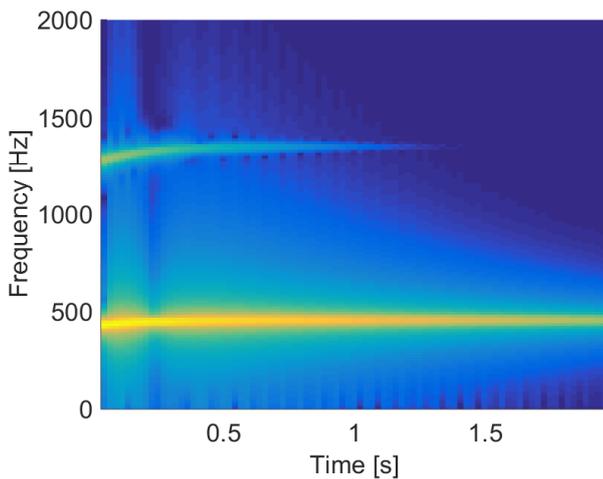


Figure 9: Spectrogram of the system response  $x_1$  for a control parameter value  $\epsilon_2 = 0.0746$

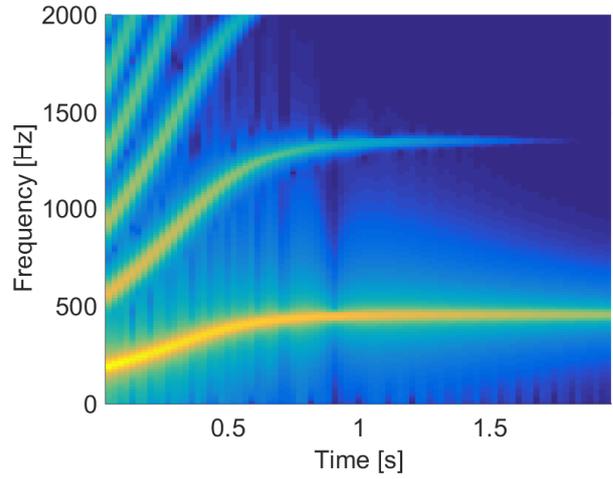


Figure 11: Spectrogram of the system response  $x_1$  for a control parameter value  $\epsilon_2 = 1.791$

## 5. CONCLUSION

This paper has introduced a port-Hamiltonian formulation of a *xiaoluo* gong's fundamental nonlinear mode described by a softening Duffing oscillator. First, the calculation of the Duffing energy highlighted an inconsistent potential energy that has led to the redefinition of a well-posed potential energy. Guaranteed-passive simulations of the system associated to this new energy prove to overcome the stability problem encountered with the ill-posed Duffing modelling. The new energy formulation has then been used in successful energy shaping control simulations, in order to modify the system's nonlinear behaviour in a more hardening or more softening way.

This work represents the first step toward the development

of an experimental control of a real *xiaoluo* gong. However, the various nonlinear phenomena encountered in gong's dynamics, in particular internal resonances (energy exchanges between modes), underline the limitation of a single nonlinear mode modelisation. The control of the instrument pitch glide may require the identification of a MDOF model with interconnected port-Hamiltonian systems.

## 6. ACKNOWLEDGMENTS

This work was funded by the PhD grant of Marguerite Jossic (Université Pierre et Marie Curie, France) and the French National Research Agency sponsored project INFIDHEM.

## 7. REFERENCES

- [1] N.H. Fletcher, “Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells: Pitch glide in chinese gongs,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, no. 6, pp. 2069–2073, 1985.
- [2] Cyril Touzé M. Ducceschi and S. Bilbao, “Nonlinear vibrations of rectangular plates: Investigation of modal interaction and coupling rules,” *Acta Mechanica*, pp. 213–232, 2014.
- [3] Thomas D Rossing and NH Fletcher, “Nonlinear vibrations in plates and gongs,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 73, no. 1, pp. 345–351, 1983.
- [4] N.H. Fletcher and T.D. Rossing, *The Physics of musical instruments*, Springer-Verlag, 1998.
- [5] A. Chaigne C. Touzé O. Thomas, “Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes,” *Journal of Sound and Vibration*, pp. 77–101, 2004.
- [6] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis, “Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 1, pp. 170–194, 2009.
- [7] C. Touzé M. Ducceschi, O. Cadot and S. Bilbao, “Dynamics of the wave turbulence spectrum in vibrating plates: a numerical investigation using a conservative finite difference scheme,” *Physica D*, pp. 73–85, 2014.
- [8] S. Bilbao, “A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von karman plate equations,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, pp. 193–216, 2008.
- [9] Cyril Touzé and M Amabili, “Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: application to reduced-order modelling of harmonically forced structures,” *Journal of sound and vibration*, vol. 298, no. 4, pp. 958–981, 2006.
- [10] Ali Hasan Nayfeh and Dean T. Mook, *Nonlinear oscillations*, J. Wiley, 1995.
- [11] Simon Peter, Robin Riethmüller, and Remco I. Leine, *Tracking of Backbone Curves of Nonlinear Systems Using Phase-Locked-Loops*, pp. 107–120, Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [12] A. Falaize and T. Hélie, “Passive guaranteed simulation of analog audio circuits: A port-hamiltonian approach,” *Applied Sciences (Balcan Society of Geometers)*, vol. 6, pp. 273 – 273, 2016.
- [13] N. Lopes, T. Hélie, and A. Falaize, “Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-hamiltonian systems,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 13, pp. 223 – 228, 2015.
- [14] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, and H. Bruyninckx, *Modeling and Control of Complex Physical Systems: The Port-Hamiltonian Approach*, Springer, 2009.
- [15] S. Benacchio, B. Chomette, A. Mamou-Mani, and V. Finel, “Mode tuning of a simplified string instrument using time-dimensionless state-derivative control,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 334, pp. 178–189, 2015.
- [16] Antoine Chaigne, Cyril Touzé, and Olivier Thomas, “Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals,” *Acoustical science and technology*, vol. 26, no. 5, pp. 403–409, 2005.
- [17] Antoine Falaize and Thomas Hélie, “Passive simulation of the nonlinear port-hamiltonian modeling of a rhodes piano,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 390, pp. 289 – 309, 2017.
- [18] M. Jossic, A. Mamou-Mani, B. Chomette, D. Roze, F. Olivier, and C Jossierand, “Modal active control of chinese gongs,” *Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, Submitted.
- [19] KA Legge and NH Fletcher, “Nonlinearity, chaos, and the sound of shallow gongs,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, no. 6, pp. 2439–2443, 1989.
- [20] T. Meurisse, A. Mamou-Mani, S. Benacchio, B. Chomette, V. Finel, D. B. Sharp, and R. Caussé, “Experimental demonstration of the modification of the resonances of a simplified self-sustained wind instrument through modal active control,” *Acta Acustica*, vol. 101, no. 3, pp. 581–593(13), 2015.
- [21] J.P. Noel and G. Kerschen, “Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, pp. 2–35, 2017.
- [22] Andre Preumont, *Vibration control of active structures: an introduction*, vol. 50, Springer Science & Business Media, 2012.



# Bibliographie

- Adams, D.E. and R.J. Allemang. 2000. “A frequency domain method for estimating the parameters of a non-linear structural dynamic model through feedback.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 14 : 637–656.
- Al-Hadid, M. and J.R. Wright. 1990. “Application of the force-state mapping approach to the identification of non-linear systems.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 4 : 463–482.
- Al-Hadid, M.A. and J.R. Wright. 1989. “Developments in the force-state mapping technique for non-linear systems and the extension to the location of non-linear elements in a lumped-parameter system.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 3 : 269–290.
- Al-Hadid, M.A. and J.R. Wright. 1992. “Estimation of mass and modal mass in the identification of nonlinear single and multi DOF systems using the force-state mapping approach.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 6 : 383–401.
- Allen, M.D. 1971. “Mean-square error of prediction as a criterion for selecting variables.” *Technometrics* 13 : 469–475.
- Amabili, M., F. Pellicano, and M.P. Païdoussis. 1998. “Non-linear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid.” *Journal of Fluids and Structures* 12 : 883–918.
- Amabili, M., A. Sarkar, and M.P. Paidoussis. 2003. “Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method.” *Journal of Fluids and Structures* 18 : 227–250.
- Arquier, R. 2007. *Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires des structures*. Ph.D. thesis, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II).
- Atkins, P.A., J.R. Wright, and K. Worden. 2000. “An extension of force appropriation to the identification of non-linear multi-degree of freedom systems.” *Journal of Sound and Vibration* 237 (1) : 23 – 43.
- Azeez, M.F. and A.F. Vakakis. 2001. “Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations.” *Journal of Sound and Vibration* 240 : 859–889.
- Balmes, E. 1997. “New results on the identification of normal modes from experimental complex modes.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 11 (2) : 229 – 243.
- Benacchio, S. 2014. *Contrôle actif modal appliqué aux instruments de musique à cordes*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- Benacchio, S., B. Chomette, A. Mamou-Mani, and V. Finel. 2015. “Mode tuning of a simplified string instrument using time-dimensionless state-derivative control.” *Journal of Sound and Vibration* 334 : 178–189.

- Benacchio, S., R. Piéchaud, A. Mamou-Mani, B. Chomette, and V. Finel. 2013. “Active Control of String Instruments using Xenomai.” In *Proc. of the Fifteenth real-Time linux Workshop*, 133–141. Lugano-Manno, Switzerland.
- Berdahl, E.J. and J.O. Smith III. 2006. “Active Damping Of A Vibrating String.” In *6th International Symposium on Active Noise and Vibration Control*. Adelaide, Australia.
- Besnainou, C. 1995. “Modal stimulation : A sound synthesis new approach.” In *Proc. of International Symposium on Musical Acoustics*, 434–438. Dourdan, France : SFA.
- Besnainou, C. 1999. “Transforming the Voice of Musical Instruments by Active Control of the Sound Radiation.” In *International Symposium on Active Noise and Vibration Control*. Fort Lauderdale, Florida, USA.
- Blaess, C. 2012. *Solutions temps réel sous Linux*. Editions Eyrolles.
- Boutin, H. 2011. *Méthodes de Contrôle Actif d’Instruments de Musique*. Ph.D. thesis, LAM, UPMC, Université Paris VI.
- Boutin, H. and C. Besnainou. 2008. “Physical parameters of the violin bridge changed by active control.” In *Proc. Acoustics 08 Paris*, 4191–4196. SFA.
- Box, G., G. Jenkins, and G. Reinsel. 1994. *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Third Edition, Prentice-Hall.
- Boyd, S. and L.O. Chua. 1985. “Fading Memory and the Problem of Approximating Nonlinear Operators with Volterra Series.” *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 32 (11) : 1150–1171.
- Brown, D.L., R.J. Allemang, R. Zimmerman, and M. Mergeay. 1979. “Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis.” In *SAE Technical Paper*. SAE International.
- Cameron, T.M. and J.H. Griffin. 1989. “An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems.” *ASME. J. Appl. Mech.* 56 (1) : 149–154.
- Camier, C. 2009. *Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites : application aux cymbales*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique X.
- Carr, J. 1981. *Applications of centre manifold theory*. New-York.
- Cauberghe, B., P. Guillaume, P. Verboven, E. Parloo, and S. Vanlanduit. 2004. “A poly-reference implementation of the maximum likelihood complex frequency-domain estimator and some industrial applications.” In *Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference*.
- Caughey, T.K. and M.E.J. O’Kelly. 1965. “Classical normal modes in damped linear dynamic systems.” *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* 32 : 583–588.
- CEA, Cast3M web site. 2017. “[http :www-cast3m.cea.fr](http://www-cast3m.cea.fr)” .
- Chaigne, A., C. Touzé, and O. Thomas. 2005. “Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals.” *Acoustical science and technology* 26 (5) : 403–409.
- Chesne, S., C. Jean-Mistral, and L. Gaudiller. 2013. “Experimental identification of smart material coupling effects in composite structures.” *Smart Materials and Structures* 22 (7).

- Chollet, R., G. Aeberli, and C. Besnainou. 2000. "Modification de la résonance de Helmholtz de la guitare par contrôle actif." In *Actes du 5eme Congrès Français d'Acoustique*, 248–250. Lausanne, Suisse.
- Chomette, B. 2008. *Contrôles Modaux Actif, Semi-adaptatif et Semi-actif de Structures Intelligentes Embarquées - Application aux Cartes Électroniques*. Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- Chomette, B., S. Chesne, D. Rémond, and L. Gaudiller. 2010. "Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control - application to a printed circuit board." *Mechanical Systems and Signal Processing* 24 : 352–364.
- Chomette, B. and A. Mamou-Mani. 2017. "Modal control based on direct modal parameters estimation." *Journal of Vibration and Control* online.
- Chomette, B., D. Remond, S. Chesne, and L. Gaudiller. 2008. "Semi-adaptive modal control of on-board electronic boards using an identification method." *Smart Materials and Structures* 17 (6) : 1–8.
- Chu, S.R., R. Shoureshi, and M. Tenorio. 1990. "Neural networks for system identification." *IEEE Control Systems Magazine* 10 : 36–43.
- Cochelin, B., N. Damil, and M. Potier-Ferry. 2007. *Méthode Asymptotique Numérique*. Paris : Lavoisier.
- Cochelin, B. and C. Vergez. 2009. "A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions." *Journal of Sound and Vibration* 324 (1-2) : 243–262.
- Collette, C., S. Chesne, S. Correia, and G. Durand. 2015. "An active control concept for the TALC space telescope." In *22ème Congrès Français de Mécanique*.
- Crawley, E.F. and A.C. Aubert. 1986. "Identification of nonlinear structural elements by force-state mapping." *AIAA Journal* 24 (Sections 3.2, 6.1) : 155–162.
- Crawley, E.F. and K.J. O'Donnell. 1986. "Identification of nonlinear system parameters in joints using the force-state mapping technique." *AIAA Paper* 86-1013 (Sections 3.2, 6.1) : 659–667.
- Deblauwe, F. and R.J. Allemang. 1986. "A Possible Origin of Complex Modal Vectors." In *Proceedings of the 1 lth International Seminar on Modal Analysis*, A23. Katholic University of Leuven.
- Denis, V., M. Jossic, A. Giraud-Audine, A. Renault, and O. Thomas. 2017. "Identification of nonlinear modes using a phase locked loop experimental continuation." .
- Dhooge, A., W. Govaerts, and Y.A. Kuznetsov. 2003. "MATCONT : A MATLAB Package for Numerical Bifurcation Analysis of ODEs." *ACM Trans. Math. Softw.* 29 (2) : 141–164.
- Doedel, E.J., R.C. Paffenroth, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, and X.J. Wang. 2000. "Auto2000 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations." *available via http ://cmvl.cs.concordia.ca/* .
- Dossogne, T., J.P. Noël, C. Grappasonni, G. Kerschen, B. Peeters, J. Debille, M. Vaes, and J. Schoukens. 2015. "Nonlinear ground vibration identification of an F-16 aircraft. Part II :

- understanding nonlinear behaviour in aerospace structures using sine-sweep testing.” In *Proceedings of the 16th International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD)*. Saint Petersburg, Russia.
- Dulac, H. 1912. “Solutions d’un système d’équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières.” *Bulletin de la Société Mathématique de France* 42 : 324–383.
- El-Kafafy, M. and P. Guillaume. 2011. “Direct calculation of modal parameters from matrix orthogonal polynomials.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (7) : 2375–2387.
- Ewins, D. J. 2006. “A future for experimental structural dynamics.” In *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*. Leuven, Belgium.
- Falaize, A. and T. Hélie. 2014. “Passive simulation of electrodynamic loudspeakers for guitar amplifiers : a port-Hamiltonian approach.” In *International Symposium on Musical Acoustics*, 1–5. Le Mans, France.
- Fletcher, N., R. Perrin, and K. Legge. 1989. “Nonlinearity and chaos in acoustics.” *Acoustics Australia* 18 (1) : 9–13.
- Fletcher, N.H. 1985. “Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells : Pitch glide in Chinese gongs.” *The Journal of the Acoustical Society of America* 78 (6) : 2069–2073.
- Fletcher, N.H. and T.D. Rossing. 2005. *The Physics of musical instruments*. Second edition edn. Springer-Verlag.
- Forsythe, George E. 1957. “Generation and use of orthogonal polynomials for data-fitting with a digital computer.” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 5 (2) : 74–88.
- Fuellekrug, U. and D. Goege. 2012. “Identification of weak non-linearities within complex aerospace structures.” *Aerosp. Sci. Technol.* 23 : 53–62.
- Gaudiller, L. and J. Der Hagopian. 1996. “Active control of flexible structures using a minimum number of components.” *Journal of Sound and Vibration* 193 (3) : 713–741.
- Gavrinski, W.K. 1998. *Dynamics and Control of Structures : a Modal Approach*. Springer.
- Gendelman, O.V. 2004. “Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment.” *Nonlinear Dynamics* 37 : 115–128.
- Gifford, S.J. 1989. *Volterra series analysis of nonlinear structures*. Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering, Heriot-Watt University.
- Griffin, S. 1995. *Acoustic Replication in Smart Structures Using Active Structural/Acoustic Control*. Ph.D. thesis, Georgia Tech., Department of Aerospace Engineering.
- Griffin, S., S.A. Lane, and R.L. Clark. 2003. “The application of smart structures toward feedback suppression in amplified acoustic guitars.” *Journal of the Acoustical Society of America* 113 (6) : 3188–3196.
- Grossman, P.L., B. Koplik, and Y-Y. Yu. 1969. “Nonlinear vibrations of shallow spherical shells.” *ASME Journal of Applied Mechanics* 39E : 451–458.
- Guckenheimer, J. and P.J. Holmes. 1986. *Non-linear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*. New-York.

- Hanagud, S. and S. Griffin. 1998. "Active structural control for a smart guitar." In *Fourth European Conference On Smart Structures and Materials*. Harrogate, UK.
- Haroon, M. and D.E. Adams. 2009. "A modified H2 algorithm for improved frequency response function and nonlinear parameter estimation." *Journal of sound and vibration* 320 : 822–837.
- Haterbouch, M. and R. Benamar. 2005. "Geometrically nonlinear free vibrations of simply supported isotropic thin circular plates." *Journal of Sound and Vibration* 280 : 903–924.
- Herington, N., D.P. Elford, G.M. Swallowe, L. Chalmers, R. Perrin, and T.R. Moore. 2010. "Normal modes of a gamelan gong." In *Proc. 1st EAA-EuroRegio Congress on Acoustics & Vibration*, 165. Ljubljana.
- Hermann, G. 1955. "Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates." *G. Tech. Rep., National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)* 3578.
- Hui, D. 1983. "Large-amplitude vibrations of geometrically imperfect shallow spherical shells with structural damping." *AIAA Journal* 21 (12) : 1736–1741.
- Jézéquel, L. and C.H. Lamarque. 1991. "Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory." *Journal of Sound and Vibration* 149 (3) : 429–459.
- Johannessen, K. 2017. "The Duffing Oscillator with Damping for a Softening Potential." *International Journal of Applied and Computational Mathematics* .
- Jossic, M., D. Roze, T. Hélie, B. Chomette, and A. Mamou-Mani. 2017. "Energy shaping of a softening Duffing oscillator using the formalism of Port-Hamiltonian Systems." In *20th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-17)*. Edinburgh, United Kingdom.
- Karkar, S., B. Cochelin, and C. Vergez. 2013. "A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities." *Journal of Sound and Vibration* 332 (4) : 968–977. URL <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>.
- Kautsky, J., N. K. Nichols, and P. Van Dooren. 1985. "Robust pole assignment in linear state feedback." *International Journal of Control* 41 (5) : 1129–1155.
- Kerschen, G. and J.C. Golinval. 2002. "Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition." *Journal of Sound and Vibration* 249 (5) : 849–865.
- Kerschen, G., M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. 2009. "Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist." *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (1) : 170–194.
- Kerschen, G., K. Worden, A.F. Vakakis, and J.C. Golinval. 2006. "Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics." *Mechanical Systems and Signal Processing* 20 (3) : 505–592.
- Krueger, D.W., K.L. Gee, and J. Grimshaw. 2010. "Acoustical and vibrometry analysis of a large Balinese gamelan gong." *Journal of the Acoustical Society of America* 128 (1).
- Lacy, S.L. and D.S. Bernstein. 2005. "Subspace identification for non-linear systems with measured-input nonlinearities." *Int. J. Control* 78 : 906–926.
- Lau, J., J. Lanslots, B. Peeters, and H. Van der Auweraer. 2007. "Automatic modal analysis : Reality or myth?" In *Proceedings of IMAC 25*. Orlando, FL, USA.

- Legge, K.A. and N.H. Fletcher. 1989. "Nonlinearity, chaos, and the sound of shallow gongs." *The Journal of the Acoustical Society of America* 86 (6) : 2439–2443.
- Leontaritis, I.J. and S.A. Billings. 1985a. "Input-output parametric models for nonlinear systems, part I : deterministic nonlinear systems." *International Journal of Control* 41 : 303–328.
- Leontaritis, I.J. and S.A. Billings. 1985b. "Input-output parametric models for nonlinear systems, part II : stochastic nonlinear systems." *International Journal of Control* 41 : 329–344.
- Lewandowski, R. 1987. "Application of the Ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beams." *Journal of Sound and Vibration* 114 : 91–101.
- Li, X., J.C. Ji, and C.H. Hansen. 2006. "Non-linear normal modes and their bifurcation of a two DOF system with quadratic and cubic non-linearity." *International Journal of Non-linear Mechanics* 41 : 1028–1038.
- Londono, J.M. and J.E. Cooper. 2014. "Experimental identification of a system containing geometric nonlinearities." In *Proceedings of the 32th International Modal Analysis Conference (IMAC)*. Orlando, FL, USA.
- Love, A.E.H. 1888. "On the small free vibrations and deformations of elastic shells." *Philosophical trans. of the Royal Society (London)* Vol. série A (17) : 491–549.
- Lueg, P. 1934. *Process of silencing sound oscillations*.
- Luenberger, D.G. 1964. "Observing the state of a linear system." *Military Electronics, IEEE Transactions on* 8 (2) : 74–80.
- Lyapunov, A.M. 1907. *Problème général de la stabilité du mouvement*. 203rd edn. No. 9 in 2. Annales de la faculté des sciences de Toulouse.
- Maia, N.M.M. and J.M.M. Silva. 2001. "Modal analysis identification techniques." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 359 (1778) : 29–40.
- Marchesiello, S. and L. Garibaldi. 2008a. "Identification of clearance-type nonlinearities." *Mech. Syst. Signal Process.* 22 : 1133–1145.
- Marchesiello, S. and L. Garibaldi. 2008b. "A time domain approach for identifying nonlinear vibrating structures by subspace methods." *Mech. Syst. Signal Process* 22 : 81–101.
- Maschke, B. and A. Van der Schaft. 1992. "Port-controlled Hamiltonian systems : Modelling origins and system-theoretic properties." In *2nd IFAC NOLCOS Bordeaux*, 282–288.
- Maschke, B. and A. Van der Schaft. 1994. "System-theoretic properties of port-controlled Hamiltonian systems." In *Systems and Networks : Mathematical theory and applications 2*, 349–352.
- Masri, S.F. and T.K. Caughey. 1979. "A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems." *J. Appl. Mech.* 46 : 433–447.
- Meirovitch, L. 1967. *Analytical Methods in Vibrations*. New York : MacMillan Publishing Co.
- Meirovitch, L. 1985. *Introduction to Dynamics and Control*. New York : Wiley.
- Meirovitch, L. and H. Baruh. 1985. "Implementation of modal filters for control of structures." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 8 (6) : 707–716.

- Messiaen, O. and Y. Loriod. 2001. *Feuillets inédits : quatre pièces pour onde Martenot & piano*. Durand.
- Metered, H., P. Bonello, and S.O. Oyadiji. 2010. “The experimental identification of magneto-rheological dampers and evaluation of their controllers.” *Mech. Syst. Signal Process.* 24 : 976–994.
- Meurisse, T. 2014. *Contrôle actif appliqué aux instruments de musique à vent*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- Meurisse, T., A. Mamou-Mani, S. Benacchio, B. Chomette, V. Finel, D. Sharp, and R. Caussé. 2015a. “Experimental Demonstration of the Modification of the Resonances of a Simplified Self-Sustained Wind Instrument Through Modal Active Control.” *Acta Acustica* 101 (3) : 581–593(13).
- Meurisse, T., A. Mamou-Mani, S. Benacchio, V. Finel, B. Chomette, R. Caussé, and D. Sharp. 2014. “Experimental validation of adjusting the resonances of a simplified bass clarinet through modal active control.” In *International Symposium on Musical Acoustics (ISMA2014)*, 365–370. Le Mans, France.
- Meurisse, T., A. Mamou-Mani, R. Caussé, and D. Sharp. 2015b. “An active mute for the trombone.” *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138,3539 .
- Mohanty, P., P. Reynolds, and A. Pavic. 2007. “Automated interpretation of stability plots for analysis of a non-stationary structure.” In *Proceedings of IMAC 25*. Orlando, FL, USA.
- Mojrzisch, S. and J. Twiefel. 2015. “Phase-controlled frequency response measurement of a piezoelectric ring at high vibration amplitude.” *Archive of Applied Mechanics* 86 (10) : 1763–1769.
- Monteil, M. 2013. *Comportement vibratoire du steelpan : effet des procédés de fabrication et dynamique non linéaire*. Ph.D. thesis, ENSTA ParisTech.
- Monteil, M., O. Thomas, and C. Touzé. 2015. “Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan.” *Applied Acoustics* 89 : 1–15.
- Monteil, M., C. Touzé, O. Thomas, and S. Benacchio. 2014. “Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies : the cases of 1 :2 :4 and 1 :2 :2 internal resonances.” *Nonlinear Dynamics* 75 (1-2) : 175–200.
- Nayfeh, A. H. 1995. “On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems.” *Journal of Vibration and Control* 1 : 389–430.
- Nayfeh, A. H., J. F. Nayfeh, and D. T. Mook. 1992. “On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities.” *Nonlinear Dynamics* 3 : 145–162.
- Nayfeh, A. H. and S.A. Nayfeh. 1994. “On nonlinear modes of continuous systems.” *Journal of Vibration and Acoustics* 116 : 129–136.
- Nayfeh, A.H. 1973. *Perturbation methods*. John Wiley & sons, inc., New-York.
- Nayfeh, A.H. and T.D. Mook. 1995. *Nonlinear oscillations*. J. Wiley.
- Noel, J.P. and G. Kerschen. 2017. “Nonlinear system identification in structural dynamics : 10 more years of progress.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 : 2–35.

- Noreland, D., S. Bellizzi, C. Vergez, and R. Bouc. 2009. “Nonlinear modes of clarinet-like musical instruments.” *Journal of Sound and Vibration* 324 : 983–1002.
- Noël, J.P. and G. Kerschen. 2013. “Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems.” *Mech. Syst. Signal Process.* 40 : 701–717.
- Noël, J.P., L. Renson, C. Grappasonni, and G. Kerschen. 2016. “Identification of nonlinear normal modes of engineering structures under broadband forcing.” *Mech. Syst. Signal Process.* 74 : 95–110.
- Ortega, R., A. Van der Schaft, I. Mareels, and B. Maschke. 2001. “Putting energy back in control.” *IEEE Control Systems Magazine* 21 : 18–33.
- Ortega, R., A. Van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. 2002. “Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems.” *Automatica* 38 (4) : 585 – 596.
- Peeters, B., H. Van der Auweraer, P. Guillaume, and J. Leuridan. 2004. “The polymax frequency-domain method : a new standard for modal parameter estimation ?” *Shock and Vibration* 11 (3-4) : 394–409.
- Peeters, M., G. Kerschen, and J.C. Golinval. 2011a. “Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes.” *Journal of Sound and Vibration* 330 (3) : 486 – 509.
- Peeters, M., G. Kerschen, and J.C. Golinval. 2011b. “Modal testing of nonlinear vibrating structures based on nonlinear normal modes : Experimental demonstration.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (4) : 1227 – 1247.
- Peeters, M., R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.C. Golinval. 2009. “Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (1) : 195 – 216. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.
- Pellicano, F., M. Amabili, and M.P. Païdoussis. 2002. “Effect of the geometry on the non-linear vibration of circular cylindrical shells.” *International Journal of Non-linear Mechanics* 37 : 1181–1198.
- Perrin, R., S. Hamden, B.J. Halkon, and G.M. Swallowe. 2013. “Studies with a small gamelan gong.” In *Proc. Inst. Acoust.*, Vol. 35, 337–344.
- Peter, S., R. Riethmüller, and R.I. Leine. 2016. “Tracking of Backbone Curves of Nonlinear Systems Using Phase-Locked-Loops.” In *Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics 2016*, Vol. 1, 107–120.
- Piéchaud, R. 2014. “A Lightweight C++ Framework for Real Time Active Control.” *Real Time Linux Workshop* .
- Pinte, G., P. Deckers, J. De Caigny, D. Moens, J. Swevers, and P. Sas. 2005. “Design of an active controller for the enhancement of the sound quality of a classical violin.” In *Proc. Forum Acusticum*, 853–859. Budapest.
- Platten, M.F., J.R. Wright, G. Dimitriadis, and J.E. Cooper. 2009. “Identification of multi-degree of freedom non-linear system using an extended modal space model.” *Mech. Syst. Signal Process.* 23 : 8–29.

- Poincaré, H. 1899. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris : Gauthiers-Villars.
- Preumont, A. 2012. *Vibration control of active structures : an introduction*. Vol. 50. Springer Science & Business Media.
- Quaegebeur, N. and A. Chaigne. 2008. “Nonlinear vibrations of loudspeaker-like structures.” *Journal of Sound and Vibration* 309 (1) : 178–196.
- Rand, R. 1974. “A direct method for nonlinear normal modes.” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 9 : 363–368.
- Renson, L., G. Kerschen, and B. Cochelin. 2016. “Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering.” *Journal of Sound and Vibration* 364 : 177 – 206.
- Richardson, B.E. and G.W. Roberts. 1983. “The adjustment of mode frequencies in guitars : A study by means of holographic interferometry and finite element analysis.” In *Proceedings of SMAC*.
- Richardson, M.H. and D.L. Formenti. 1982. “Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials.” In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, 167–182.
- Richardson, M.H. and D.L. Formenti. 1985. “Global Curve Fitting of Frequency Response Measurements using the Rational Fraction Polynomial Method.” In *3rd IMAC Conference*. Orlando, FL.
- Rollow, J.D. 2003. *Active Control of Spectral Detail Radiated by an Air-Loaded Impacted Membrane*. Ph.D. thesis, Pennsylvania State University.
- Rollow, J.D., D.C. Swanson, and C.B. Burroughs. 1997. “Active control of timbre radiated by a fluid loaded percussion instrument.” In *Proc. of the Institute of acoustics*, Vol. 19, 181–185.
- Rosenberg, R.M. 1962. “The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems.” *Journal of Applied Mechanics* 29 : 7–14.
- Rosenberg, R.M. 1966. “On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom.” *Advances in Applied Mechanics* 9 : 155–242.
- Rossing, T.D. and N. Fletcher. 1982. “Acoustics of a tam-tam.” *Bull. Australian Acoust. Soc.* 10 (1) : 21–26.
- Rossing, T.D. and N.H. Fletcher. 1983. “Nonlinear vibrations in plates and gongs.” *The Journal of the Acoustical Society of America* 73 (1) : 345–351.
- Rossing, T.D. and R.W. Peterson. 1982. “Vibrations of plates, gongs and cymbals.” *Percussive notes* 19 (3) : 31–4.
- Rossing, T.D. and R.B. Shepherd. 1982. “Acoustics of gamelan instruments.” *Percussive Notes* 19 : 73–83.
- Rouss, V., W. Charon, and G. Cirrincione. 2009. “Neural model of the dynamic behaviour of a non-linear mechanical systems.” *Mech. Syst. Signal Process.* 23 : 1145–1159.
- Schetzen, M. 1980. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. New York, NY, USA : John Wiley & Sons.

- Schweickhardt, T. and F. Allgöwer. 2007. “Linear control of nonlinear systems based on nonlinearity measures.” *Journal of Process Control* 17 (3) : 279–284.
- Shabana, A.A. 2012. *Theory of Vibration : Volume II : Discrete and Continuous Systems*. Mechanical Engineering Series. Springer New York.
- Shaw, S.W. and C. Pierre. 1991. “Non-linear normal modes and invariant manifold.” *Journal of Sound and Vibration* 150 (1) : 170–173.
- Shaw, S.W. and C. Pierre. 1992. “On nonlinear normal modes.” *ASME Winter Annual Meeting* .
- Shaw, S.W. and C. Pierre. 1993. “Normal modes for non-linear vibratory systems.” *Journal of Sound and Vibration* 164 (1) : 85–124.
- Shaw, S.W. and C. Pierre. 1994. “Normal modes of vibration for non-linear continuous systems.” *Journal of Sound and Vibration* 169 : 319–347.
- Slater, J.C. 1996. “A numerical method for determining nonlinear normal modes.” *Nonlinear Dynamics* 10 (1) : 19–30.
- Sokolov, I.J. and V.I. Babitsky. 2001. “Phase control of self-sustained vibration.” *Journal of Sound and Vibration* 248 (4) : 725–744.
- Takanashi, H., S. Adachi, and S. Wakui. 2003. “Independant modal control system design method via modal matrix estimation based on subspace method.” *JSME International Journal, Series C : Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing* 46 (3) : 841–847.
- Tehrani, M.G., L. Wilmschurst, and S. Elliott. 2013. “Receptance method for active vibration control of a nonlinear system.” *Journal of Sound and Vibration* 332 (19) : 4440–4449.
- Thomas, O. 2001. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques-Application aux instruments de percussion*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI ; Telecom ParisTech.
- Thomas, O. 2011. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques*. Ph.D. thesis, Habilitation à Diriger les Recherches, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- Thomas, O., L. Nicu, C. Ayela, and C. Touzé. 2008. “Bucling and non-linear vibrations of a mems biosensor.” In *Proc. of Euromech Non-linear Dynamics Conference (ENOC 2008)*. Saint Petersburg.
- Thomas, O., C. Touzé, and A. Chaigne. 2001. “Non-linear behaviour of gongs through the dynamics of simple rods systems.” In *Proc. Int. Symp. Mus. Acoust., Perugia*.
- Thomas, O., C. Touzé, and A. Chaigne. 2005. “Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 : 1 : 2 internal resonance.” *International Journal of Solids and Structures* 42 (11) : 3339–3373.
- Thomas, O., C. Touzé, and E. Luminais. 2007. “Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : Experiments on a 1 :1 :2 internal resonance.” *Nonlinear Dynamics* 49 : 259.
- Thomas, O., C. Touzé, and A. Chaigne. 2003. “Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II : experiments.” *Journal of Sound and Vibration* 265 (5) : 1075 – 1101.

- Touzé, C. 2000. *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques : application aux instruments de percussion non-linéaires*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Touzé, C. 2003. “A normal form approach for nonlinear normal modes.” Research Report 156, Publications du LMA.
- Touzé, C. 2009. *Vibrations non linéaires géométriques de structures minces. Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos*. Habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie.
- Touzé, C. 2014. *Modal analysis of nonlinear mechanical systems*. chap. Normal form theory and nonlinear normal modes : theoretical settings and applications, 75–160.
- Touzé, C. and M. Amabili. 2006. “Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : application to reduced-order modelling of harmonically forced structures.” *Journal of sound and vibration* 298 (4) : 958–981.
- Touzé, C. and A. Chaigne. 2000. “Lyapunov exponents from experimental time series : application to cymbal vibrations.” *A. Acustica* 86 : 557–567.
- Touzé, C., O. Thomas, and A. Chaigne. 2004a. “Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes.” *Journal of Sound and Vibration* 273 (1-2) : 77–101.
- Touzé, C., O. Thomas, and A. Huberdeau. 2004b. “Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures.” *Computers & Structures* 82 : 2671–2682.
- Touzé, C. and O. Thomas. 2006. “Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry.” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 41 (5) : 678 – 692.
- Touzé, C., O. Thomas, and A. Chaigne. 2002. “Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory.” *Journal of Sound and Vibration* 258 (4) : 649–676.
- Tsai, G-C., B-T. Wang, Y-S. Lee, and Z-W. Chang. 2005. “Study of vibration and sound characteristics of a copper gong.” *Journal of the Chinese Institute of Engineers* 28 (4) : 713–719.
- Vakakis, A.F. 1997. “Non-linear normal modes and their applications in vibration theory : an overview.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 11 : 3–22.
- Van Der Auweraer, H., P. Guillaume, P. Verboven, and S. Vanlanduit. 2001. “Application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation method.” *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 123 (4) : 651–658.
- Van Overschee, P. and B. De Moor. 1996a. “Continuous-time frequency domain subspace system identification.” *Signal Process.* 52 (7) : 179–194.
- Van Overschee, P. and B. De Moor. 1996b. *Subspace Identification for Linear Systems : Theory, Implementation and Applications*. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.
- Von Kármán, T. 1910. “Festigkeitsprobleme im Maschinenbau.” *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* 4 (4) : 311–385.

- Welch, P.D. 1967. "The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra : A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms." *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 15 : 70–73.
- Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer.
- Witters, M. and J. Swevers. 2010. "Black-box model identification for a continuously variable, electro-hydraulic semi-active damper." *Mech. Syst. Signal Process.* 24 : 4–18.
- Woodhouse, J. 2004a. "On the synthesis of guitar plucks." *Acta Acustica united with Acustica* 90 (5) : 928–944.
- Woodhouse, J. 2004b. "Plucked guitar transients : Comparison of measurements and synthesis." *Acta Acustica united with Acustica* 90 (5) : 945–965.
- Worden, K. and G.R. Tomlinson. 1989. "Application of the restoring force method to nonlinear elements." In *Proceedings of Seventh International Modal Analysis Conference*. Las Vegas.
- Wright, J.R., J.E. Cooper, and M. Desforges. 1999. "Normal mode force appropriation—theory and application." *Mechanical Systems and Signal Processing* 13 (Sections 3.4, 7.3) : 217–240.
- Wright, J.R., M.F. Platten, J.E. Cooper, and M. Sarmast. 2001a. "Identification of multi-degree-of-freedom weakly non-linear systems using a model based in modal space." In *Proceedings of the International Conference on Structural System Identification*. Kassel, Germany.
- Wright, J.R., M.F. Platten, J.E. Cooper, and M. Sarmast. 2001b. "Identification of multi-degree-of-freedom weakly non-linear systems using a model based in modal space." In *Proceedings of the International Conference on Structural System Identification*, edited by Kassel, Sections 3.4, 7.3, 49–68.
- Yang, Z., G. Dimitriadis, G.A. Vio, J.E. Cooper, and J.R. Wright. 2006. "Identification of structural free-play non-linearities using the non-linear resonant decay method." In *Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis (ISMA)*. Leuven, Belgium.
- Yasuda, K., S. Kawamura, and K. Watanabe. 1988. "Identification of nonlinear multi-degree-of-freedom systems. Presentation of an identification technique." In *JSME Int. J. Ser. III, Vib. Control Engineering, Engineering for Industry.*, Vol. 31, 8–14.
- Yasuda, K. and G. Kushida. 1984. "Nonlinear forced oscillations of a shallow spherical shell." *Bull. JSME* 27 (232) : 2233–2240.
- Zahorian, S.A. and M. Rothenberg. 1981. "Principal component analysis for low-redundancy encoding of speech spectra." *Journal of the Acoustical Society of America* 69 : 519–524.